

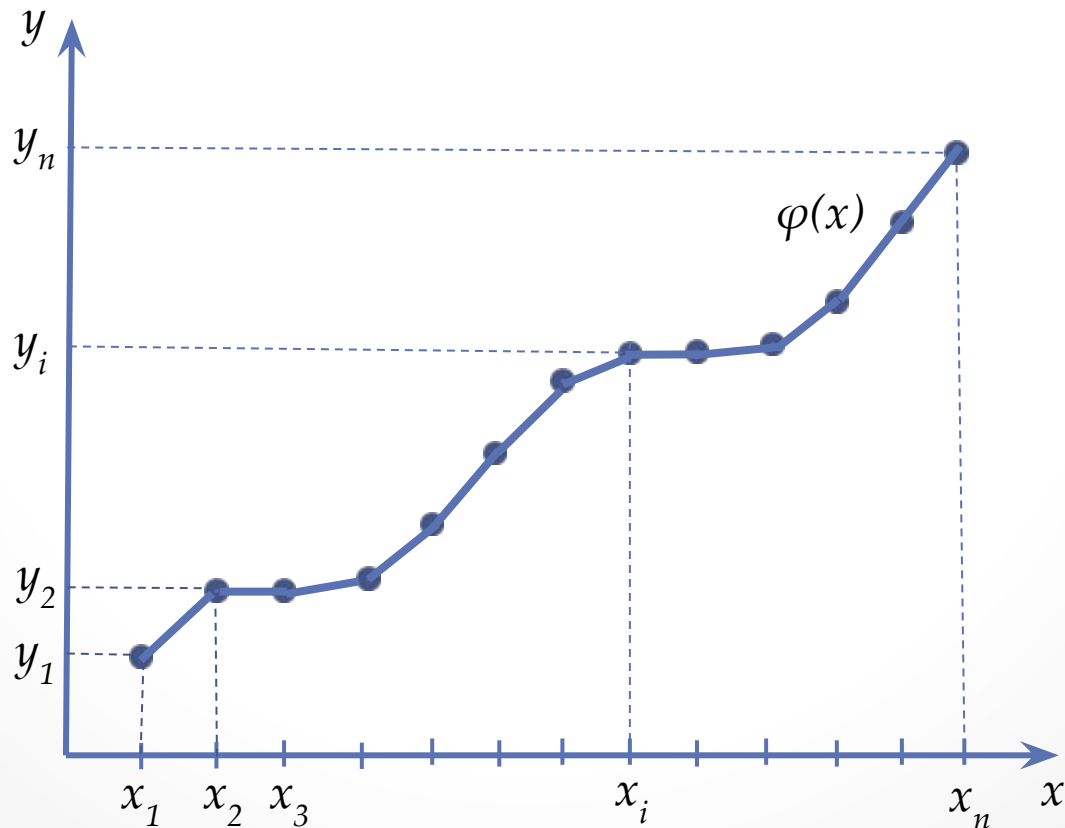
Интерполяции сплайнами

Интерполирование полиномом $(n-1)$ -ой степени по совокупности по n точкам часто бывает неудовлетворительным, особенно при больших значениях n . В этих случаях полином степени $n-1$ может иметь $n-2$ локальный максимум и минимум и график может раскачиваться, чтобы пройти через заданные точки, что часто бывает недопустимым.

В таких случаях часто применяют интерполяцию сплайнами. Английское слово «*spline*» можно перевести как «гибкая линейка».

Интерполяции сплайнами

Когда надо провести график по ее известным точкам, то пользуются лекалом. Если точки расположены достаточно часто, то в качестве лекала применяется обычная линейка, с помощью которой две соседние точки графика соединяются обычной прямой линией. Результирующая кривая в этом случае выглядит подобно ломаной линии.



Интерполяции сплайнами

Эту ломаную линию называют линейным сплайном. Его можно записать в виде формулы:

$$S_i(x) = y_i + d_i(x - x_i) \quad (1)$$

где

$$d_i = (y_{i+1} - y_i) / (x_{i+1} - x_i)$$

Интерполяции сплайнами

Совокупность таких прямых линий на всех $n-1$ отрезках будет определять результирующую кривую $\phi(x)$, представляющую собой линейный сплайн:

$$\phi(x) = \begin{cases} \text{для } d_1(x - vx_1) + y_1 & [x_1, x_2] \\ \text{для } d_2(x - vx_2) + y_2 & [x_2, x_3] \\ \dots & \dots \\ \text{для } d_i(x - vx_i) + y_i & [x_i, x_{i+1}] \\ \dots & \dots \\ y_{n-1} + d_{n-1}(x - vx_{n-1}) & [x_{n-1}, x_n] \end{cases} \quad (2)$$

Интерполяции сплайнами

Если точки расположены редко, то в качестве лекала можно применить металлическую линейку, которую ставят на ребро и изгибают, придерживая в нескольких местах пальцами так, чтобы ее ребро проходило сразу через все точки графика. В этом случае кривая на отрезке между двумя точками представляет собой полином 3-й степени.

$$S_i(x) = a_i + b_i(x) + c_i(x)^2 + d_i(x)^3 \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i \quad (3)$$

совокупность таких полиномов на всех $n-1$ отрезках будет определять результирующую кривую $\phi(x)$, представляющую собой кубический сплайн.

$$\phi(x) = \begin{cases} \text{для } x \in [x_1, x_2] \\ \text{для } x \in [x_2, x_3] \\ \dots \\ \text{для } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ \dots \\ \text{для } x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases} \quad (4)$$

Интерполяции сплайнами

Или в развернутом виде

$$\varphi(x) = \begin{cases} \text{для } b_1(x) + c_1(x)x + d_1(x)^3 & [x_1, x_2] \\ \text{для } b_2(x) + c_2(x)x + d_2(x)^3 & [x_2, x_3] \\ \dots & \dots \\ \text{для } b_i(x) + c_i(x)x + d_i(x)^3 & [x_i, x_{i+1}] \\ \dots & \dots \\ \text{для } b_{n-1}(x) + c_{n-1}(x)x + d_{n-1}(x)^3 & [x_{n-1}, x_n] \end{cases} \quad (5)$$

Интерполяции сплайнами

Для построения кривой $\phi(x)$, необходимо определить неизвестные коэффициенты

$$a_i, b_i, c_i, d_i \quad i = 1, 2, \dots, n - 1$$

общее число которых, как следует из формулы (8), составляет величину $4(n-1)$ значений. Следовательно необходимо составить систему состоящую из $4(n-1)$ уравнений и ее решить.

В этой системе n уравнений определяют условие совпадения значений сплайнов со значениями исходной функции

$$\left. \begin{aligned} S_i(x_i) &= y_i \quad i = 1, 2, \dots, n - 1 \\ S_{n-1}(x_n) &= y_n \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Интерполяции сплайнами

Так как функция $\phi(x)$ должна быть непрерывной, то непрерывными должны быть и все ее производные до второго порядка включительно. Условие непрерывности записывается в виде

Непрерывность самой функции $\phi(x)$

$$S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1}) \quad i = 1, 2, \dots, n-2 \quad (7)$$

Непрерывность первой производной функции $\phi(x)$

$$S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1}) \quad i = 1, 2, \dots, n-2 \quad (8)$$

Непрерывность второй производной функции $\phi(x)$

$$S''_i(x_{i+1}) = S''_{i+1}(x_{i+1}) \quad i = 1, 2, \dots, n-2 \quad (9)$$

Интерполяции сплайнами

Первая производная от $S(x)$ вычисляется по формуле

$$S'_i(x) = b_i + 2c_i x + 3d_i x^2 \quad i = 1, 2, \dots, n-2$$

Вторая производная определяется формулой

$$S''_i(x) = 2c_i + 6d_i x \quad i = 1, 2, \dots, n-2$$

Интерполяции сплайнами

Мы получили $n + 3(n-2) = 4n-6$ уравнений из необходимых $4(n-1)$. Недостающие два уравнения обычно определяют, исходя из тех или иных граничных условий. Предположим, что функция $\phi(x)$ на своих границах удовлетворяет условиям

$$\phi''(x_1) = \phi''(x_n) = 0$$

тогда имеем следующую недостающую пару значений

$$\phi''(x_1) = S_1''(x_1) = 0$$

$$\phi''(x_n) = S_{n-1}''(x_n) = 0$$

Интерполяции сплайнами

Или в развернутом виде

$$\varphi''(x_1) = S_1''(x_1) = (a_1 + b_1(x_1) + c_1(x_1)^2 + d_1(x_1)^3)'' = 0$$

$$\varphi''(x_n) = S_{n-1}''(x_n) = (a_{n-1} + b_{n-1}(x_n) + c_{n-1}(x_n)^2 + d_{n-1}(x_n)^3)'' = 0$$

Вычисляя производные первого и второго порядка получим

$$\varphi''(x_1) = S_1''(x_1) = 2c_1 = 0$$

$$\varphi''(x_n) = S_{n-1}''(x_n) = 2c_{n-1}(x_n) + 6d_{n-1}(x_n) = 0$$

ИЛИ

$$\left. \begin{array}{l} c_1 = 0 \\ c_{n-1}(x_n) + 3d_{n-1}(x_n) = 0 \end{array} \right\} \quad (10)$$

Интерполяции сплайнами

Таким образом мы получили все $4(n-1)$ уравнений, которых достаточно для определения всех коэффициентов

$$a_i, b_i, c_i, d_i \quad i = 1, 2, \dots, n - 1$$

Уравнения $9 \div 13$ однозначно определяют кубический сплайн $\phi(x)$.

Пример 2.

Из эксперимента получены такие значения функции $f(x)$:

x	$x_1 = 0$	$x_2 = 1$	$x_3 = 2$	$x_4 = 3$	$x_5 = 4$
$f(x)$	$y_1 = 1$	$y_2 = 1.8$	$y_3 = 2.2$	$y_4 = 1.4$	$y_5 = 1$

Требуется представить приближенно функцию $y = f(x)$ линейным и кубическим сплайном. В данном случае $n=5$.

Интерполяция линейным сплайном

Для аппроксимации данной табличной функции линейным сплайном используем формулу (1). Определим сначала значения d_i , число которых составит величину $n-1=4$

$$d_1 = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1) = (1.8 - 1) / (1 - 0) = \frac{0.8}{1}$$

$$d_2 = (y_3 - y_2) / (x_3 - x_2) = (2.2 - 1.8) / (2 - 1) = \frac{0.4}{1}$$

$$d_3 = (y_4 - y_3) / (x_4 - x_3) = (1.4 - 2.2) / (3 - 2) = \frac{-0.8}{1}$$

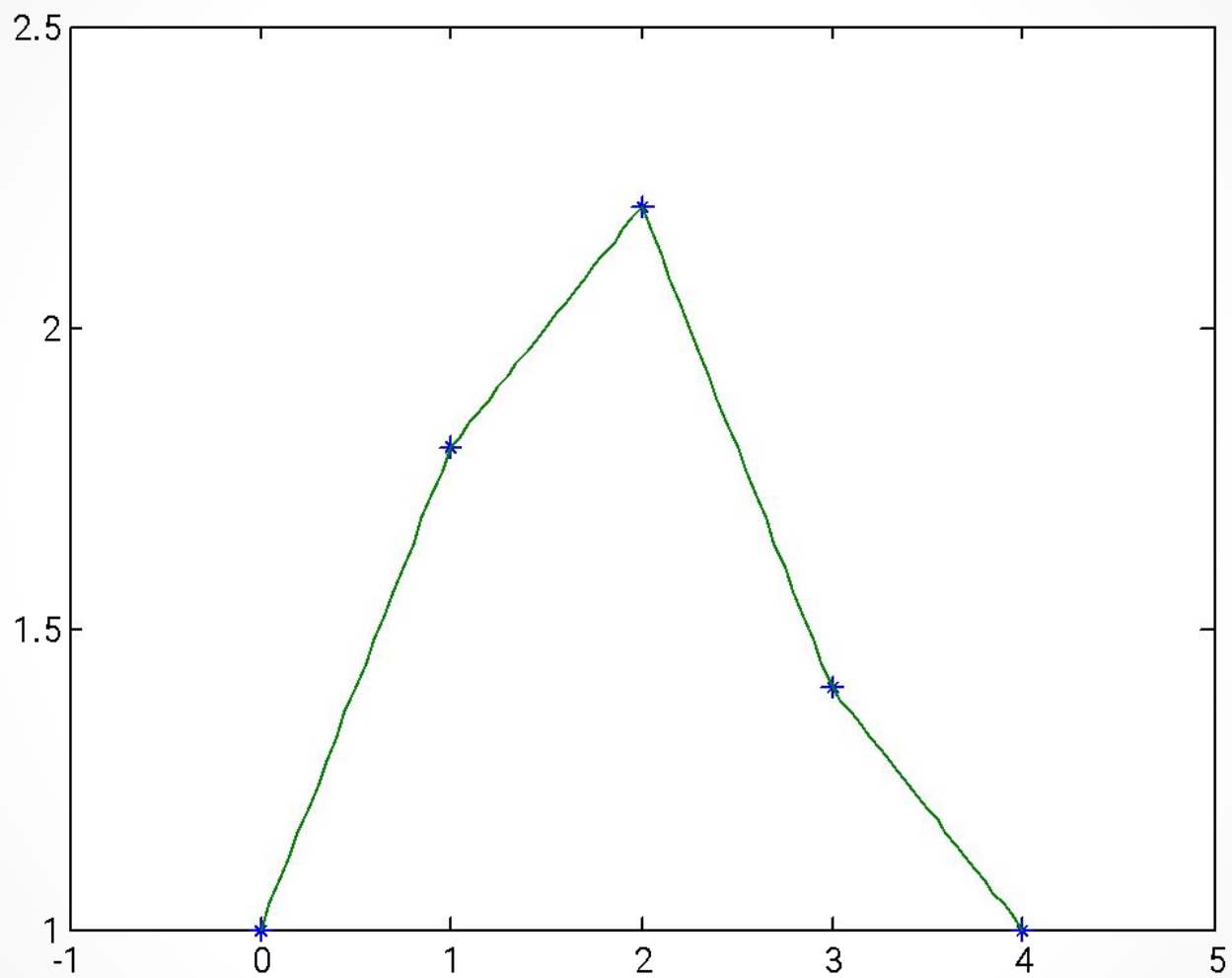
$$d_4 = (y_5 - y_4) / (x_5 - x_4) = (1 - 1.4) / (4 - 3) = \frac{-0.4}{1}$$

Подставляем значения d_i , в формулу (2)

$$\varphi(x) = \begin{cases} S_1(x) = y_1 + d_1(x - x_1) = 1 + \frac{0.8}{1}(x - 0) = 1 + 0.8x & [x_1 = 0, x_2 = 1] \\ S_2(x) = y_2 + d_2(x - x_2) = 1.8 + \frac{0.4}{1}(x - 1) = 1.4 + 0.4x & [x_2 = 1, x_3 = 2] \\ S_3(x) = y_3 + d_3(x - x_3) = 2.2 + \frac{-0.8}{1}(x - 2) = 3.8 + 0.8x & [x_3 = 2, x_4 = 3] \\ S_4(x) = y_4 + d_4(x - x_4) = 1.4 + \frac{-0.4}{1}(x - 3) = 2.6 - 0.4x & \text{для } x \in [x_4 = 3, x_5 = 4] \end{cases}$$

Построим график этой функции...

График линейного сплайна.



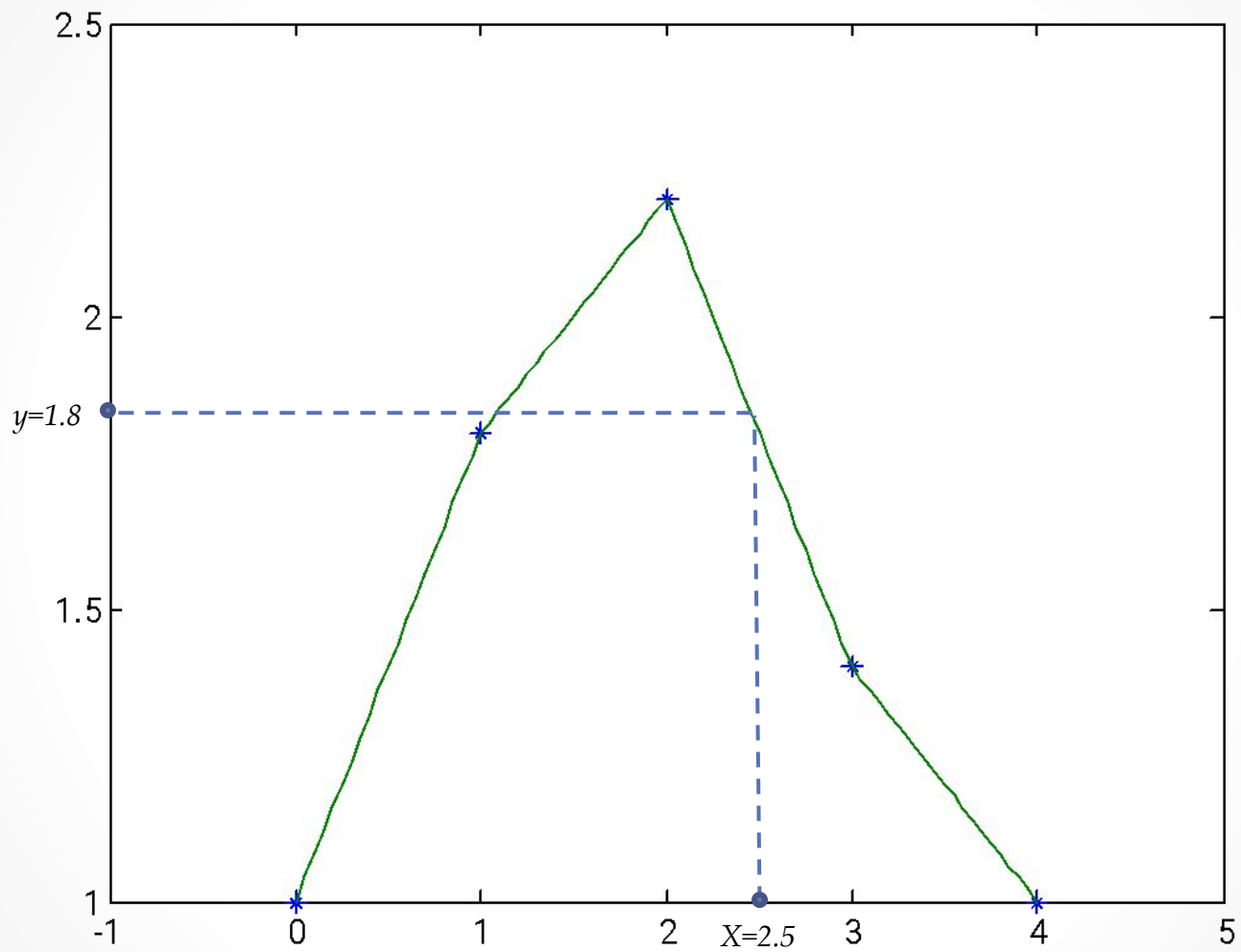
Определим значение функции $\phi(x)$ при $x=2.5$. Для этого расчета принимаем сплайн номер три, для отрезка $x=2\div 3$.

$$S_3(x) \approx 3.8 - 0.8x \quad x \in [x_3 = 2, x_4 = 3]$$

Подставляем $x=2.5$ и получаем

$$S_3(x) = 3.8 - 0.8 * 2.5 = 3.8 - 2 = 1.8$$

График линейного сплайна.



Интерполяция кубическим сплайном

Для интерполяции кубическим сплайном требуется составить систему, состоящую из $4(n-1)=4(5-1)=16$ уравнений с 16 неизвестными коэффициентами

В матричной форме эта система будет выглядеть следующим образом

$$W * X = Z$$

где W – квадратная матрица, состоящая из коэффициентов при неизвестных параметрах системы, в нашем случае имеет размер 16×16 ;

X – вектор неизвестных параметров системы, в нашем случае состоит из 16 значений неизвестных

$$a_i, b_i, c_i, d_i \quad i = 1, 2, \dots, n - 1$$

Z – вектор правых частей уравнений системы, состоит также из 16 значений.

Неизвестные параметры системы будут определяться как

$$X = \frac{Z}{W}$$

Для вычислений сначала составим матрицу W и вектор Z .

Для этого заполним строки следующей таблицы...

Таблица коэффициентов при неизвестных параметрах системы и значений правых частей системы.

	a1	a2	a3	a4	b1	b2	b3	b4	c1	c2	c3	c4	d1	d2	d3	d4		
1																		
2																		
3																		
4																		
5																		
6																		
7																		
8																		
9																		
10																		
11																		
12																		
13																		
14																		
15																		
16																		

Область, определяющая вектор Z
правых частей уравнений

Система уравнений для интерполяции кубическим сплайном, состоящая из $4(n-1)=4(5-1)=16$ уравнений с 12 неизвестными коэффициентами составляется поэтапно

Сначала составим 5 уравнений согласно формуле (5)

$$\left. \begin{aligned} S_1(x_1) = S_1(0) &= a_1 + b_1 0 + c_1 0 + d_1 0 = 1.0 \\ S_2(x_2) = S_2(1) &= a_2 + b_2 1 + c_2 1 + d_2 1 = 1.8 \\ S_3(x_3) = S_3(2) &= a_3 + b_3 2 + c_3 4 + d_3 8 = 2.2 \\ S_4(x_4) = S_4(3) &= a_4 + b_4 3 + c_4 9 + d_4 27 = 1.4 \\ S_4(x_5) = S_4(4) &= a_4 + b_4 4 + c_4 16 + d_4 64 = 1.0 \end{aligned} \right\}$$

На основании этих уравнений заполняются первые пять строк матрицы...

Составим еще $n-2=5-2=3$ уравнений согласно формуле (7), которые обеспечивают соблюдение условия непрерывности функции

$$\left. \begin{aligned} S_1(x_2) &= S_2(x_2) & S_1(1) &= S_2(1) \\ S_2(x_3) &= S_3(x_3) & S_2(2) &= S_3(2) \\ S_3(x_4) &= S_4(x_4) & S_3(3) &= S_4(3) \end{aligned} \right\}$$

Составляя уравнения и производя определенные преобразования, получаем

$$\left. \begin{aligned} a_1 - a_2 + b_1 - b_2 + c_1 - c_2 + d_1 - d_2 &= 0 \\ a_2 - a_3 + 2b_2 - 2b_3 + 4c_2 - 4c_3 + 8d_2 - 8d_3 &= 0 \\ a_3 - a_4 + 3b_3 - 3b_4 + 9c_3 - 9c_4 + 27d_3 - 27d_4 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

На основании этих уравнений заполняются 6, 7 и 8 строки матрицы...

Составим еще $n-2=5-2=3$ уравнений согласно формуле (8), которые обеспечивают соблюдение условия непрерывности 1-й производной функции

$$\left. \begin{aligned} S_1'(x_2) &= S_2'(x_2) & S_1'(1) &= S_2'(1) \\ S_2'(x_3) &= S_3'(x_3) & S_2'(2) &= S_3'(2) \\ S_3'(x_4) &= S_4'(x_4) & S_3'(3) &= S_4'(3) \end{aligned} \right\}$$

Также составляя уравнения и производя над ними определенные преобразования, получаем

$$\left. \begin{aligned} b_1 - b_2 + 2c_1 - 2c_2 + 3d_1 - 3d_2 &= 0 \\ b_2 - b_3 + 4c_2 - 4c_3 + 12d_2 - 12d_3 &= 0 \\ b_3 - b_4 + 6c_3 - 6c_4 + 27d_3 - 27d_4 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

На основании этих уравнений заполняются 9, 10 и 11 строки матрицы...

Составим еще $n-2=5-2=3$ уравнений согласно формуле (9), которые обеспечивают соблюдение условия непрерывности 2-й производной функции

$$\left. \begin{aligned} S_1''(x_2) &= S_2''(x_2) & S_1''(1) &= S_2''(1) \\ S_2''(x_3) &= S_3''(x_3) & S_2''(2) &= S_3''(2) \\ S_3''(x_4) &= S_4''(x_4) & S_3''(3) &= S_4''(3) \end{aligned} \right\}$$

Также составляя уравнения и производя над ними определенные преобразования, получаем

$$\left. \begin{aligned} 2c_1 - 2c_2 + 6d_1 - 6d_2 &= 0 \\ 2c_2 - 2c_3 + 12d_2 - 12d_3 &= 0 \\ 2c_3 - 2c_4 + 18d_3 - 18d_4 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

На основании этих уравнений заполняются 12, 13 и 14 строки матрицы...

Составляем последние 2 уравнения по формуле (10), которые обеспечивают соблюдение условия нулевой кривизны функции на ее концах в точках 1 и n , что соответствует отпущенным концам линейки

$$\left. \begin{array}{l} c_1 = 0 \\ c_4 + 12d_4 = 0 \end{array} \right\}$$

На основании этих уравнений заполняются последние 15 и 16 строки матрицы...

	a1	a2	a3	a4	b1	b2	b3	b4	c1	c2	c3	c4	d1	d2	d3	d4	
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1.8
3	0	0	1	0	0	0	2	0	0	0	4	0	0	0	8	0	2.2
4	0	0	0	1	0	0	0	3	0	0	0	9	0	0	0	27	1.4
5	0	0	0	1	0	0	0	4	0	0	0	16	0	0	0	64	1
6	1	-1	0	0	1	-1	0	0	1	-1	0	0	1	-1	0	0	0
7	0	1	-1	0	0	2	-2	0	0	4	-4	0	0	8	-8	0	0
8	0	0	1	-1	0	0	3	-3	0	0	9	-9	0	0	27	-27	0
9	0	0	0	0	1	-1	0	0	2	-2	0	0	3	-3	0	0	0
10	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	4	-4	0	0	12	-12	0	0
11	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	6	-6	0	0	27	-27	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-2	0	0	6	-6	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-2	0	0	12	-12	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-2	0	0	18	-18	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	12	0

Решаем эту систему уравнений любым из известных способов и получаем следующие неизвестные коэффициенты

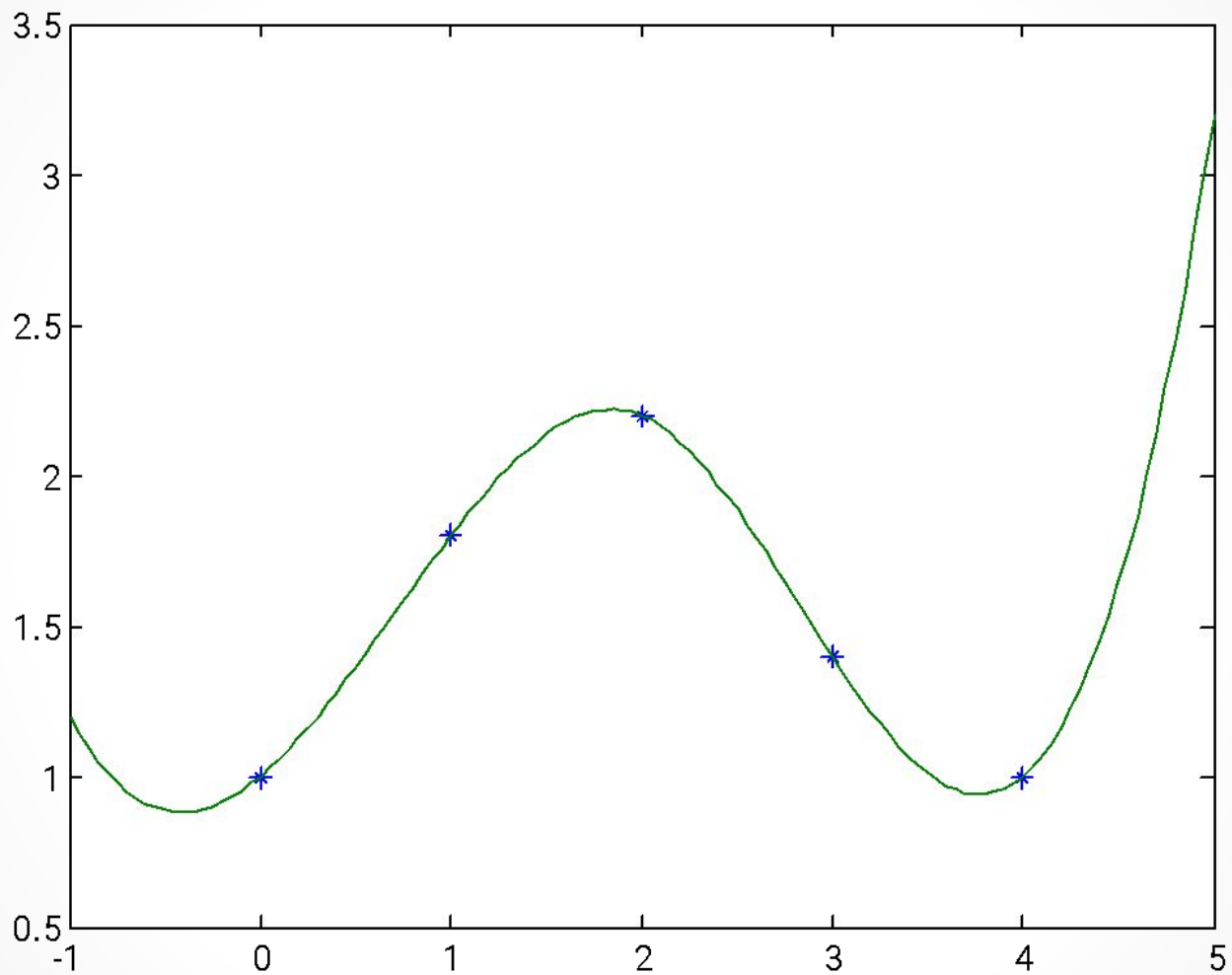
$a_1 = 1$	$b_1 = 0.8143$	$c_1 = 0$	$d_1 = -0.0143$
$a_2 = 1.3143$	$b_2 = -0.1286$	$c_2 = 0.9429$	$d_2 = -0.3286$
$a_3 = -5.5429$	$b_3 = 10.1571$	$c_3 = -4.2$	$d_3 = 0.5286$
$a_4 = 13.7429$	$b_4 = -9.1286$	$c_4 = 2.2286$	$d_4 = -0.1857$

В итоге формула (5) принимает вид

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 + 0.8143(x) & [x_1 = 0, x_2 = 1] \\ 1.3143 - 0.1286(x)^2 - 0.3286(x)^3 & [x_2 = 1, x_3 = 2] \\ -5.5429 + 10.1571(x)^2 + 0.5286(x)^3 & [x_3 = 2, x_4 = 3] \\ 13.7429 - 9.1286(x)^2 - 0.1857(x)^3 & [x_4 = 3, x_5 = 4] \end{cases}$$

Построим график этой функции...

График кубического сплайна.



Определим значение функции $\phi(x)$ при $x=2.5$. Для этого расчета принимаем сплайн номер три, для отрезка $x=2\div 3$.

$$S_3(x) = -5.5429 + 10.1571(x) - 4.2(x)^2 + 0.5286(x)^3 \quad [x_3 = 2, x_4 = 3]$$

Подставляем $x=2.5$ и получаем

$$S_3(x) = -5.5429 + 10.1571(2.5) - 4.2(2.5)^2 + 0.5286(2.5)^3 = 1.859$$

График кубического сплайна.

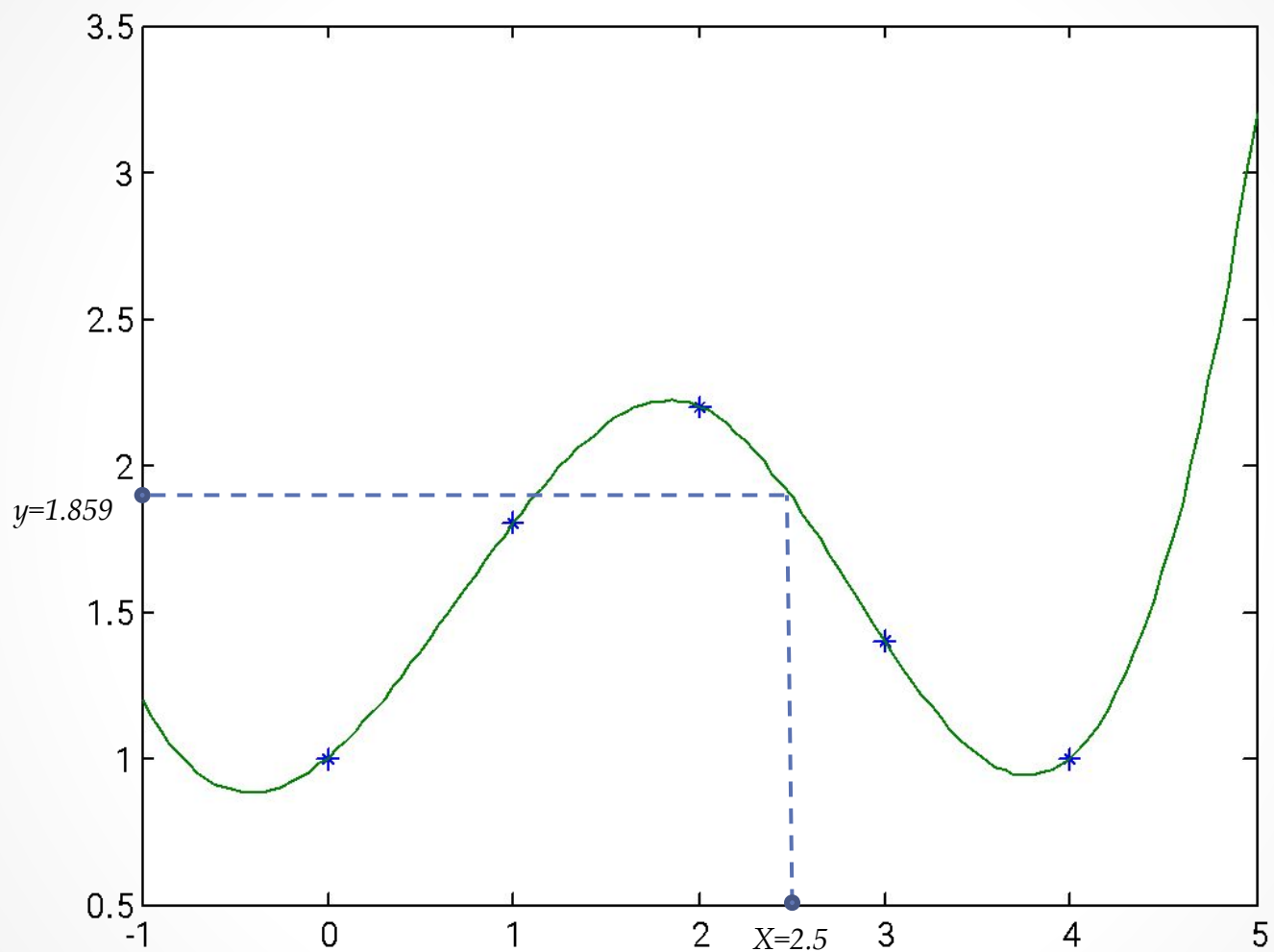


График линейного и кубического сплайна.

