Funktsiooni uurimine

Koostas: E. Reila

1. Määramispiirkond *X*

Funktsiooni määramispiirkond *X* on sõltumatu muutuja ehk argumendi *x* väärtuste hulk

NB!

Määramispiirkonda ei kuulu näiteks

- Nimetajate nullkohad
- Paarisarvulise juure all oleva avaldise negatiivsuspiirkonda kuuluvad argumendi väärtused
- Logaritmitavate negatiivsuspiirkonnad ja nullkohad

2. Muutumispiirkond *Y*

Funktsiooni muutumispiirkond *Y* on sõltuva muutuja väärtuste ehk funktsiooni väärtuste *y* hulk

Funktsiooni muutumispiirkonda saab leida funktsiooni pöördfunktsiooni abil.

Funktsiooni muutumispiirkonnaks on selle funktsiooni pöördfunktsiooni määramispiirkond.

3. Nullkohtade hulk X_0

Argumendi väärtusi, mille korral funktsiooni väärus võrdub nulliga, nimetatakse funktsiooni nullkohtadeks.

Selleks, et teha kindlaks funktsiooni nullkohtade hulk X_0, tuleb

1) lahendada võrrand: $f(x)=0$
2) kirjutada välja nullkohtade hulk X_0, mis koosneb kõikidest nullkohtadest

4. Funktsiooni positiivsuspiirkond X^+ ja negatiivsuspiirkond X^-

Funktsiooni positiivs(negatiivsus)uspiirkonna moodustavad need argumendi väärtused, mille korral funktsiooni väärus on positiivne (negatiivne).

Selleks, et leida funktsiooni positiivsuspiirkond X^+, tuleb lahendada võrratus: $f(x)>0$

Selleks, et leida funktsiooni negatiivsuspiirkond X^-, tuleb lahendada võrratus: $f(x)<0$

NB!

Positiivsus- ja negatiivsuspiirkonda on lihtsam leida uurides *funktsiooni väärtuse* märki *arvkiirel* !

5. Funktsiooni ekstreemumkohtade hulk X_e

Funktsiooni ekstreemumkohtadeks nimetatakse funktsiooni maksimum- ja miinimumkohti.

Selleks, et leida funktsiooni ekstreemumkohti, tuleb

1) lahendada võrrand: $f\,'(x)=0$

2) leida argumendi väärtused, mille korral funktsiooni tuletis puudub

3) Uurida saadud kohtade ümbruses funktsiooni tuletise märki

Kohal x_0 on funktsioonil

- maksimum, kui funktsiooni kasvamine läheb üle kahanemiseks
- miinimum, kui funktsiooni kahanemine läheb üle kasvamiseks.
- ekstreemum puudub, kui funktsiooni tuletis antud kohal märki ei muuda

NB! Ekstreemumi liiki saab uurida ka teise tuletise abil

- Kui $f\,'(x)=0$ ja $f\,''(x0)<0$, siis on x_0 $y=f(x)$ maksimumkoht
- Kui $f\,'(x)=0$ ja $f\,''(x0)>0$, siis on x_0 $y=f(x)$ miimimumkoht

6. Funktsiooni kasvamisvhemikud $X\uparrow$ ja kahanemisvahemikud $X\downarrow$

Funktsiooni nimetatakse vahemikus]a; b[kasvavaks (kahanevaks), kui $f\,'(x)>0$ ($f\,'(x)<0$) selles vahemikus

Kui funktsiooni tuletis mingi x_0 korral puudub, siis tuleb uurida funktsiooni tuletise märki ka selle koha ümbruses

Selleks, et teha leida funktsiooni kasvamisvahemikud $X\uparrow$, tuleb lahendada võrratus: $f\,'(x)>0$

Selleks, et teha leida funktsiooni kahanemisvahemikud $X\downarrow$, tuleb lahendada võrratus: $f\,'(x)<0$

NB!

Kasvamis- ja kahanemisvahemikke on lihtsam leida uurides funktsiooni tuletise märki arvkiirelt!

8.* Funktsiooni graafiku kumerusvahemikud $\overset{\frown}{X}$ ja nõgususvahemikud $\overset{\smile}{X}$

Funktsiooni *y=f(x)* graafikut nimetatakse kumeraks (nõgusaks) vahemikus]a;b[, kui ükski tema punkt selles vahemikus ei ole kõrgemal (allpool) ühestki tema puutujast selles vahemikus

Selleks, et leida funktsiooni kumerusvahemikud $\overset{\frown}{X}$, tuleb lahendada võrratus: $f''(x)<0$

Selleks, et leida funktsiooni nõgususvahemikud $\overset{\smile}{X}$, tuleb lahendada võrratus: $f''(x)>0$

Lisaks kuuluvad vastavasse kumerus- või nõgususvahemikku ka kohad, kus

$f''(x)=0$ ja teine tuletis ei muuda märki.

NB!

Kumerus- ja nõgususvahemikke on lihtsam leida uurides *funktsiooni teise tuletise* märki *arvkiirel*!

7.* Funktsiooni graafiku käänupunktide hulk X_k

Funktsiooni käänupunktiks nimetatakse punkti, millest funktsiooni graafiku läbiminekul muutub kumerus nõgususeks või vastupidi.

Selleks, et leida funktsiooni käänukohti, tuleb

1) lahendada võrrand: $f''(x)=0$

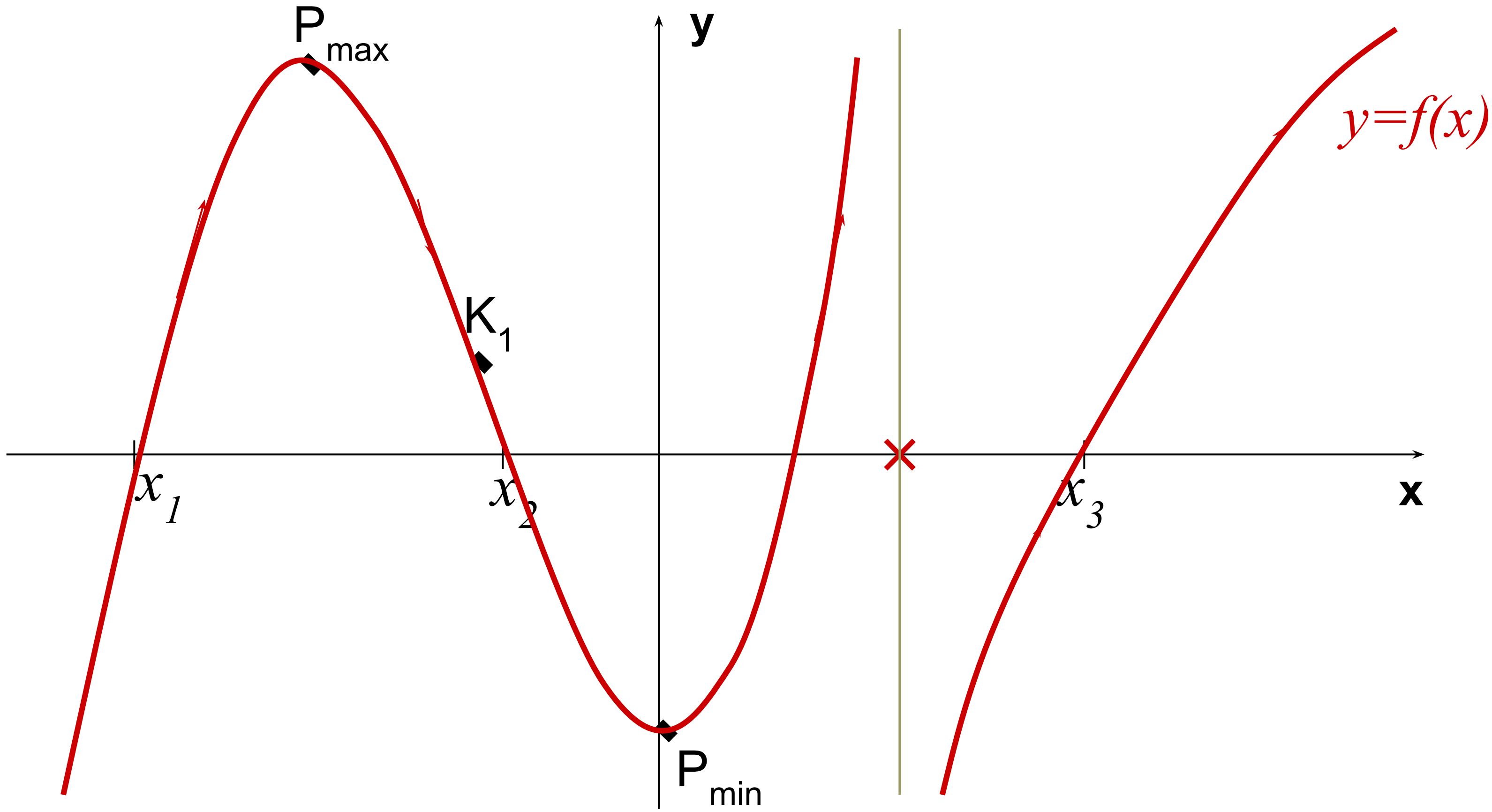
2) leida argumendi väärtused, mille korral funktsiooni teine tuletis puudub

3) Uurida saadud kohtade ümbruses funktsiooni teise tuletise märki

Kohal x_0 on funktsioonil

- käänukoht, kui funktsiooni teine tuletis muudab märki.
- Kui funktsiooni teine tuletis antud kohal märki ei muuda, siis sellel kohal käänukoht puudub.

9. Funktsiooni graafiku skitseerimine



Funktsiooni uurimise kokkuvõte:

Selleks, et uurida funktsiooni, tuleb leida selle funktsiooni:

- 1. Määramispiirkond X
- 2. Muutumispiirkond Y
- 3. Nullkohtade hulk X_0 : $f(x)=0$
- 4. Funktsiooni positiivsuspiirkond X^+ : $f(x)>0$
  Funktsiooni negatiivsuspiirkond X^-: $f(x)<0$
- 5. Funktsiooni ekstreemumkohtade hulk X_e: $f\,'(x)=0$
  funktsiooni ekstreemumpunktid $P_e(x_e;y_e)$
- 6. Funktsiooni kasvamisvhemikud $X\uparrow$: $f\,'(x)>0$
  Funktsiooni kahanemisvahemikud $X\downarrow$: $f\,'(x)<0$
- 7.* Funktsiooni graafiku käänukohtade hulk X_k: $f\,''(x)=0$
  funktsiooni käänupunktid $K(x_k;y_k)$
- 8.* Funktsiooni kumerusvahemikud $\overset{\frown}{X}$: $f\,''(x)<0$
  Funktsiooni nõgususvahemikud $\overset{\smile}{X}$: $f\,''(x)>0$
- 9. Skitseerida funktsiooni graafik

Näide

Uuri funktsiooni $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ ja skitseeri funktsiooni graafik

- 1. Määramispiirkond $X=R$
- 2. Muutumispiirkond $Y=R$
- 3. Nullkohtade hulk $\boxed{X_0 : f(x)=0}$

$$x(x^2-6x+8)=0 \quad ehk \quad x(x-2)(x-4)=0$$

$$x_1=0; \; x_2=2; \; x_3=4$$

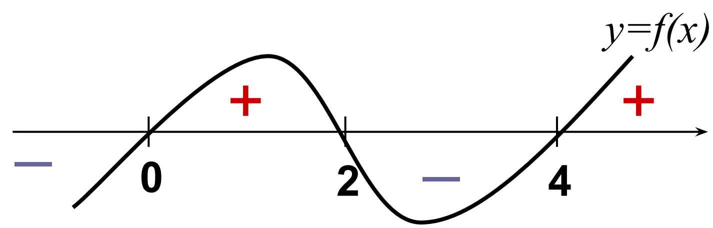
$$X_0=\{0; 2; 4\}$$

- 4. Funktsiooni positiivsus- X^+ ja negatiivsusvahemikud X^-

$$\boxed{X^+ : \; f(x)>0; \quad X^- : \; f(x)<0}$$

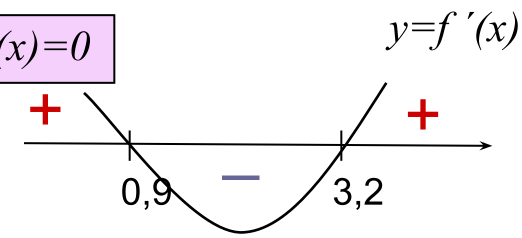
$$X^+ =]0; 2[\; U \;]4; \infty[$$

$$X^- =]-\infty; 0[U]2; 4[$$



- 5. Funktsiooni ekstreemumkohtade hulk X_e

X_e: $f'(x)=0$



$f'(x)=3x^2-12x+8$

$3x^2-12x+8=0 \quad x_{1,2}=\dfrac{12\pm\sqrt{144-96}}{6}\approx\dfrac{12\pm 6{,}9}{6}$

$x_1\approx 0{,}9;\quad x_2\approx 3{,}2$

$y_1=0{,}9^3 - 6\cdot 0{,}9^2 + 8\cdot 3{,}2 \approx 3{,}1; \quad y_2=3{,}2^3 - 6\cdot 3{,}2^2 + 8\cdot 3{,}2 \approx -3{,}1$

$X_e=\{0{,}9;\ 3{,}2\};\ P_{max}(0{,}9;3{,}1);\ P_{min}(3{,}2;-3{,}1)$

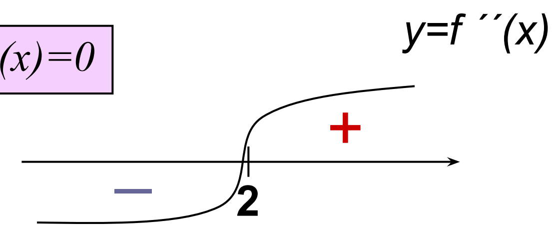
- 6. Funktsiooni kasvamisvhemikud $X\uparrow$ ja kahanemisvahemikud $X\downarrow$

$X\uparrow$: $f'(x)>0$; $X\downarrow$: $f'(x)<0$

$X\uparrow =]-\infty;0{,}9[\ U\ ]3{,}2;\infty[; \quad X\downarrow =]0{,}9;3{,}2[$

- 7. Funktsiooni graafiku käänukohtade hulk X_k

X_k: $f''(x)=0$



$f''(x)=6x-12 \quad 6x-12=0$

$x_k=2$

$y_k=2^3 - 6\cdot 2^2 + 8\cdot 2 = 0$

$X_k=\{2\};\ K(2;0)$

8. Funktsiooni kumerusvahemikud $\overset{\frown}{X}$ ja nõgusus vahemikud $\overset{\smile}{X}$

$\overset{\frown}{X}$: $f''(x)<0$; $\overset{\smile}{X}$ $f''(x)<0$

$\overset{\frown}{X}=]-\infty;2[; \quad \overset{\smile}{X}=]2;\infty[$

9. Funktsiooni graafiku skitseerimine