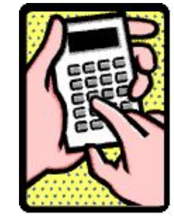
Комбинаторика

Определение множества

- Множество есть совокупность объединенных по некоторым признакам различных объектов, называемых элементами множества.



Как мы знаем, в каждой комбинаторной задаче требуется дать ответ на один и тот же вопрос: сколько различных комбинаций подчиняющихся тем или иным условиям, можно составить из заданного множества объектов.

Вместо слова «комбинация» используется слово

«расстановка».

Термин «расстановка» представляется предпочтительнее термина «комбинация»,поскольку в нем содержаться указания на то, как именно получается та или иная комбинация: нужно расположить, расставить в определенном порядке некоторые из данных объектов.

Но чтобы расставить объекты, их надо предварительно выбрать из данного множества, руководствуясь некоторыми правилами. Поэтому многие комбинаторные задачи естественным образом укладываются в следующую <u>схему выбора</u>.

Имеется некоторое конечное множество, содержащее **n** различных объектов. Из него последовательно выбирается **к** объектов, при этом выбранный объект может быть как возвращен в множество (и следовательно, выбран повторно; тогда говорят о выборе с возвращением, этот способ выбора приводит к <u>расстановкам с повторениями</u>), так и не возвращен (тогда говорят о выборе без возвращения, при таком выборе получаются <u>расстановки без повторения).</u>

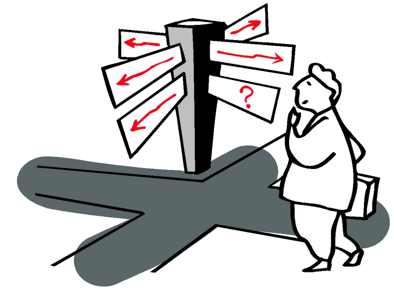
При этом по смыслу задачи нас могут интересовать порядок объектов, или, как мы будем говорить, элементов в выборке, а может и не интересовать.

В первом случаи говорят об упорядоченных выборках, во втором - о неупорядоченных выборках.

По данной классификации приведите примеры ранее изученных задач.

- Расстановки с повторениями:

задача о замке, задача о поваре,
о пловцах.



- Расстановки без повторения:

выбор в цветочном городе, экзаменационная комиссия, турнир по футболу.

- Упорядоченные выборки:

задача о замке, выбор в цветочном городе,
о пловцах.

- Неупорядоченные выборки:

задача о поваре, экзаменационная комиссия.

Размещения без повторений.

*Имеется **n** различных элементов. Сколько из них можно составить **к** расстановок?*

При этом две расстановки считаются различными, если они отличаются друг от друга хотя бы одним элементом, либо состоят из одних и тех же элементов, но расположенных в разном порядке.

Такие расстановки называют размещения без повторений, а их число обозначают A_n^k (читается «а из n по к»; А-первая буква французского слова Arrangement, что означает приведение в порядок).

Справедлива формула:

$$A_n^k=n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$$

Задачи

1. В первой группе класса «А» первенства по футболу участвуют 17 команд. Разыгрываются медали: золотые, серебряные, бронзовые. Сколькими способами они могут быть распределены? (решение)
2. Научное общество состоит из 25 человек. Надо выбрать президента общества, вице-президента, ученого секретаря, казначея. Сколькими способами может быть сделан этот выбор, если каждый член общества может занимать лишь один пост? (решение)
3. Расписание одного дня содержит пять уроков. Определить количество таких расписаний при выборе из одиннадцати дисциплин? (решение)

Перестановки

При составлении размещений без повторений из **n** элементов по **к** мы получили расстановки, отличающиеся друг от друга и составом, и порядком элементов. Но если брать расстановки, в которые входят все **n** элементов, то они могут отличаться друг то друга лишь порядком входящих в них элементов. Такие расстановки называют перестановками из **n** элементов, или, короче, **n-**перестановками. Обозначается Р (Р-первая буква французского слова Permutation- «перестановка»).

$$P_n = A_n^n = n(n-1)\ldots2*1=n!$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Задачи

1. Семь девушек стоят в круге. Сколькими различными способами они могут встать в круг? (решение)
2. Семь девушек водят хоровод. Сколькими различными способами они могут встать в круг? (решение)
3. Сосчитать сколько ожерелий можно составить из 7 различных бусинок? (решение)

Перестановки с повторениями

До сих пор мы переставляли предметы, которые были попарно различны. Если же некоторые переставляемые предметы одинаковы, то получается меньше перестановок- некоторые перестановки совпадут друг с другом.

Например переставляя буквы в слове «март», мы получим Р =4!=4*3*2*1=24 перестановки. А если взять слово «мама» **стр 38**

Задачи

1.Сколько перестановок можно сделать из букв слова «Миссисипи»? решение

2. Сколько перестановок можно сделать из букв слова «задача»? решение

3. Сколько перестановок можно сделать из букв слова «математика»? решение

Сочетания

Всякая неупорядоченная выборка объема **к** из множества, состоящего из **n** различных объектов, полученная в схеме выбора без возвращений, называется сочетанием из **n** элементов по **к.**

Таким образом, сочетания различаются составом входящих в них объектов, но непорядком этих объектов. Из определения выбора без возвращений следует, что к удовлетворяет неравенствам 0 к n.

Обозначают С (читается: «це из **n** по **к**»; С-первая буква французского слова Combinasion-«сочетания»). Вычисляют по формуле

$$C = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Задачи

1. В полуфинале по шахматам участвуют 20 человек, а в финал выходят только трое. Сосчитать число различных исходов полуфинала. (решение)
2. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску 8 ладей? (решение)
3. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску 8 ладей так, чтобы они не могли бить друг друга? (решение)
4. В кондитерском магазине продавались 4 сорта пирожных: наполеоны, эклеры, песочные и слоеные. Сколькими способами можно купить 7 пирожных? (решение)

Решение

$$C = \frac{20!}{3! \cdot 17!} = 1140$$

$$C = \frac{64!}{8! \cdot 56!} = 4328284968$$

$P \quad = 8! = 40320$

$$C = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = 120$$

Решение

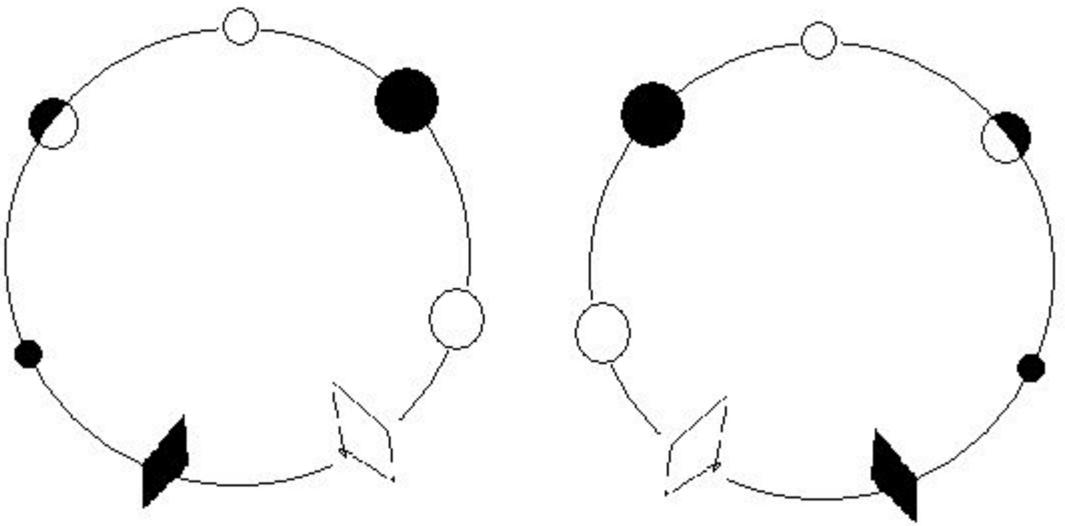
$P(4,3,1,1)=9!:(4!*3!*1!*1!)=2520$

Решение

P(3,1,1,1)=6!:(3!*1!*1!*1!)=120

Решение

$P(3,2,2,1,1,1)=10!(3!*2!*2!)=151200$



Решение

A =17*16*15=4080

Решение

A =25*24*23*22=303600

Решение

A =11*10*9*8*7=55440

Решение задач

$P = 7! = 7*6*5*4*3*2*1 = 5040$

Решение

5040:7=720 (если бы они стояли на месте, то 5040 перестановок, но так как танцующие кружатся, то их положение относительно окружающих предметов не существенно, а важно лишь взаимное расположение. Поэтому перестановки, переходящие друг в друга при кружении танцовщиц надо считать одинаковыми. Но из каждой перестановки можно получить еще шесть новых путем вращения).

Решение

720:2=360 (ожерелье можно не только повернуть по кругу, но и перевернуть). *Рисунок?*