Лекция № 13

Постановка задачи фильтрации

Задача фильтрации:

$$\hat{x}(t) = \hat{S}(t) + \hat{n}(t) \tag{1.1}$$

Желаемый выход фильтра:

$$\hat{y}_0(t) = \hat{S}(t+\Delta),\ \Delta \geq 0 \tag{1.2}$$

Выходной сигнал реального фильтра:

$$\hat{y}(t) = \hat{S}_p(t+\Delta) \tag{1.3}$$

Характеристики фильтра

$$M\{\hat{\varepsilon}^2(t)\} = M\{[\hat{S}(t+\Delta) - \hat{S}_p(t+\Delta)]^2\} \tag{1.4}$$

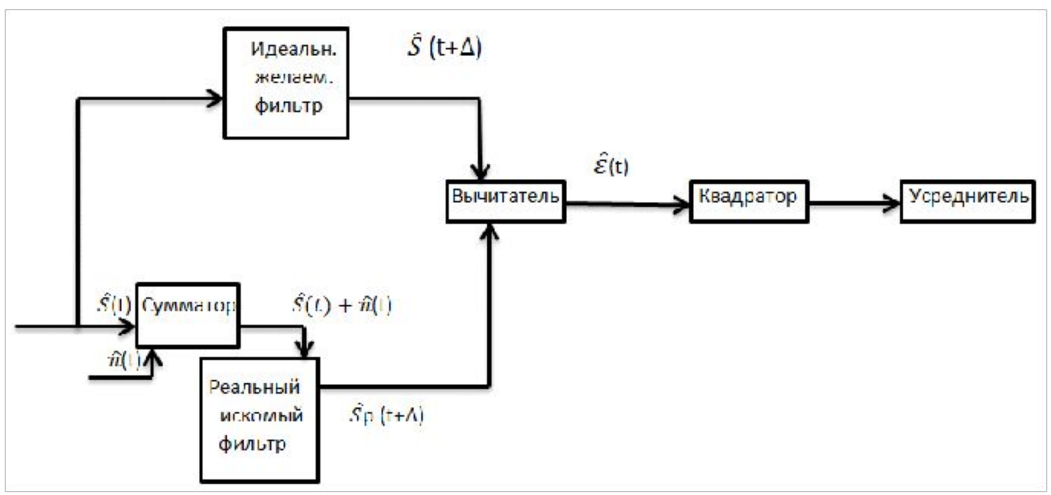

Рис. 1.1 – Схема фильтра с минимальной среднеквадратической погрешностью

Выходной сигнал реального фильтра:

$$S_p(t+\Delta)=\int_0^\infty h(\tau)\left[S(t-\tau)+\xi(t-\tau)\right]d\tau \tag{1.5}$$

Среднее значение квадрата ошибки фильтрации:

$$\varepsilon^2(t)=\left[S(t+\Delta)-S_p(t+\Delta)\right]^2=S^2(t+\Delta)-2S(t+\Delta)\times$$

$$\times\int_0^\infty h(\tau)\,x(t-\tau)\,d\tau+\int_0^\infty\int_0^\infty h(\tau)\,h(\gamma)\,x(t-\tau)\,x(t-\gamma)\,d\tau\,d\gamma \tag{1.6}$$

Усредняя левую и правую части:

$$M\left[\varepsilon^2(t)\right]=M\left[S^2(t+\Delta)\right]-2\int_0^\infty h(\tau)\,M\left[x(t-\tau)\,S(t+\Delta)\right]d\tau+$$

$$+\int_0^\infty\int_0^\infty h(\tau)\,h(\gamma)\,M\left[x(t-\tau)\,x(t-\gamma)\right]d\tau\,d\gamma \tag{1.7}$$

Поскольку сигнал и шум стационарны

$$M\left[S^2(t)\right]=M\left[S^2(t+\Delta)\right]=M\left[S^2\right]=\sigma_S^2 \tag{1.8}$$

$$M\left[x(t-\tau)\,S(t+\Delta)\right]=B_{xS}(\tau+\Delta) \tag{1.9}$$

$$M\left[x(t-\tau)\,x(t-\gamma)\right]=B_x(\gamma-\tau) \tag{1.10}$$

Среднее значение квадрата ошибки фильтрации:

$$M\left[\varepsilon^2\right]=\sigma_S^2-2\int_0^\infty h(\tau)\,B_{xS}(\tau+\Delta)\,d\tau+$$

$$+\int_0^\infty\int_0^\infty h(\tau)\,h(\gamma)\,B_x(\gamma-\tau)\,d\tau\,d\gamma \tag{1.11}$$

Среднеквадратическая ошибка фильтра с импульсной характеристикой:

$$M[\varepsilon_1^2] = \sigma_x^2 - 2\int_0^{\infty}[h_{опт}(\tau) + \lambda q(\tau)]\,B_{xs}(\tau + \Delta)\,d\tau +$$

$$+ \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}[h_{опт}(\tau) + \lambda q(\tau)][h_{опт}(\gamma) + \lambda q(\gamma)]\,B_{s}(\tau - \gamma)\,d\tau\,d\gamma \tag{1.12}$$

Минимальна среднеквадратическая ошибка:

$$Q = \int_0^{\infty} q(\tau)\,B_{xs}(\tau + \Delta)\,d\tau - \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} h_{опт}(\tau)\,q(\gamma)\,B_{s}(\tau - \gamma)\,d\tau\,d\gamma \tag{1.13}$$

$$L = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} q(\tau)\,q(\gamma)\,B_{s}(\tau - \gamma)\,d\tau\,d\gamma \tag{1.14}$$

Формулу (1.12) можно переписать так:

$$M[\varepsilon_1^2] = M[\varepsilon^2] - 2\lambda Q + \lambda^2 L \tag{1.15}$$

Условие минимума $M[\varepsilon_1^2]$ имеет вид:

$$\frac{\partial M[\varepsilon_1^2]}{\partial \lambda} = -2Q + 2L\lambda = 0 \tag{1.16}$$

Следовательно,

$$Q = \int_0^{\infty} q(\tau)\,B_{xs}(\tau + \Delta)\,d\tau - \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} h_{опт}(\gamma)\,q(\tau)\,B_{s}(\tau - \gamma)\,d\tau\,d\gamma =$$

$$= \int_0^{\infty} q(\tau)\left[\int_0^{\infty} h_{опт}(\gamma)\,B_{s}(\tau - \gamma)\,d\gamma - B_{xs}(\tau + \Delta)\right]d\tau = 0 \tag{1.17}$$

Имея в виду, что (1.17) должно выполняться при любой функции $q(\tau)$ можно записать следующее условие:

$$\int_0^{\infty} h_{опт}(\gamma)\,B_{s}(\tau - \gamma)\,d\gamma - B_{xs}(\tau + \Delta) = 0 \tag{1.18}$$

$$B_{xs}(\tau + \Delta) = \int_0^{\infty} h_{опт}(\gamma)\,B_{s}(\tau - \gamma)\,d\gamma \tag{1.19}$$

Физически реализуемый реальный фильтр:

$$h_{\text{опт}}(t) = 0 \quad \text{при} \quad t < 0 \tag{1.20}$$

Решение уравнения (1.21):

$$h_{\text{опт}}(\tau)_{\text{н}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_{\hat{s}}(\omega)}{S_{\hat{s}}(\omega) + S_{\hat{n}}(\omega)} e^{j\omega(\tau+\Delta)}\, d\omega \tag{1.21}$$

Частотная характеристика фильтра:

$$K_{\text{опт}}(j\omega)_{\text{н}} = \frac{S_{\hat{s}}(\omega)}{S_{\hat{s}}(\omega) + S_{\hat{n}}(\omega)} \tag{1.22}$$

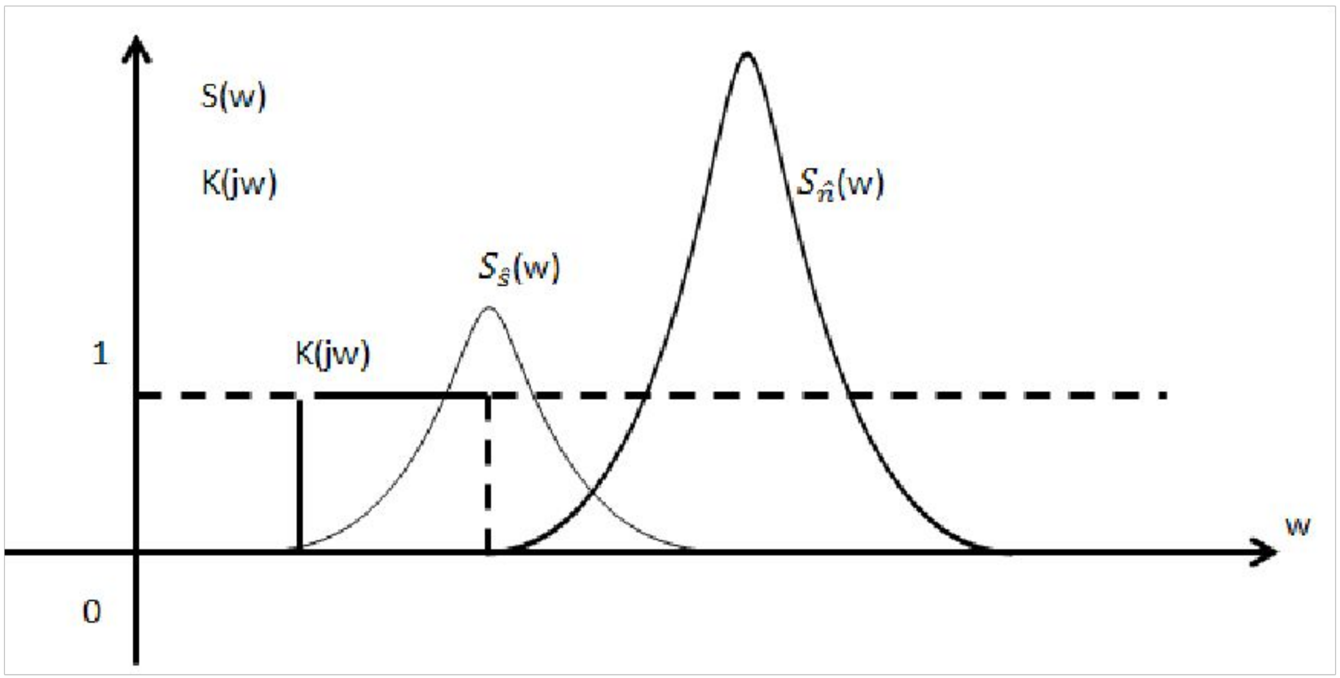

Рис. 1.2 – Характеристики оптимального фильтра

Если на импульсную характеристику фильтра $\square\square t \square$ наложено условие физической осуществимости, то она находится из уравнения:

$$\square_{опт}(\square\square)_{\square} = \frac{1}{2\square}\square_{-\infty}^{+\infty}\square\square_{опт}\square\,\square\square\square\,\square_{\square}\,\square\square^{\square\square\square}\,d\square\square \tag{1.23}$$

Где::

$$\square\square_{опт}\square\,\square\square\square\,\square_{\square} = \frac{1}{\square\square_{ф}\square\square\square\square}\,\square_{0}^{\infty}\square\frac{1}{2\square}\,\square_{-\infty}^{+\infty}\frac{\square\square\,\square\square\square}{\square\square_{ф}\square\square\square\square}\,\square\square^{\square\square\square\,\square\square+\Delta\square}\,\square\square\square\square\,\square\square^{-\square\square\square}\,dt \tag{1.24)}$$

Можно несколько упростить выражение:

$$\square\square_{опт}\square\,\square\square\square\,\square_{\square} = \frac{1}{\square\square_{ф}\square\square\square\square}\,\square\frac{\square\square\,\square\square\square}{\square\square_{ф}\square\square\square\square}\square_{+} \tag{1.25}$$