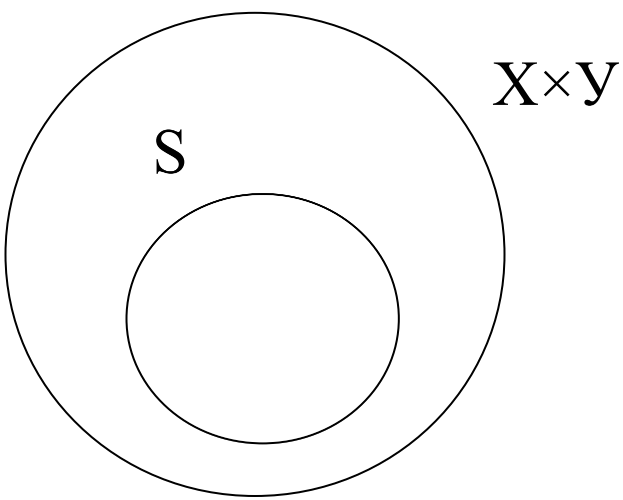
Соответствия и отношения

Янкина Л. А.,
канд.пед.наук,
доцент

Соответствия между элементами двух множеств

Соответствием между элементами множеств X и У называется всякое подмножество декартова произведения этих множеств.



Соответствия обозначаются буквами P, S, T и др.

Если S – соответствие между множествами X и У, то $S \subset X \times У$.

Способы задания соответствий между элементами множеств Х и У

1) ***Предложением с двумя переменными***:

S: «*элемент х находится в соответствии S с элементом у*», где х $\in$ Х, у $\in$ У.

xSy.

2) ***Перечислением упорядоченных пар.***

3) ***При помощи графа***

4) ***При помощи графика на координатной плоскости.***

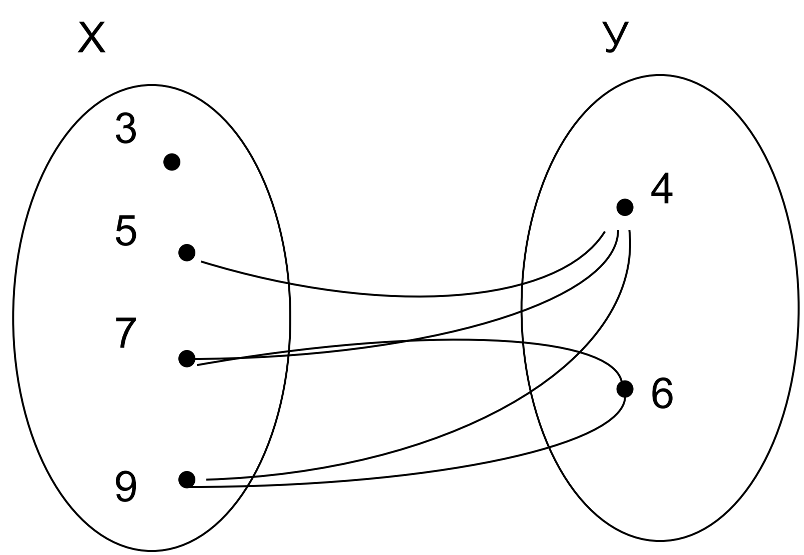
Примеры:

1. $X = \{3, 5, 7, 9\}$, $У = \{4, 6\}$, S: «больше».

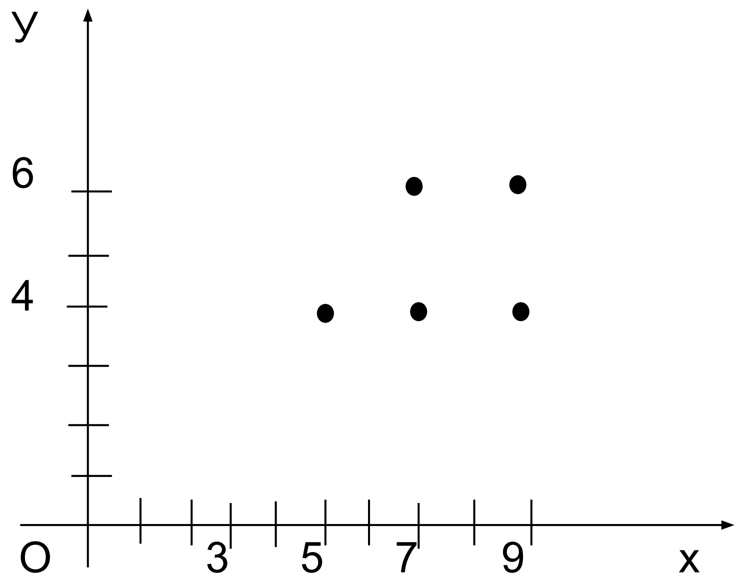
1) S: «x больше y», где $x \in X$, $y \in У$ или S: «$x > y$».

2) $S = \{(5;4), (7;4), (9;4), (7;6), (9;6)\}$.

3) При помощи графа:



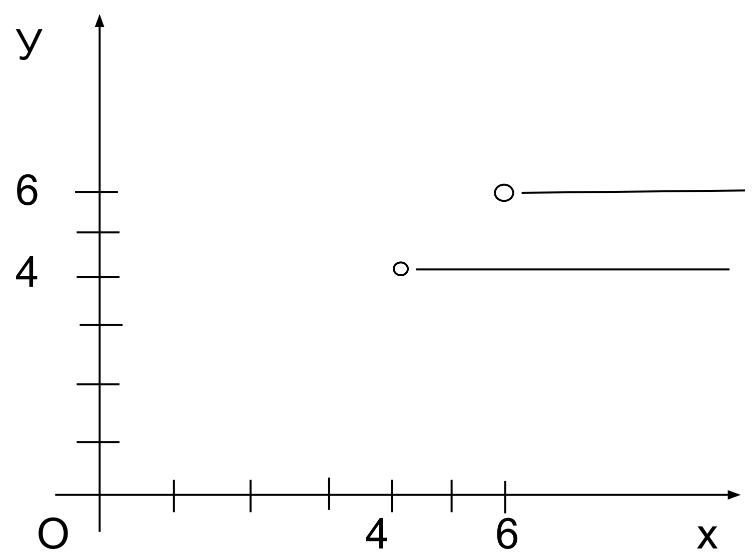
4) При помощи графика на координатной плоскости.



2. Даны множества X = **R**, У = {4, 6}, S: «больше».

1) S:«x больше y,» где $x \in$ X, $y \in$ У или S: «$x > y$».

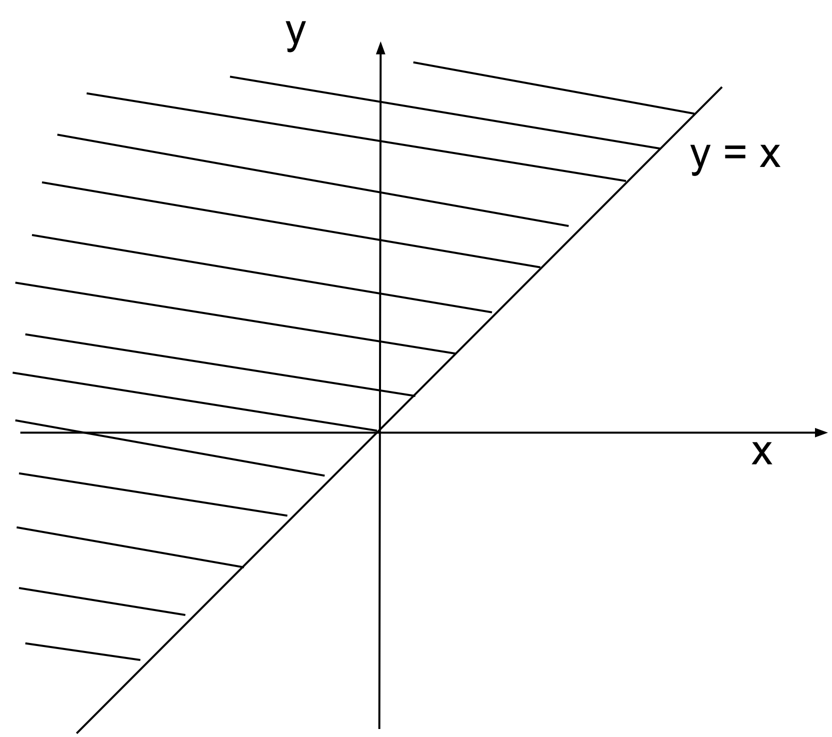
2) График данного соответствия:



3. $X = У = \mathbf{R}$, S: «меньше».

1) S: «x меньше y,» где $x \in X$, $y \in У$ или S: «$x < y$».

2) График данного соответствия:



Пусть S – соответствие между элементами множеств X и У. Соответствие S^{-1} между элементами множеств У и X называется **обратным данному**, если $yS^{-1}x$ тогда и только тогда, когда xSy. $S^{-1} \subset У \times X$.

S и S^{-1} называются **взаимно обратными.**

Пример: X = {3, 5, 7, 9}, У = {4, 6}, S: «больше».

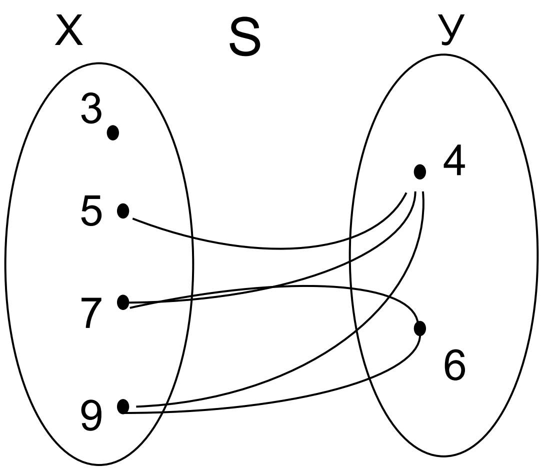
1) S: «x больше y», где $x \in X$, $y \in У$ или S: «x > y».

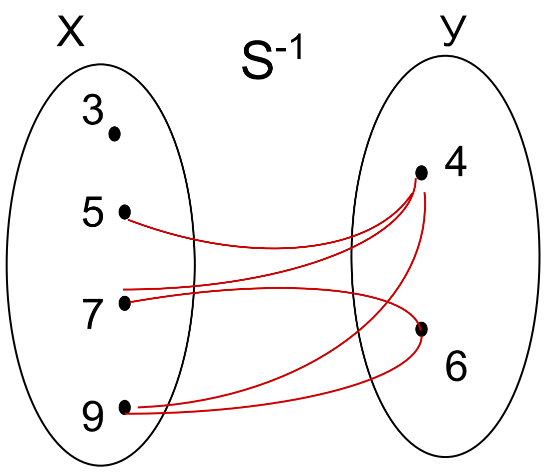
S^{-1}: «y меньше x», или S^{-1}: «y < x».

2) $S = \{(5;4), (7;4), (9;4), (7;6), (9;6)\}$.

$S^{-1} = \{(4;5), (4;7), (4;9), (6;7), (6;9)\}$.

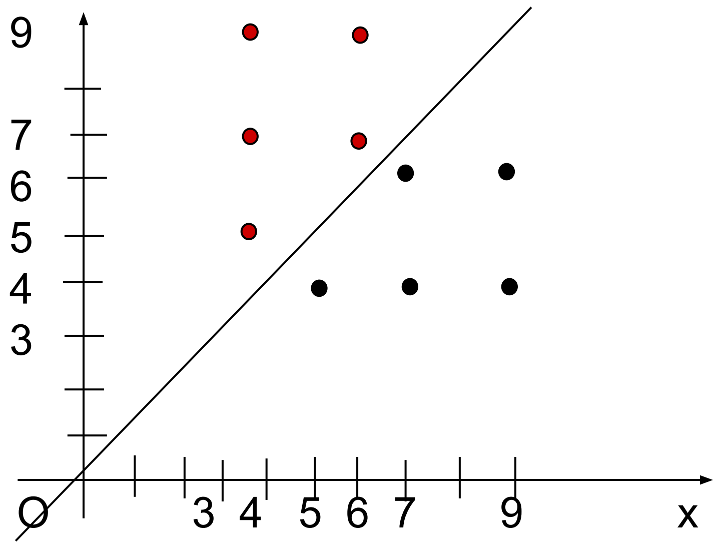
3) **Графы**





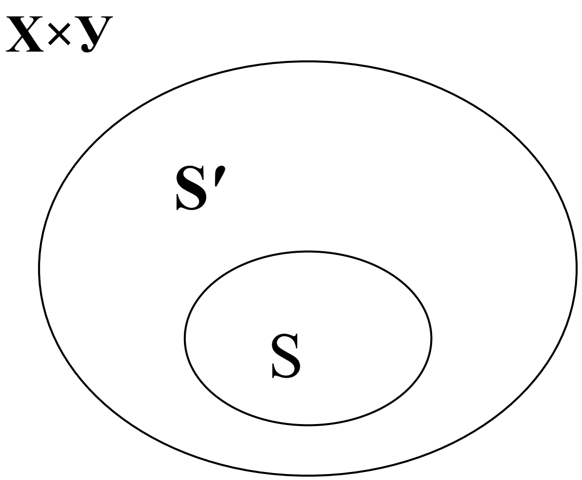
Графы взаимно обратных соответствий отличаются друг от друга *направлением стрелок*.

4) Графики:



Графики взаимно обратных соответствий симметричны относительно биссектрисы 1-го и 3-го координатных углов (прямой $y = x$).

Пусть S – соответствие между элементами множеств X и У. Соответствие S′ между элементами множеств X и У называется **противоположным данному**, если оно является дополнением множества S до множества X×У



Пример: $X = \{3, 5, 7, 9\}$, $У = \{4, 6\}$,

S: «больше» или S: «$x > y$»

$S = \{(5;4), (7;4), (9;4), (7;6), (9;6)\}$.

S′: «не больше» или S′: «$x \leq y$».

$S' = \{(3;4), (3;6), (5;6)\}$.

$X \times У = \{(3;4), (3;6), (5;4), (5;6), (7;4), (7;6), (9;4), (9;6)\}$.

Если каждому элементу множества Х ставится в соответствие единственный элемент множества У и каждый элемент множества У соответствует только одному элементу множества Х, то такое соответствие называют **взаимно однозначным соответствием** между множествами Х и У (или **взаимно однозначным отображением** Х на У).

Примеры:

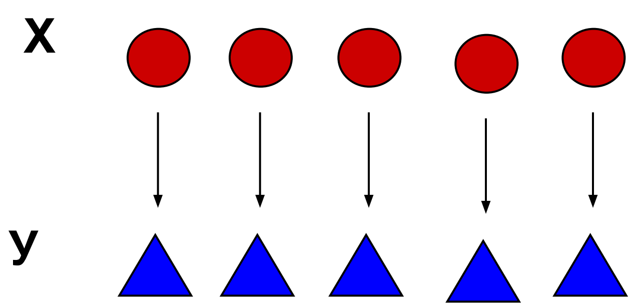
1) Х – множество углов треугольника,
 У – множество его сторон.
 Соответствие, при котором углу сопоставляется противолежащая ему сторона, будет взаимно однозначным.

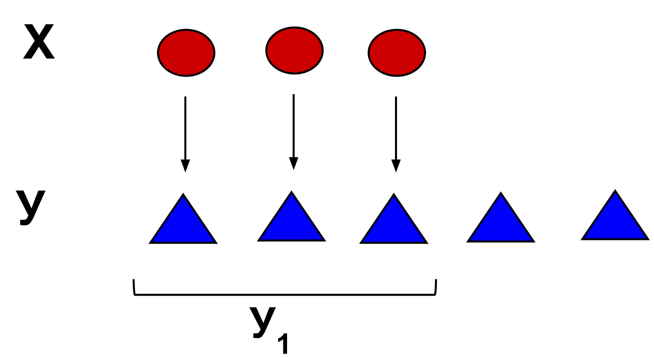
2) Х – множество действительных чисел,
 У – множество точек координатной прямой.
 Соответствие, при котором действительному числу сопоставляется точка координатной прямой - взаимно однозначное.

Если между элементами множеств Х и У можно установить взаимно однозначное соответствие, то множества Х и У называют **равномощными.** Пишут Х ~ У.

Равномощными могут быть как конечные, так и бесконечные множества. Равномощные конечные множества называют еще **равночисленными**.

В начальном обучении математике равночисленность выражается словами «***столько же***» и может использоваться при ознакомлении учащихся со многими другими понятиями. Например, при введении понятий «*равно*», «*больше на…*», «*меньше на…*».





Отношения на множестве

Бинарным отношением на множестве X называется всякое подмножество декартова произведения $X \times X$.

Отношения обозначают заглавными буквами латинского алфавита: R, S, T, P и др.

Если R – отношение на множестве X, то

$$R \subset X \times X.$$

Способы задания отношений

на множестве

1) предложением, содержащим две переменные:

«*элемент* ***x*** *находится в отношении R с элементом y*» или $x \, R \, y$,

где $x, y \in X$.

<u>Например</u>, R: «число x меньше числа y» или

R: «$x < y$»;

T: «число x в 3 раза больше числа y» или

T: «$x = 3y$».

2) ***Перечислением упорядоченных пар***, составленных из элементов множества X, находящихся в отношении R.

Пример: X = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}

R: « больше на 2» или

R: «*x* больше *y* на 2»

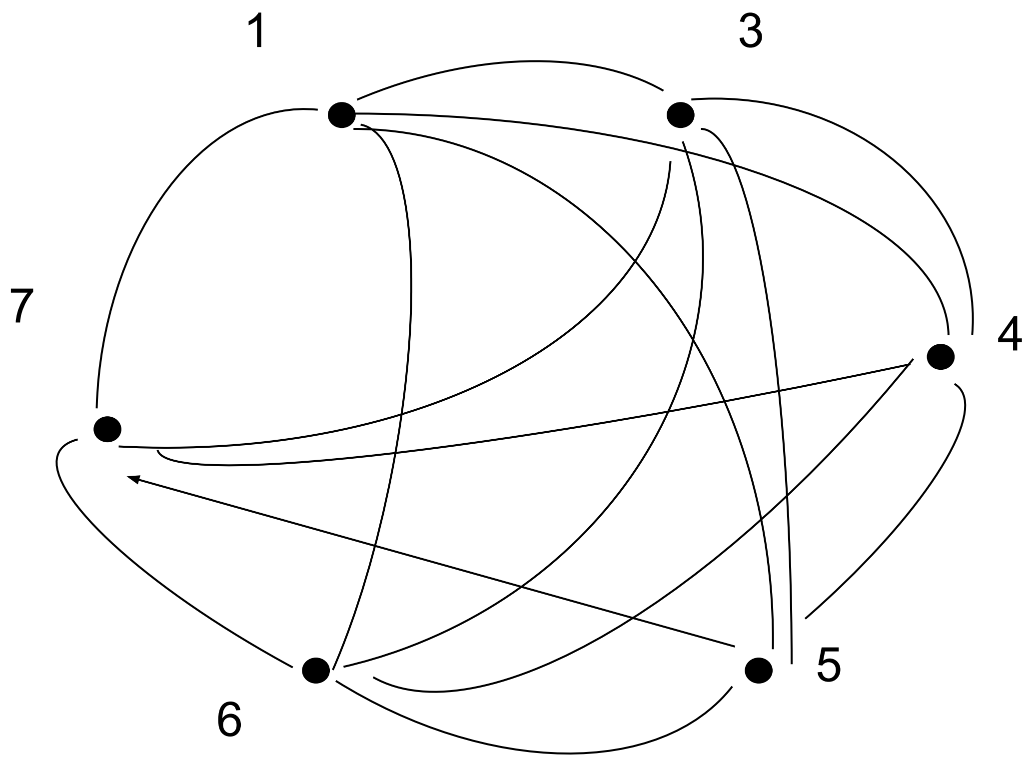
R = {(4; 2), (5; 3), (6; 4), (7; 5), (8; 6)}

3) Граф

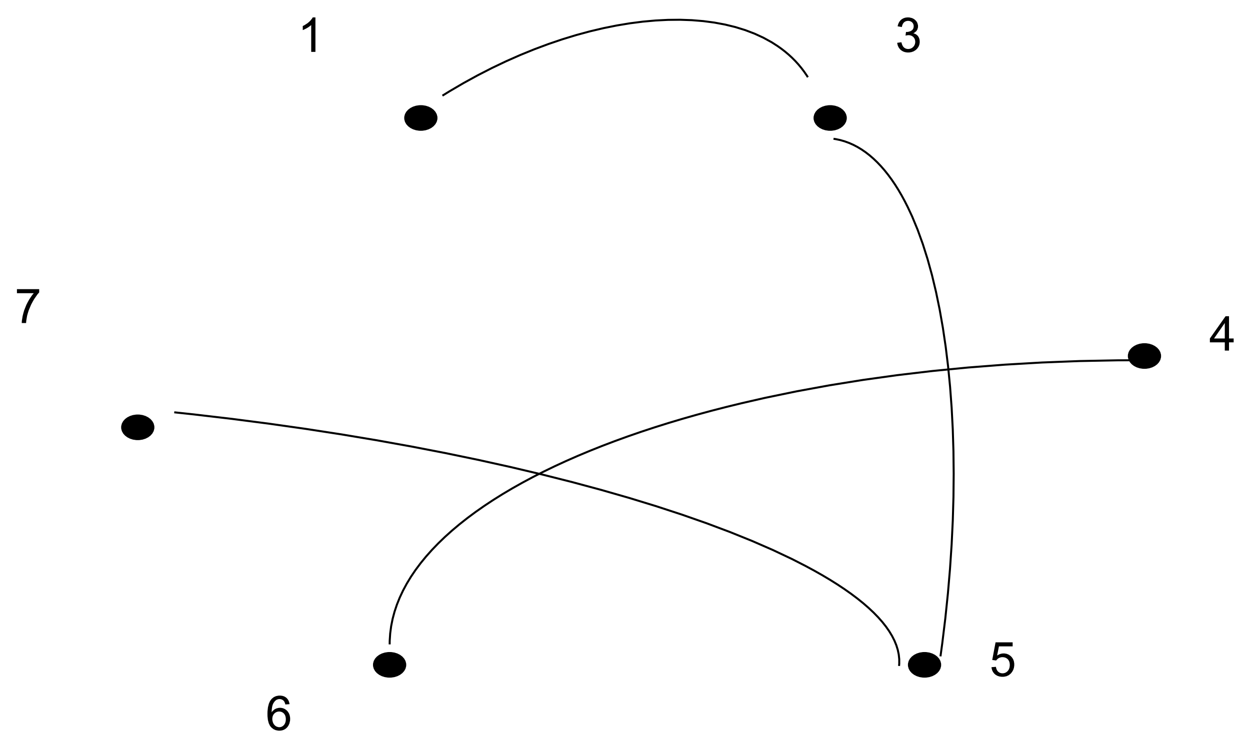
Примеры: X = {1, 3, 4, 5, 6, 7}

а) R: «меньше»

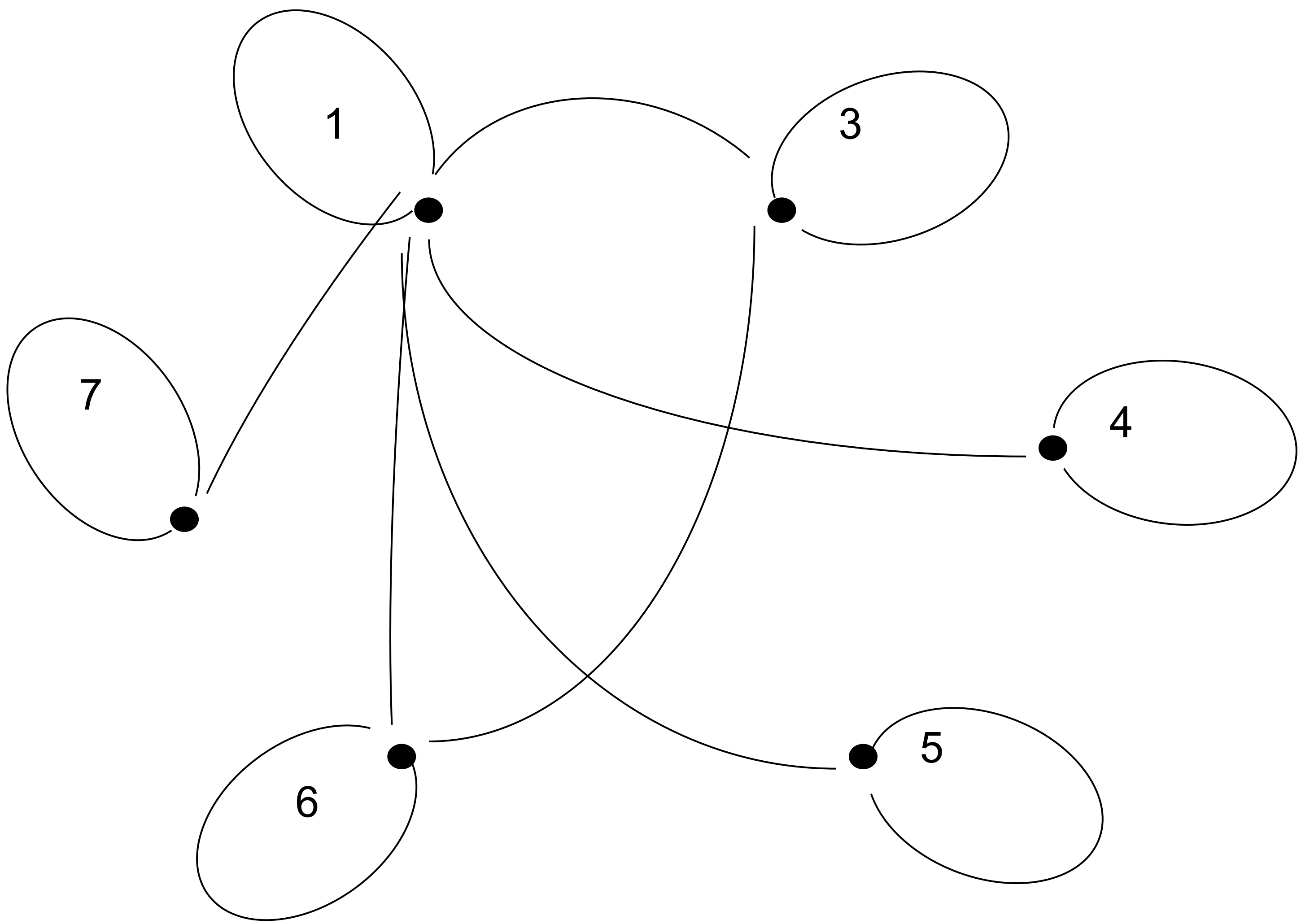
R: «x < y»



б) P: «меньше на 2»   P: «$x = y - 2$»

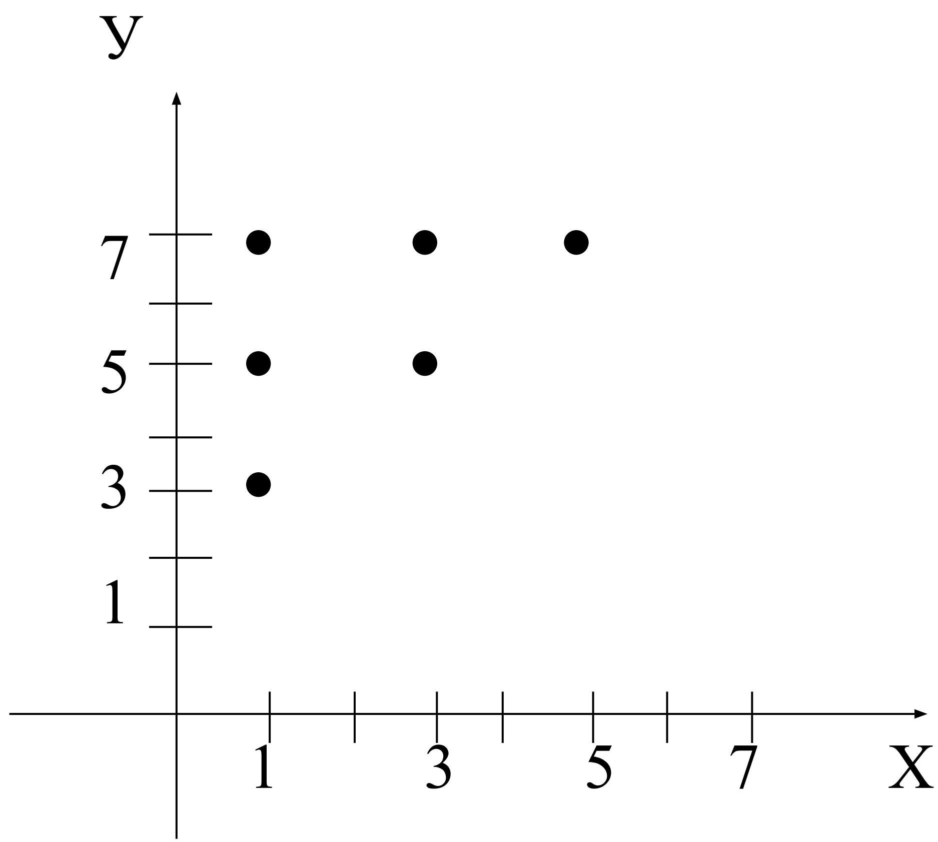


в) T: «кратно» T: «x □ y»



4) Отношение на *числовом множестве* можно наглядно изобразить с помощью ***графика***

<u>Пример</u>: X = {1, 3, 5, 7}, R: «меньше».



Пусть R – отношение между элементами множества X. Отношение R^{-1} называется **обратным данному**, если $y\ R^{-1}\ x$ тогда и только тогда, когда $x\ R\ y$

Примеры:

1) На множестве чисел задано отношение R: «x меньше y»,

R^{-1}: «y больше x».

2) На множестве отрезков задано отношение T: «x длиннее y»,

T^{-1}: «y короче x».

В начальной школе:

Задача: «У Миши 6 марок, что *на 2 меньше*, чем у Коли. Сколько марок у Коли?»

Часто допускают ошибку: 6 – 2 = 4.
Чтобы предупредить ошибку, задачу переформулируют: «У Миши 6 марок, а у Коли *на 2 больше*. Сколько марок у Коли?»

Переформулировка свелась к замене отношения «меньше на 2» обратным ему отношением «больше на 2»

Пусть R – отношение между элементами множества X. Отношение R′ называется **противоположным данному**, если R′ - дополнение множества R до множества X×X.

$$\mathbf{R' = X \times X \setminus R}$$

__Пример__: На множестве X = {2, 4, 6} заданы отношения: а) R: «больше», б) T: «кратно». Найти R′ и T′.

а) R′: « не больше», R′ : «$x \le y$»,

R′ = {(2; 2), (2; 4), (2; 6), (4; 4), (4; 6), (6; 6)}

X×X = {(2; 2), (2; 4), (2; 6), (4; 2), (4; 4), (4; 6), (6; 2), (6; 4), (6; 6)}

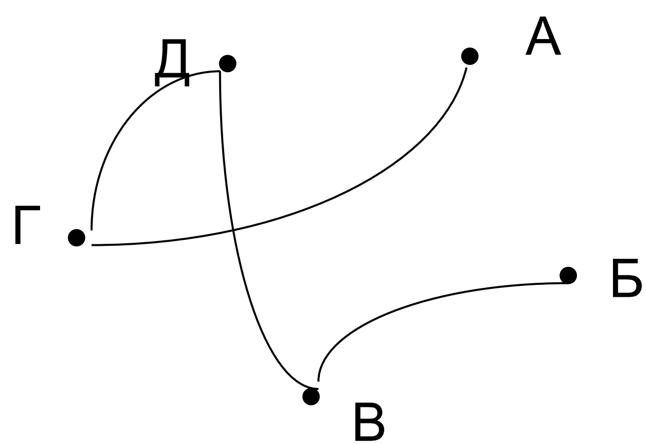
б) T′: «не кратно», T′: $\overline{x \vdots y}$

T′ = {(2; 4), (2; 6), (4; 6), (6; 4)}

X×X = {(2; 2), (2; 4), (2; 6), (4; 2), (4; 4), (4; 6), (6; 2), (6; 4), (6; 6)}

Пример: Андрей, Борис, Виктор, Гриша и Дима участвовали в соревнованиях по плаванию. Виктор проплыл быстрее Димы, но медленнее Бориса; Дима проплыл быстрее Гриши, а Гриша быстрее Андрея. Какое место занял каждый мальчик?

X = {А, Б, В, Г, Д}, R: «быстрее»



1 – Борис

2 – Виктор

3 – Дима

4 – Гриша

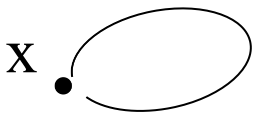
5 - Андрей

Свойства отношений

Пусть на множестве X задано некоторое отношение R.

1. Отношение R называется **рефлексивным**, если о *любом* элементе множества X можно сказать, что он находится в отношении R с самим собой:

R рефлексивно на X $\Leftrightarrow$ x R x для любого x $\in$ X



Если отношение *рефлексивно*, то *в каждой* вершине его графа имеется *петля*.

И обратно: …

<u>Примеры</u>: 1) отношение равенства на множестве чисел.

2) Отношение делимости на множестве чисел.

3) Отношение равенства на множестве отрезков.

2. Отношение R на множестве X называется **антирефлексивным**, если *ни один* элемент из множества X не находится в отношении R с самим собой.

Граф *антирефлексивного* отношения…

не содержит петель.

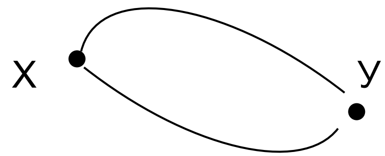
Примеры:

1. Отношение «меньше» («больше») для чисел;
2. Отношение «прямая **x** перпендикулярна прямой **y**»;
3. Отношение «длиннее» («короче») для отрезков.

Существуют отношения, не являющиеся ни рефлексивными, ни антирефлексивными. Пример: «*точка x симметрична точке y относительно прямой a*».

3. Отношение R на множестве X называется **симметричным**, если из того, что элемент x находится в отношении R с элементом y, следует, что и элемент y находится в отношении R с элементом x:

R симметрично на X $\Leftrightarrow$ (x R $y \Rightarrow y$ R x)



Граф *симметричного* отношения отличается тем, что вместе с каждой стрелкой, идущей *от x к y*, граф содержит и стрелку, идущую *от y к x*.

И обратно: …

Примеры:

1. Отношение параллельности прямых

$$(x \parallel y \Rightarrow y \parallel x);$$

2. Отношение перпендикулярности прямых

$$(x \perp y \Rightarrow y \perp x);$$

3. Отношение подобия треугольников

$$(\Delta P \sim \Delta T \Rightarrow \Delta T \sim \Delta P).$$

4. Отношение R на множестве X называется **антисимметричным**, если для различных элементов x и y из множества X из того, что элемент x находится в отношении R с элементом y следует, что элемент y в отношении R с элементом x не находится:

R антисимметрично на X $\Leftrightarrow$ **(xRy и x≠y** $\Rightarrow \overline{yRx}$ **)**

Граф *антисимметричного* отношения характерен тем, что если две вершины графа соединены стрелкой, то эта *стрелка только одна*.

И обратно: …

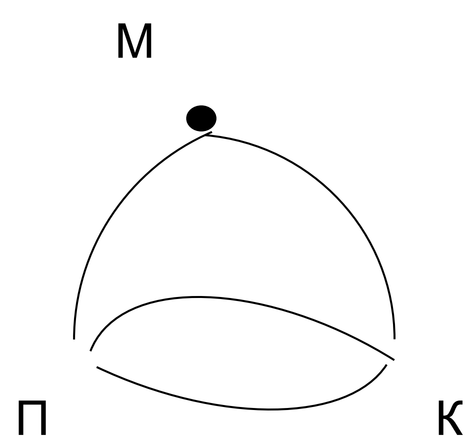
Примеры:

1. Отношения «больше», «меньше», «больше на…», «меньше на…» для чисел.
2. Отношения «длиннее», «короче» для отрезков.

Существуют отношения, не обладающие ни свойством симметричности, ни свойством антисимметричности.

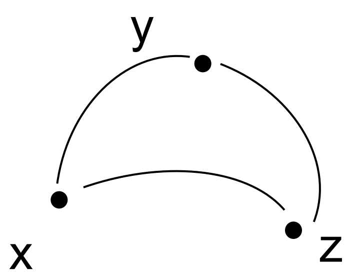
Пример: X – множество детей одной семьи,

X = {Маша, Петя, Коля}, R: «быть братом».



5. Отношение R на множестве X называется **транзитивным**, если из того, что элемент x находится в отношении R с элементом y и элемент y находится в отношении R с элементом z, следует, что элемент x находится в отношении R с элементом z:

R транзитивно на X $\Leftrightarrow$ (xRy и yRz $\Rightarrow$ xRz)

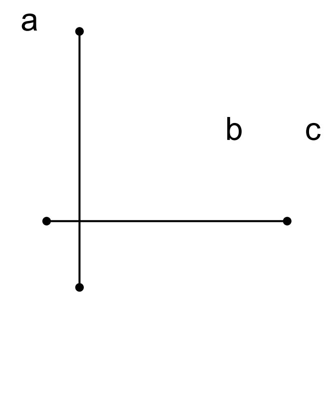


Граф *транзитивного* отношения характерен тем, что вместе с парой стрелок, идущих *от x к y* и *от y к z*, содержит стрелку, идущую *от x к z*. Справедливо и обратное утверждение.

Примеры: 1. Отношения «больше», «меньше» для чисел.

2. Отношения «длиннее», «короче» для отрезков.

Существуют отношения, которые свойством транзитивности не обладают.



Например, отношение перпендикулярности:

если отрезок *a* перпендикулярен отрезку *b*, а отрезок *b* перпендикулярен отрезку *c*, то отрезки *a* и *c* не перпендикулярны.

6. Отношение R на множестве X называется **связанным**, если <u>для любых</u> элементов *x* и *y* их множества X выполняется условие: из того, что *x* и *y* различны, следует, что либо *x* находится в отношении R с элементом *y*, либо *y* находится в отношении R с *x*:

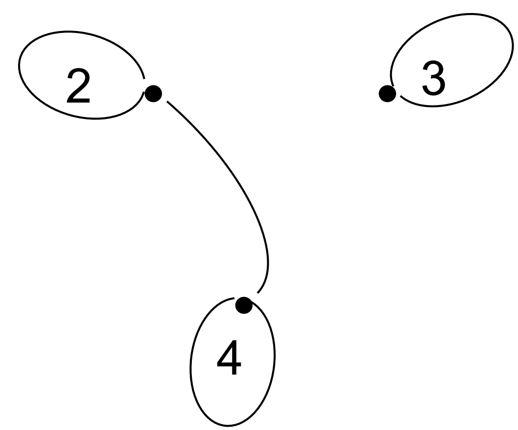
R связанно на X $\Leftrightarrow$ ($x \neq y \Rightarrow xRy$ или yRx)

Граф *связанного* отношения отличается тем, что *любые две его вершины соединены стрелкой*. Справедливо и обратное утверждение.

Примеры: 1. Отношения «больше», «меньше» для чисел.

2. Отношения «длиннее», «короче» для отрезков.

Существуют отношения, не обладающие свойством связанности. Например, отношение «кратно» на множестве X = {2, 3, 4}.



Отношение эквивалентности

Отношение R на множестве X называется **отношением эквивалентности**, если оно ***рефлексивно, симметрично*** и ***транзитивно***.

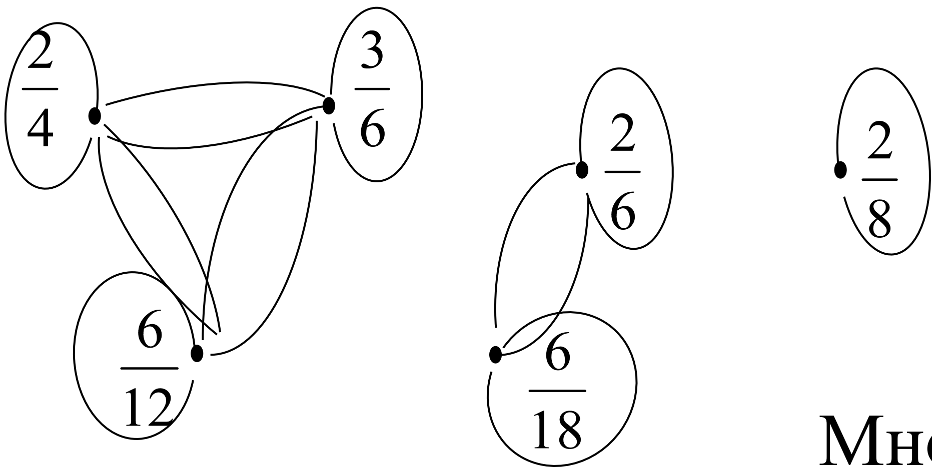
Примеры: 1. Отношение равенства на множестве дробей.

2. Отношение равенства на множестве геометрических фигур.

3. Отношение параллельности на множестве прямых.

Рассмотрим множество X = $\left\{\frac{2}{4}, \frac{2}{6}, \frac{2}{8}, \frac{6}{12}, \frac{6}{18}, \frac{3}{6}\right\}$

На X задано отношение R: «равно».



Множество X разбилось на три подмножества:

$$X_1 = \left\{\frac{2}{4},\ \frac{6}{12},\ \frac{3}{6}\right\} \quad X_2 = \left\{\frac{2}{6}, \frac{6}{18}\right\} \quad X_3 = \left\{\frac{2}{8}\right\}$$

Если на множестве X задано *отношение эквивалентности*, то оно порождает *разбиение* этого множества *на попарно непересекающиеся подмножества* (*классы эквивалентности*).
Обратно: если какое-либо отношение, заданное на множестве X, порождает *разбиение* этого множества *на классы*, то оно является *отношением эквивалентности*.

Пример: $X = \{x \mid x \in N, x \leq 15\}$.
R: «*иметь один и тот же остаток при делении на 4*».

Это *отношение порождает разбиение множества X на классы*:

$$X_0 = \{4, 8, 12\},$$
$$X_1 = \{1, 5, 9, 13\},$$
$$X_2 = \{2, 6, 10, 14\},$$
$$X_3 = \{3, 7, 11, 15\}.$$

Таким образом, заданное отношение *является отношением эквивалентности*.

Отношение порядка

Отношение R на множестве X называется **отношением порядка**, если оно ***транзитивно*** и ***антисимметрично***

Примеры: 1. Отношения «меньше», «больше» на множестве чисел.

2.Отношение «длиннее», «короче» на множестве отрезков.

Различают отношения строго порядка и нестрогого порядка.

Отношение **строгого порядка** определено выше.

Отношение **нестрогого порядка**, кроме названных свойств, обладает еще и свойством ***рефлексивности***.

Примеры: 1. «больше или равно» ($\geq$), «меньше или равно» ($\leq$) на числовом множестве.

2. «быть делителем» на множестве **N**.

Множество X с заданным на нем отношением порядка называется **упорядоченным** множеством.

Пример: Если на множестве **N** задать отношение «меньше» (или «больше»), то множество **N** будет упорядоченным.

Спасибо за внимание!