

Лекция №7

Нормальный случайный процесс

Дисциплина: “Статистическая теория радиотехнических систем”

- Совместная плотность вероятности n сечений $\hat{x}(t_1), \hat{x}(t_2), \dots, \hat{x}(t_n)$ нормального случайного процесса описывается выражением:

- $$P_{\hat{x}}(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{1}{\sigma_{\hat{x}}(t_1)\sigma_{\hat{x}}(t_2)\dots\sigma_{\hat{x}}(t_n)\sqrt{(2\pi)^n|R_n|}}$$

- $$\cdot \exp\left(-\frac{1}{2|R_n|} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n R_{ij} \frac{x_i - m_{\hat{x}}(t_i)}{\sigma_{\hat{x}}(t_i)} \cdot \frac{x_j - m_{\hat{x}}(t_j)}{\sigma_{\hat{x}}(t_j)}\right)$$

(1.10)

- где $|R_n|$ – определитель матрицы n – го порядка

- $$\|R_n\| = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & \dots & r_{2n} \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & \dots & r_{nn} \end{vmatrix}$$

- элементами, которой являются коэффициенты корреляции

- $$r_{ij} = \frac{M[(x(t_i) - m_{\hat{x}}(t_i))(x(t_j) - m_{\hat{x}}(t_j))]}{\sigma_{\hat{x}}(t_i)\sigma_{\hat{x}}(t_j)}; ij = \overline{1, n}$$

- Одномерная плотность вероятности нормального процесса имеет вид:

$$P_{\hat{x}}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\hat{x}}(t)} e^{-\frac{(x-m_{\hat{x}}(t))^2}{\sigma_{\hat{x}}^2(t)}} \quad (1.21)$$

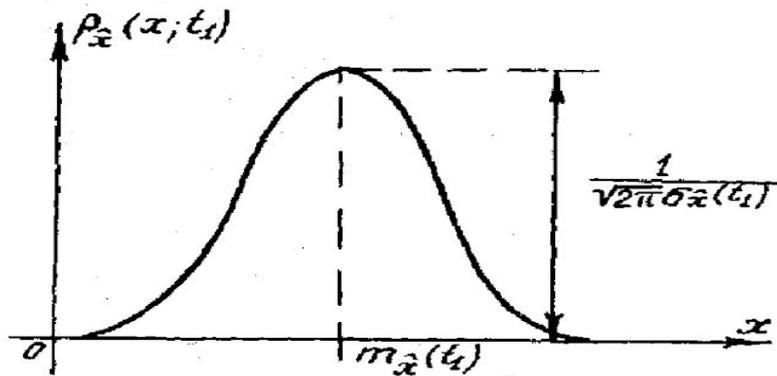


Рис. 1.10.1

- Одномерный интегральный закон распределения нормального процесса получается из (1.1)

- $$F(x, t_1) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\hat{x}}(t)} e^{-\frac{(x-m_{\hat{x}}(t_1))^2}{2\sigma_{\hat{x}}^2(t_1)}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-m_{\hat{x}}(t_1)}{\sigma_{\hat{x}}(t_1)}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \Phi\left(\frac{x-m_{\hat{x}}(t)}{\sigma_{\hat{x}}(t)}\right),$$

- Двумерная плотность вероятности нормального процесса описывается формулой

- $$P_{\hat{x}}(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\hat{x}}(t_1)\sigma_{\hat{x}}(t_2)\sqrt{1-r_{\hat{x}}^2(t_1, t_2)}}.$$

- $$\exp\left\{-\frac{1}{1-r_{\hat{x}}^2(t_1, t_2)} \left[\frac{(x_1-m_{\hat{x}}(t_1))^2}{2\sigma_{\hat{x}}^2(t_1)} - \frac{2r_{\hat{x}}(t_1, t_2)(x_1-m_{\hat{x}}(t_1))(x_2-m_{\hat{x}}(t_2))}{\sigma_{\hat{x}}(t_1)\sigma_{\hat{x}}(t_2)} + \frac{(x_2-m_{\hat{x}}(t_2))^2}{2\sigma_{\hat{x}}^2(t_2)} \right]\right\}$$

- (1.22)

- В том случае, когда случайный процесс стационарен,
- $m_{\hat{x}}(t_1) = m_{\hat{x}}(t_2) = m_{\hat{x}}$; $\sigma_{\hat{x}}(t_1) = \sigma_{\hat{x}}(t_2) = \sigma_{\hat{x}}$; $r_{\hat{x}}(t_1, t_2) = r_{\hat{x}}(\tau)$
- Поверхность, соответствующая (1.22), изображена на рисунке 1.35.

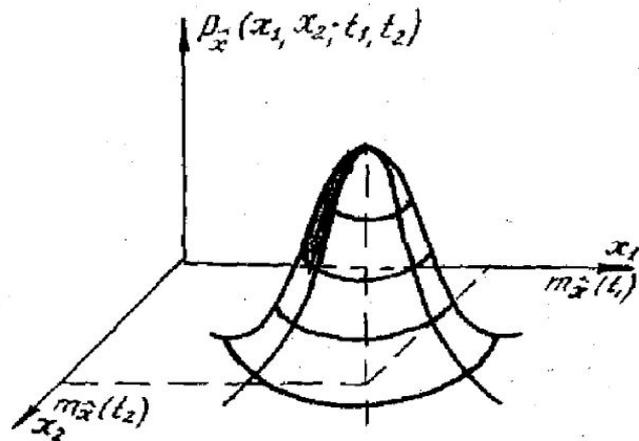


Рис. 1.10.2

- Если сечения процесса не коррелированы, т.е. $r_{\hat{x}}(t_1, t_2) = 0$, то из формулы (1.22) следует:

- $$P_{\hat{x}}(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\hat{x}}(t_1)} e^{-\frac{(x_1 - m_{\hat{x}}(t_1))^2}{2\sigma_{\hat{x}}^2(t_1)}} \cdot$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\hat{x}}(t_2)} e^{-\frac{(x_2 - m_{\hat{x}}(t_2))^2}{2\sigma_{\hat{x}}^2(t_2)}} =$$

$$= P_{\hat{x}}(x_1, t_1)P_{\hat{x}}(x_2; , t_2)$$

- Зная $B_{\hat{x}}(\tau)$, можно найти математическое ожидание случайного процесса по формуле:
- $m_{\hat{x}} = \sqrt{B_{\hat{x}}(\infty)}$
- дисперсию:
- $\sigma_{\hat{x}}^2 = B_{\hat{x}}(0) - B_{\hat{x}}(\infty)$
- и нормированную корреляционную функцию:
- $r_{\hat{x}}(\tau) = \frac{B_{\hat{x}}(\tau) - m_{\hat{x}}^2}{\sigma_{\hat{x}}^2}$
- Зная $r_{\hat{x}}(\tau)$, определяем все элементы матрицы $\|R_n\|$:
- $r_{ij} = r_{\hat{x}}[(i - j)\Delta\tau]$
- Здесь $\Delta\tau$ – интервал между смежными сечениями.
- Из матрицы $\|R_n\|$ определяются $|R_n|$ и r_{ij} .

