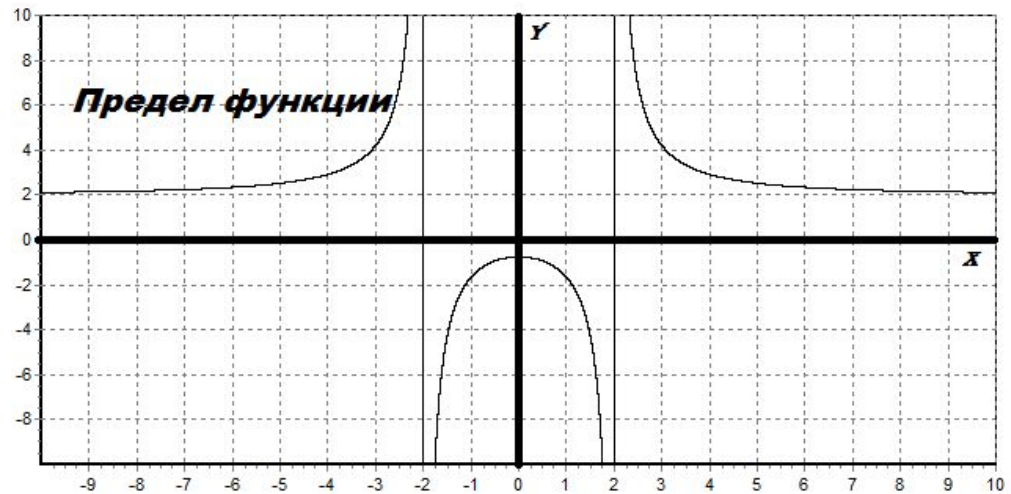


# Занимательная математика АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, 10 КЛАСС.

**УРОК НА ТЕМУ:  
ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ НА  
БЕСКОНЕЧНОСТИ.**



# Предел функции на бесконечности.

## ЧТО БУДЕМ ИЗУЧАТЬ:

Что такое Бесконечность?

Предел функции на бесконечности

Предел функции на плюс бесконечности.

Предел функции на минус бесконечности.

Свойства.

Примеры.

# Предел функции на бесконечности.

## Предел функции на бесконечности

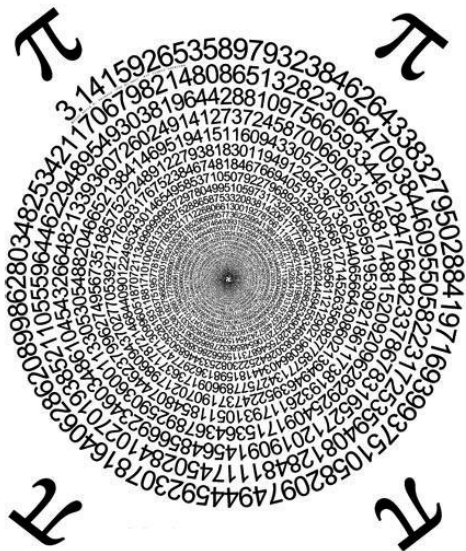
*Ребята, давайте посмотрим, что такое предел функции на бесконечности?*

*А, что такое бесконечность?*

*Бесконечность — используется для характеристики безграничных, беспредельных, неисчерпаемых предметов и явлений, в нашем случае характеристика чисел.*

*Бесконечность – сколько угодно большое(малое), безграничное число.*

*Если рассмотреть координатную плоскость то ось абсцисс(ординат) уходит на бесконечность, если ее безгранично продолжать влево или вправо(вниз или вверх).*



# Предел функции на бесконечности.

Предел функции на плюс бесконечности.

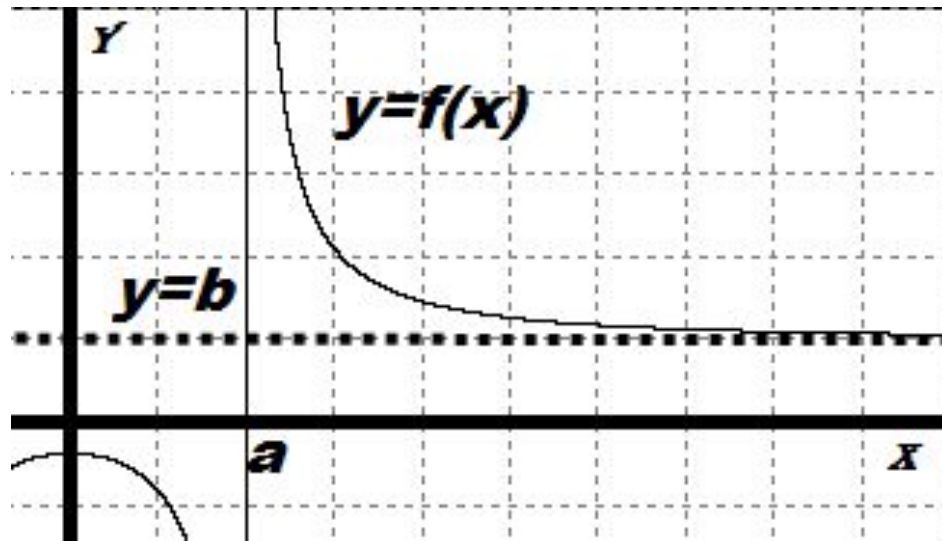
Теперь давайте перейдем к пределу функции на бесконечности:

Пусть у нас есть функция  $y=f(x)$ , область определения нашей функции содержит луч  $[a; +\infty)$ , и пусть прямая  $y=b$  является горизонтальной асимптотой графика функции  $y=f(x)$ , запишем все это на математическом языке:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$$

Будем читать наше выражение как:

**предел функции  $y=f(x)$  при  $x$  стремящимся к плюс бесконечности равен  $b$**



# Предел функции на бесконечности.

## Предел функции на минус бесконечности.

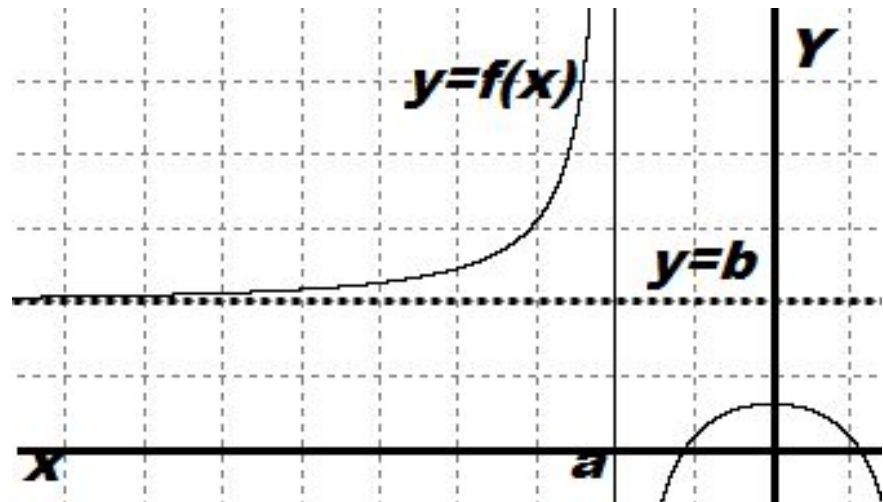
*Посмотрим немного другой случай:*

*Пусть у нас есть функция  $y=f(x)$ , область определения нашей функции содержит луч  $(-\infty; a]$ , и пусть прямая  $y=b$  является горизонтальной асимптотой графика функции  $y=f(x)$ , запишем все это на математическом языке:*

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$$

*Будем читать наше выражение как:*

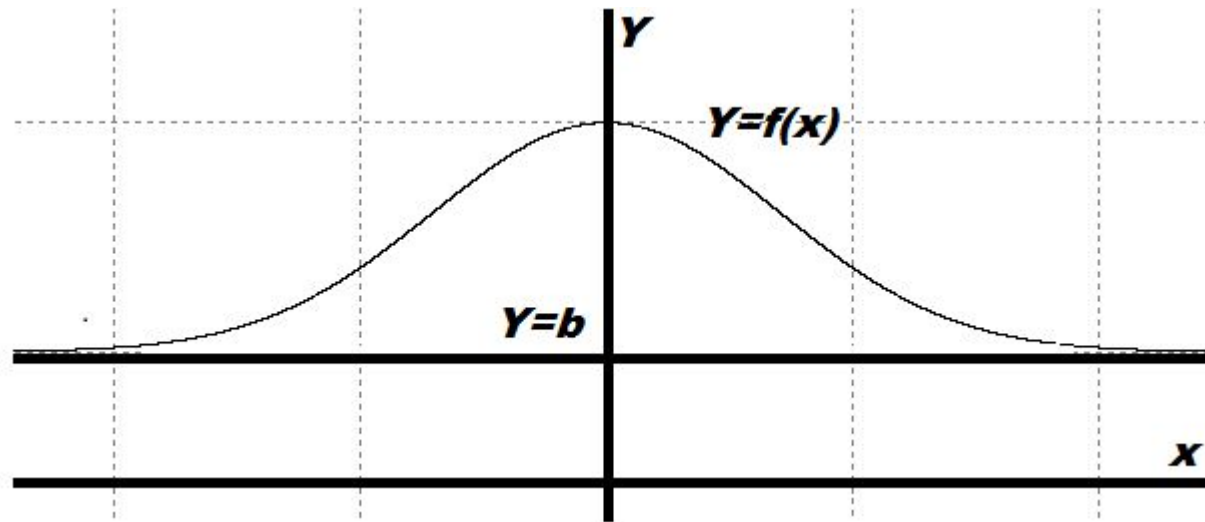
*предел функции  $y=f(x)$  при  $x$  стремящимся к минус бесконечности равен  $b$*



# Предел функции на бесконечности.

Предел функции на бесконечности.

*Так же наши соотношения могут выполняться одновременно:*



*Тогда принято записывать как:*

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b \quad \text{или} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$$

*предел функции  $y=f(x)$  при  $x$  стремящимся к бесконечности равен  $b$*

# Предел функции на бесконечности.

**Пример.**

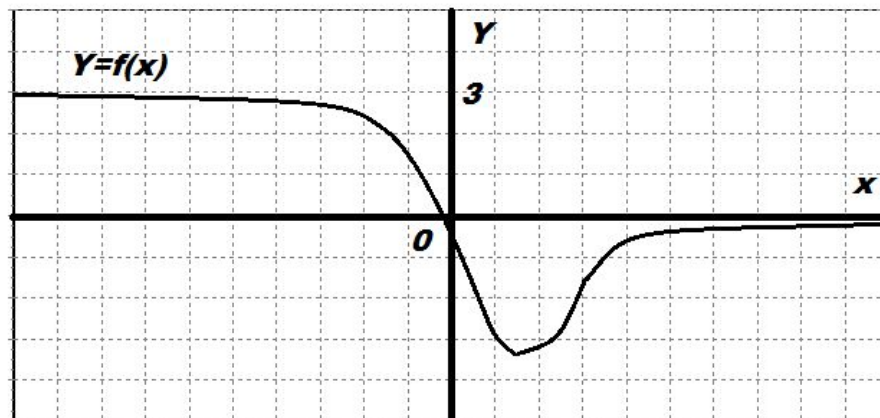
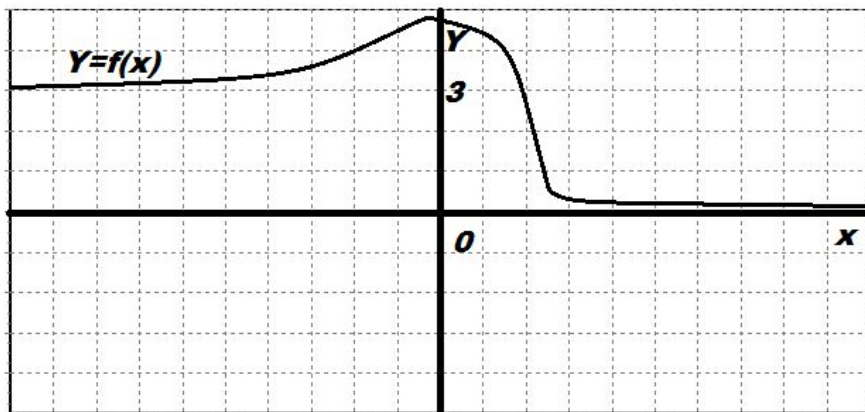
*Пример. Построить график функции  $y=f(x)$ , такой что:*

- 1) Область определения – множество действительных чисел.*
- 2)  $f(x)$ - непрерывная функция*
- 3)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$*
- 4)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$*

*Решение:*

*Нам надо построить непрерывную функцию на  $(-\infty; +\infty)$ .*

*Покажем пару примеров нашей функции.*



# Предел функции на бесконечности.

## ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА.

Для вычисления предела на бесконечности пользуются несколькими утверждениями:

1) Для любого натурального числа  $n$  справедливо следующее соотношение:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x^n} \right) = 0$$

2) Если  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$   $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = c$  то:

а) Предел суммы равен сумме пределов:  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x)) = b + c$

б) Предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) \times g(x)) = b \times c$$

в) Предел частного равен частному пределов:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{b}{c}, c \neq 0$

г) Постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$



# Предел функции на бесконечности.

Пример.

Пример. Найдите  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{5x + 3}$

Решение.

*Разделим числитель и знаменатель дроби на  $x$ .*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{5 + \frac{3}{x}}$$

*Воспользуемся свойством предел частного равен частному пределов:*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{5 + \frac{3}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (2 - \frac{1}{x})}{\lim_{x \rightarrow \infty} (5 + \frac{3}{x})}$$

*Ребята, вспомните предел числовой последовательности.*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x} = 0$$

*Получим:*

$$\frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (2 - 0)}{\lim_{x \rightarrow \infty} (5 + 0)} = \frac{2}{5}$$

*Ответ:*  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{5x + 3} = \frac{2}{5}$

# Предел функции на бесконечности.

**Пример.**

*Пример. Найти предел функции  $y=f(x)$ , при  $x$  стремящимся к бесконечности.*

$$f(x) = \frac{5x^3 - 1}{10x^3 + 5}$$

*Решение.*  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 1}{10x^3 + 5}$

*Разделим числитель и знаменатель дроби на  $x$  в третьей степени.*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 - \frac{1}{x^3}}{10 + \frac{5}{x^3}}$$

*Воспользуемся свойствами предела на бесконечности*

$$\frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (5 - \frac{1}{x^3})}{\lim_{x \rightarrow \infty} (10 + \frac{5}{x^3})}$$

*Предел числителя равен:  $5-0=5$ ; Предел знаменателя равен:  $10+0=10$*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

# Предел функции на бесконечности.

**Пример.**

*Пример. Найти предел функции  $y=f(x)$ , при  $x$  стремящимся к бесконечности.*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 - 3x + 10}{8x^3 + 5}$$

*Решение.*

*Разделим числитель и знаменатель дроби на  $x$  в третьей степени.*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{7x^2}{x^3} - \frac{3x}{x^3} + \frac{10}{x^3}}{\frac{8x^3}{x^3} + \frac{5}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{7}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{10}{x^3}}{8 + \frac{5}{x^3}}$$

*Воспользуемся свойствами предела на бесконечности*

$$\frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{7}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{10}{x^3} \right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 8 + \frac{5}{x^3} \right)}$$

*Предел числителя равен: 0; Предел знаменателя равен: 8*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{0}{8} = 0$$

# Предел функции на бесконечности.

**Задачи для самостоятельного решения.**

- 1) Построить график непрерывной функции  $y=f(x)$ . Такой что предел при  $x$  стремящимся к плюс бесконечности равен 7, а при  $x$  стремящимся к минус бесконечности 3.
- 2) Построить график непрерывной функции  $y=f(x)$ . Такой что предел при  $x$  стремящимся к плюс бесконечности равен 5 и функция возрастает.
- 3) Найти пределы:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-2x}{8x+5}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x-3}{4x+10}$$

- 4) Найти пределы:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^4 - 2x^2 + 1}{12x^4 + 5}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 9x + 1}{10x^4}$$