

ТЕОРИЯ ГРАФОВ

ПУТЬ, ЦЕПЬ, ЦИКЛ

Путь (маршрут) – конечная последовательность ребер графа, в котором два соседних ребра соединены общей вершиной. В маршруте одно и то же ребро может встречаться несколько раз. Путь – это совокупность ребер, которые объединены вершинами таким образом, что можно двигаться по ним вдоль графа.

Обозначение маршрута – v_0, v_1, \dots, v_k .

ТЕОРИЯ ГРАФОВ

ПУТЬ, ЦЕПЬ, ЦИКЛ

Путь длины k – последовательность, содержащая k ребер. Длина пути – количество ребер в нем; каждое ребро считается столько раз, сколько оно встречается в маршруте.

ТЕОРИЯ ГРАФОВ

ПУТЬ, ЦЕПЬ, ЦИКЛ

Путь называется **простым** или **цепью**, если все его ребра различны. Если все вершины в цепи различны, то она является **простой цепью**.

Циклом называется путь, в котором $v_0 = v_k$.

Простой цикл – цикл, у которого все ребра и все вершины, кроме концов, различны.

В простой цепи число вершин на единицу больше, чем число ребер, а в простом цикле их количество совпадает.

ТЕОРИЯ ГРАФОВ

ПУТЬ, ЦЕПЬ, ЦИКЛ

Пример. Определить возможные маршруты и их длину из вершины v_0 в вершину v_6 в графе (рис. 12)

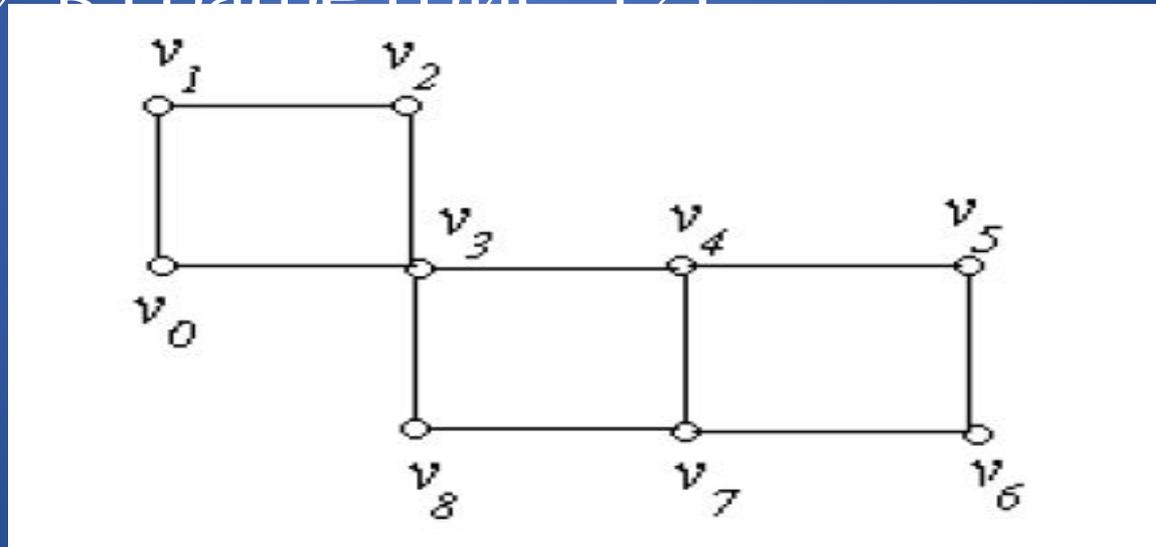


Рисунок 12

ТЕОРИЯ ГРАФОВ

ПУТЬ, ЦЕПЬ, ЦИКЛ

Решение.

Пути:

1) $v_0v_3v_8$ длиной 2;
6;

2) $v_0v_1v_2v_3v_8$ длиной 4;
6;

3) $v_0v_3v_4v_7v_8$ длиной 4;
длиной 8;

4) $v_0v_3v_4v_5v_6v_7v_8$ длиной 6;

8) $v_0v_1v_2v_3v_4v_7v_6v_5v_4v_3v_8$ длиной 10.

5) $v_0v_3v_4v_5v_4v_7v_8$ длиной

6) $v_0v_1v_2v_3v_4v_7v_8$ длиной

7) $v_0v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_7v_8$

ТЕОРИЯ ГРАФОВ

ПУТЬ, ЦЕПЬ, ЦИКЛ

Маршрут $v_0v_1v_2v_3v_0$ для графа (рис. 12) является простым циклом;

маршрут $v_3v_4v_5v_6v_7v_4v_3$ является циклом, но не будет простым, потому что содержит повторяющиеся вершины.

ТЕОРИЯ ГРАФОВ

ПУТЬ, ЦЕПЬ, ЦИКЛ

Эйлеров цикл – последовательность вершин (может быть и с повторениями), через которые проходит искомый маршрут.

Цикл, проходящий через каждую вершину графа в точности один раз, называется **гамильтоновым**, а соответствующий граф – **гамильтоновым графом**.

ТЕОРИЯ ГРАФОВ

СВЯЗНОСТЬ ГРАФА

Вершины v' и v'' называются **связными**, если существует маршрут с началом в вершине v' и концом в v'' . Граф называется **связным**, если любые пары его вершин связаны между собой.

ТЕОРИЯ ГРАФОВ СВЯЗНОСТЬ ГРАФА

Граф, изображенный на рис. 13 (а) – не связный, а граф на рис. 13 (б) – связный.

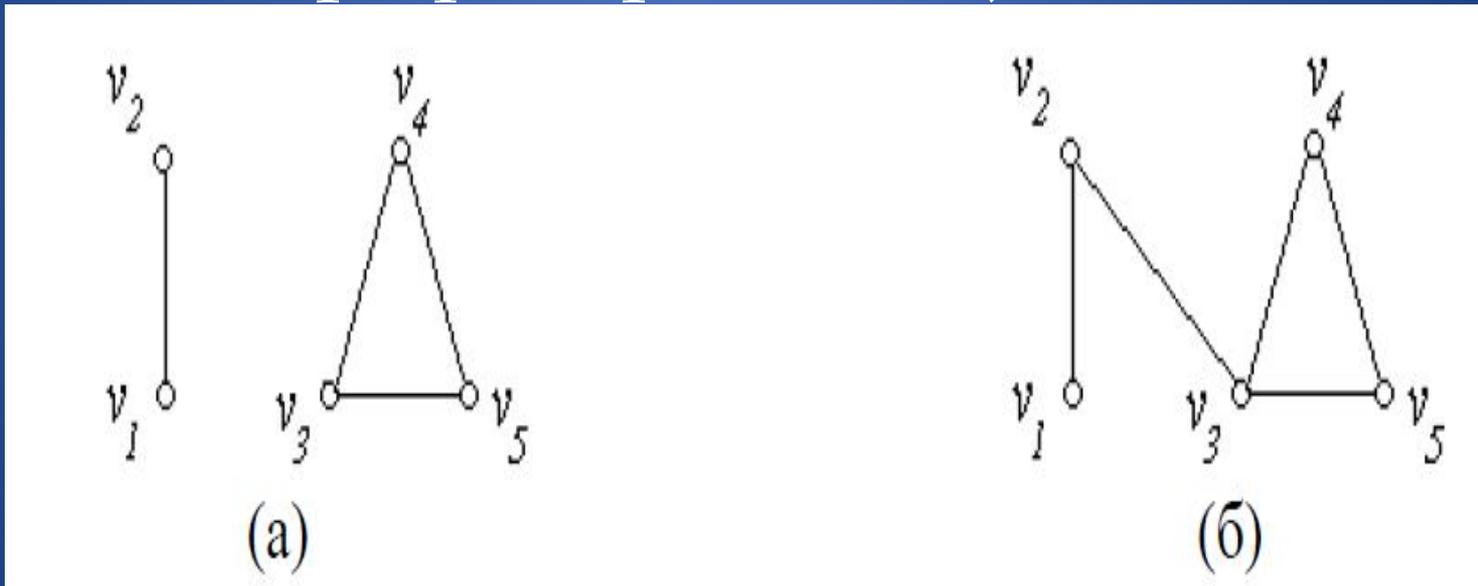


Рисунок 13

ТЕОРИЯ ГРАФОВ

КОЛИЧЕСТВО МАРШРУТОВ

Для определения наличия маршрута между двумя вершинами используется матрица смежности. Булево произведение матрицы B с самой собой обозначается через B^2 . В этой матрице 1 символизирует наличие пути длины 2. По матрице $B^3 = B * B * B$ можно определить все пути длины 3, т.е., матрица B^k хранит сведения о путях длины k .

ТЕОРИЯ ГРАФОВ

КОЛИЧЕСТВО МАРШРУТОВ

Пример. Для графа (рис. 14) определим, какие и в каком количестве существуют пути между вершинами.

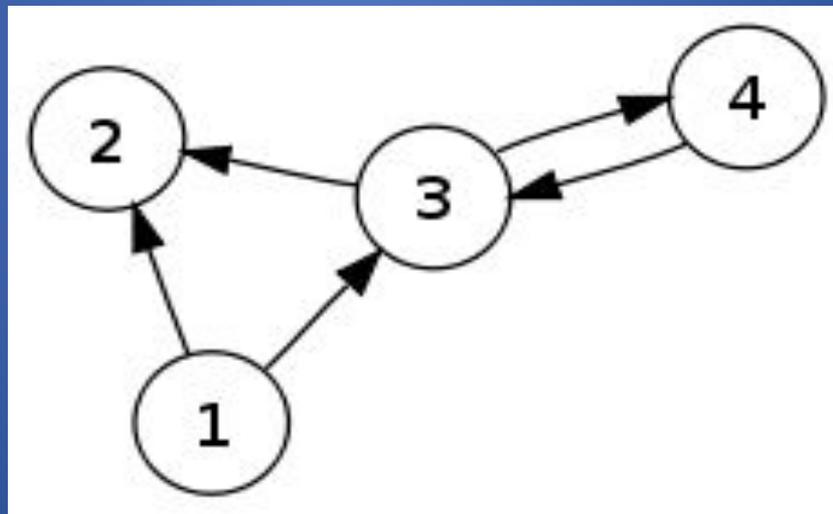


Рисунок 14

ТЕОРИЯ ГРАФОВ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Матрица смежности

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 4 | 0 | 0 | 1 | 0 |

Матрица B^2

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 4 | 0 | 1 | 0 | 1 |

ТЕОРИЯ ГРАФОВ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Матрица B^3

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 4 | 0 | 0 | 1 | 0 |

Матрица B^4

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 4 | 0 | 1 | 0 | 1 |

ТЕОРИЯ ГРАФОВ

КОЛИЧЕСТВО МАРШРУТОВ

При использовании алгебраических операций получаем матрицу,

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 3 | 2 | 2 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 2 | 2 | 2 |
| 4 | 0 | 2 | 2 | 2 |

которая характеризует не только наличие путей между вершинами, но и количество таких путей.

ТЕОРИЯ ГРАФОВ

КОЛИЧЕСТВО МАРШРУТОВ

Матрица смежности

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ТЕОРИЯ ГРАФОВ

КОЛИЧЕСТВО МАРШРУТОВ

Матрица A^2

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Элемент матрицы «говорит» о количестве путей между вершинами, а показатель степени указывает длину пути.

ТЕОРИЯ ГРАФОВ

КОЛИЧЕСТВО МАРШРУТОВ

Матрица A^2

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

В этом случае может говорить о наличии пути между вершинами длиной 2.

ТЕОРИЯ ГРАФОВ

МАТРИЦА ДОСТИЖИМОСТИ

Матрица достижимости

ориентированного графа – бинарная матрица замыкания по транзитивности. Таким образом, в матрице достижимости хранится информация о существовании путей между вершинами орграфа.

ТЕОРИЯ ГРАФОВ

МАТРИЦА ДОСТИЖИМОСТИ

Для нахождения матрицы достижимости начинаем работу с построения матрицы смежности.

Находим булевы степени этой матрицы:
 B^2, B^3, \dots, B^n

Находим матрицу достижимости:

$$B^* = B \vee B^2 \vee \dots \vee B^n$$

ТЕОРИЯ ГРАФОВ

МАТРИЦА ДОСТИЖИМОСТИ

Матрица смежности

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 4 | 0 | 0 | 1 | 0 |

Матрица B^2

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 4 | 0 | 1 | 0 | 1 |

Матрица B^3

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 4 | 0 | 0 | 1 | 0 |

Матрица B^4

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 4 | 0 | 1 | 0 | 1 |

ТЕОРИЯ ГРАФОВ

МАТРИЦА ДОСТИЖИМОСТИ

Более удобный путь определения матрицы достижимости дает так называемый алгоритм Уоршелла (алгоритм Флойда – Уоршелла) – алгоритм для нахождения расстояний между всеми вершинами орграфа. Разработан в 1962 году Робертом Флойдом и Стивеном Уоршеллом.

ТЕОРИЯ ГРАФОВ

МАТРИЦА ДОСТИЖИМОСТИ

Алгоритм Уоршелла генерирует последовательность матриц $W_0 \dots W_n$, матрица

W_0 совпадает с матрицей смежности орграфа, а W_n – искомая матрица достижимости.

ТЕОРИЯ ГРАФОВ

АЛГОРИТМ УОРШЕЛЛА

1. Берем k -ый столбец матрицы W_{k-1}
2. Строку с номером $i(i=1, \dots, n)$, у которой на k -ом месте стоит 0, переписываем в i -ую строку матрицы W_k .
3. Строку с номером $i(i=1, \dots, n)$, у которой на k -ом месте стоит 1, объединяем с помощью операции **ИЛИ** с k -ой строкой, а результат записываем в i -ую строку матрицы W_k .

ТЕОРИЯ ГРАФОВ

АЛГОРИТМ УОРШЕЛЛА

•Пример.

Матрица смежности орграфа (рис. 14)

$$W_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Вычисляем матрицу W_1 . Учитывая первый шаг, рассматриваем 1-ый столбец матрицы W_0 . Следуя указаниям шага 2, скопируем строки матрицы W_0 , в первом столбце которой стоят 0.

ТЕОРИЯ ГРАФОВ

АЛГОРИТМ УОРШЕЛЛА

- $$W_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Вычисляем матрицу W_2 . Рассматриваем 2-ой столбец матрицы W_1 . Скопируем строки матрицы W_1 , во втором столбце которой стоят 0.

ТЕОРИЯ ГРАФОВ

АЛГОРИТМ УОРШЕЛЛА

- $$W_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Рассчитываем значения в строке 1-ой и 3-ей, выполняя дизъюнкцию k -ой строки (второй) со строками, у которых на k -ом месте стоит 1.

ТЕОРИЯ ГРАФОВ

АЛГОРИТМ УОРШЕЛЛА

Вычисляем матрицу W_3 . Рассматриваем 3-ий столбец матрицы W_2 . Копируем строки, у которых в 3-ем столбце 0: вторую и третью

$$W_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Рассчитываем значения в строке 1-ой и 4-ой, выполняя дизъюнкцию k -ой строки (третьей) со строками, у которых на k -ом месте стоит 1.

ТЕОРИЯ ГРАФОВ

АЛГОРИТМ УОРШЕЛЛА

Вычисляем матрицу W_4 . Рассматриваем 4-ый столбец матрицы W_3 . Копируем строки, у которых в 4-ом столбце 0: вторую

$$W_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Рассчитываем значения в строке 1-ой, 3-ей и 4-ой, выполняя дизъюнкцию k -ой строки (четвертой) со строками, у которых на k -ом месте стоит 1. Полученная матрица является матрицей достижимости – W^* .