

**Производн**

**ая**

# Содержание

1. Понятие производной.
2. Алгоритм нахождения производной.
3. Примеры.
4. Таблица производных.
5. Физический смысл производной.
6. Правила нахождения производных.
7. Непрерывность функции.
8. Геометрический смысл производной.

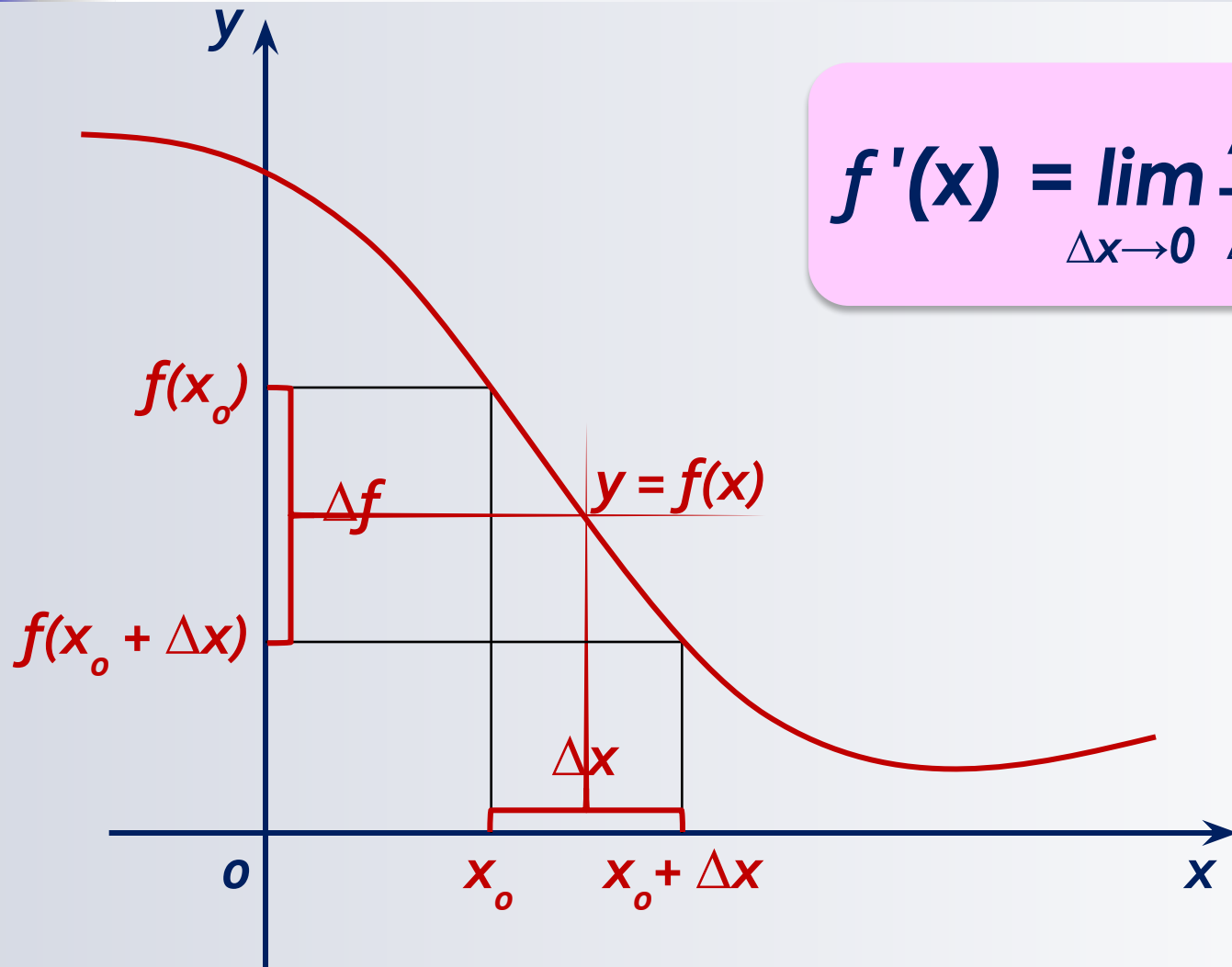
# Понятие производной

**Производной** функции  $y = f(x)$ , заданной на некотором интервале  $(a; b)$ , в некоторой точке  $x$  этого интервала называют **предел** отношения приращения функции в этой точке к соответствующему приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Нахождение производной называют **дифференцированием**

# Понятие производной



$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

# Алгоритм нахождения производной

1. Зафиксировать значение  $x_0$ , найти  $f(x_0)$ .
2. Дать аргументу  $x_0$  приращение  $\Delta x$ , перейти в новую точку  $x_0 + \Delta x$ , найти  $f(x_0 + \Delta x)$ .
3. Найти приращение функции:  $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ .
4. Составить отношение  $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ .
5. Вычислить  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ .
6. Этот предел и есть  $f'(x_0)$ .

# Примеры

1. Найти производную функции  $y = kx + b$  в точке  $x_0$

$$1. f(x_0) = kx_0 + b$$

$$2. f(x_0 + \Delta x) = k(x_0 + \Delta x) + b$$

$$3. \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = k(x_0 + \Delta x) + b - (kx_0 + b) = \\ = kx_0 + k \cdot \Delta x + b - kx_0 - b = k \cdot \Delta x$$

$$4. \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{k \cdot \Delta x}{\Delta x} = k$$

$$5. \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (k) = k$$

$$(kx + b)' = k$$

# Примеры

2. Найти производную функции  $y = C$  ( $C$  – const) в точке  $x_0$

$$1. f(x_0) = C$$

$$2. f(x_0 + \Delta x) = C$$

$$3. \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = C - C = 0$$

$$4. \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$$

$$5. \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$(C)' = 0$$

# Примеры

3. Найти производную функции  $y = x^2$  в точке  $x_0$

$$1. f(x_0) = (x_0)^2$$

$$2. f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2$$

$$3. \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - (x_0)^2 = \\ = x_0^2 + 2x_0 \cdot \Delta x + \Delta x^2 - x_0^2 = 2x_0 \cdot \Delta x + \Delta x^2$$

$$4. \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{2x_0 \cdot \Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

$$5. \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

$$(x^2)' = 2x$$



# Примеры

4. Найти производную функции  $y = \sqrt{x}$  в точке  $x_0$

$$1. f(x_0) = \sqrt{x_0}$$

$$2. f(x_0 + \Delta x) = \sqrt{x_0 + \Delta x}$$

$$3. \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0} =$$

$$= \frac{(\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} = \frac{(\sqrt{x_0 + \Delta x})^2 - (\sqrt{x_0})^2}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} =$$

$$= \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}$$

$$4. \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x (\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}$$

# Примеры

4. Найти производную функции  $y = \sqrt{x}$  в точке  $x_0$

$$4. \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x (\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}$$

$$5. \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

# Примеры

5. Найти производную функции  $y = 1/x$  в точке  $x_0$

$$1. f(x_0) = \frac{1}{x_0}$$

$$2. f(x_0 + \Delta x) = \frac{1}{x_0 + \Delta x}$$

$$3. \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0} =$$
$$= \frac{x_0 - (x_0 + \Delta x)}{x_0(x_0 + \Delta x)} = \frac{-\Delta x}{x_0^2 + x_0 \cdot \Delta x}$$

$$4. \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x(x_0^2 + x_0 \cdot \Delta x)} = \frac{-1}{x_0^2 + x_0 \cdot \Delta x}$$

# Примеры

5. Найти производную функции  $y = 1/x$  в точке  $x_0$

$$4. \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x (x_0^2 + x_0 \cdot \Delta x)} = \frac{-1}{x_0^2 + x_0 \cdot \Delta x}$$

$$5. \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{-1}{x_0^2 + x_0 \cdot \Delta x} \right) = -\frac{1}{x_0^2}$$

$$\left( \frac{1}{x} \right)' = -\frac{1}{x^2}$$

# Таблица производных

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$C$	$0$	$\sqrt{x}$	$1/(2\sqrt{x})$
$kx + b$	$k$	$e^x$	$e^x$
$x^2$	$2x$	$a^x$	$a^x \ln a$
$x^n$	$nx^{n-1}$	$\operatorname{tg} x$	$1/\cos^2 x$
$1/x$	$-1/x^2$	$\operatorname{ctg} x$	$-1/\sin^2 x$
$\sin x$	$\cos x$	$\ln x$	$1/x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\log_a x$	$1/(x \ln a)$

# Физический ( механический ) СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

Если при прямолинейном движении путь  $s$ , пройденный точкой, есть функция от времени  $t$ , т.е.  $s = s(t)$ , то **скорость** точки есть **производная** от пути по времени, т.е.  $v(t) = s'(t)$ .

**Производная** выражает **мгновенную скорость** в момент времени  $t$ .

# Правила нахождения производной

1. Если функции  $u(x)$  и  $v(x)$  имеют в точке  $x$  производные, то их сумма  $u(x) + v(x)$  также имеет в этой точке производную, причем

$$(u + v)' = u' + v'$$

2. Если функция  $u(x)$  имеет в точке  $x$  производную и  $C$  – данное число, то функция  $C \cdot u(x)$  также имеет в этой точке производную, причем

$$(Cu)' = C \cdot u'$$

# Правила нахождения производной

3. Если функции  $u(x)$  и  $v(x)$  имеют в точке  $x$  производные, то их произведение  $u(x) \cdot v(x)$  также имеет в этой точке производную, причем

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

4. Если функция  $v(x)$  имеет в точке  $x$  производную и  $v(x) \neq 0$ , то функция  $\frac{1}{v(x)}$  также имеет в этой точке производную, причем

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$



# Правила нахождения производной

5. Если функции  $u(x)$  и  $v(x)$  имеют в точке  $x$  производные и  $v(x) \neq 0$ , то функция  $\frac{u(x)}{v(x)}$  также имеет в этой точке производную, причем

$$\left( \frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$



# Производная сложной функции

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

## Примеры:

$$1. ((5x - 3)^3)' = 3(5x - 3)^2 \cdot (5x - 3)' = \\ = 3(5x - 3)^2 \cdot 5 = 15(5x - 3)^2$$

$$2. (\sin(4x + 8))' = \cos(4x + 8) \cdot (4x + 8)' = \\ = \cos(4x + 8) \cdot 4 = 4 \cos(4x + 8)$$



*Если функция имеет производную (дифференцируема) в точке  $x$ , то она непрерывна в этой точке.*