

Тема 4. Математические модели систем связи и управления

Практическое занятие 2. Марковские модели процессов функционирования систем связи и управления

Учебные вопросы:

1. Моделирование процессов функционирования систем связи цепями Маркова.
2. Управляемые цепи Маркова с доходами.

1. Моделирование процессов функционирования систем связи цепями

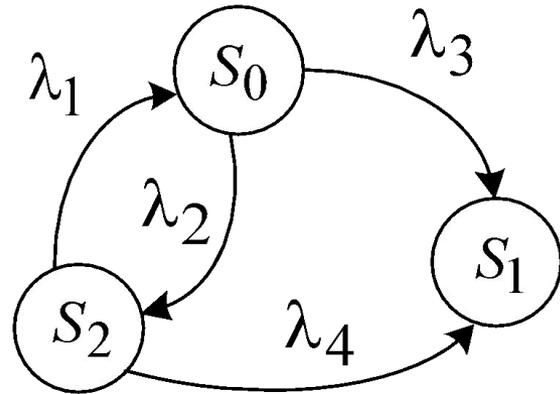
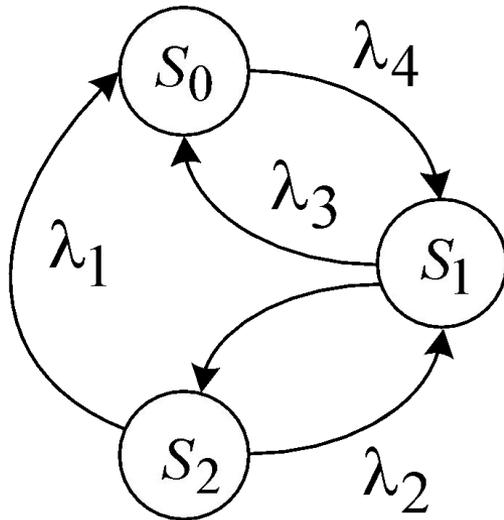
Маркова

Задача 1. Сформировать матрицу одношаговых переходных вероятностей для наблюдаемой двоичной последовательности на выходе помехоустойчивого кодера

0 1 1 0 0 1 1 1 0 1 0 1 0 0 1 1 0 1 0 0

1 0 1 1 0 0 1 0 0 1 1 0 0 0 1 1 1 1 0 1

Задача 2. Определить финальные вероятности состояний цепи Маркова



Задача 3. Пусть с периодичностью один час проводится анализ состояния направления связи, находящегося под воздействием узкополосной помехи. В случае нахождения его в неподавленном состоянии (вероятность ошибки приема символа ниже допустимой) методы помехозащиты не используются. При этом вероятность остаться в неподавленном (первом) состоянии на следующем шаге равна 0,8, а вероятность перейти в подавленное состояние – 0,2.

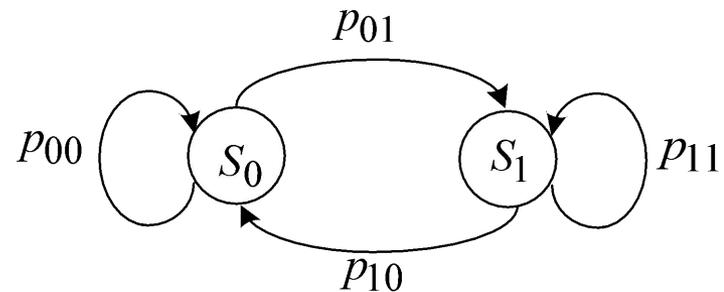
Вариант 1. Если направление оказалось подавленным помехой (второе состояние) на k -м шаге, то предусматривается перестройка передатчика на резервную частоту, обеспечивающий переход в первое состояние с вероятностью 0,9.

Вариант 2. Если направление оказалось подавленным помехой (второе состояние) на k -м шаге, то предусматривается использование модемного компенсатора помех, обеспечивающий переход в первое состояние с вероятностью 0,6.

Определить:

1. Значения вектора вероятностей состояний процесса на 1, 2, 3 шаг.
2. Вектор финальных вероятностей состояний процесса.

$$\vec{P}(0) = (1 \ 0)^T \quad P_{ij}(1/0) = \begin{vmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,9 & 0,1 \end{vmatrix}$$



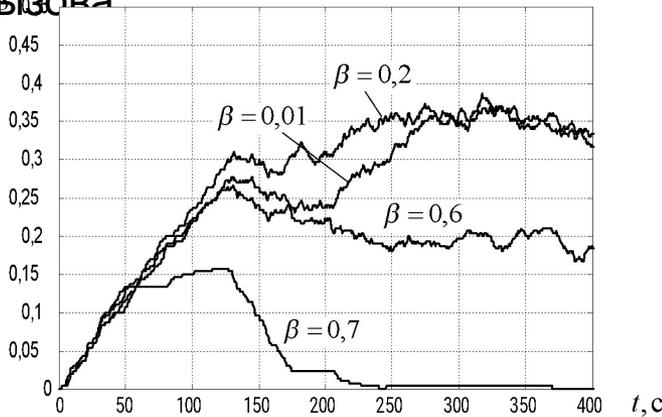
$$\vec{P}(0) = (1 \ 0)^T \quad P_{ij}(1/0) = \begin{vmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{vmatrix}$$

$$\vec{P}(k) = ? \quad k = 1, 2, 3. \quad \vec{P}(\infty) = ?$$

Марковская модель процесса обслуживания статусных сообщений РЭС в канале сетевого доступа S-ALOHA

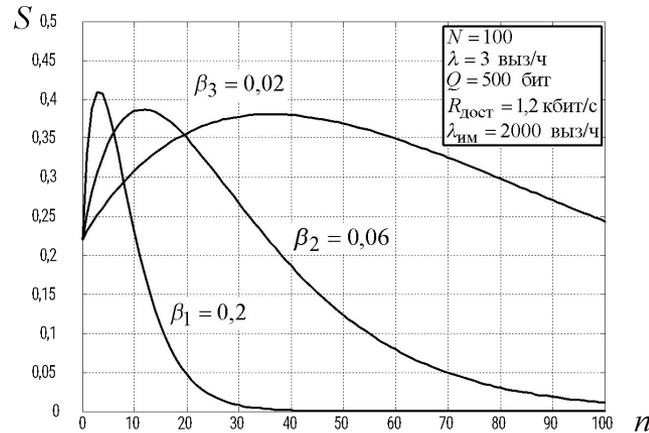
Исходные данные для моделирования:

количество абонентов $N = 100$
 интенсивность поступления статусных сообщений $\lambda_s = 3$ сообщ/ча
 скорость передачи в канале $R_{ch} = 1,2$ кбит/с
 объем статусного сообщения $Q_s = 500$ бит
 вероятность передачи имитационного вызова $\alpha_{им} = 0,2$
 коэффициент повторения β



Производительность канала доступа в случае стационарных параметров потока сообщений

$\lambda_s = 3$ сообщ/ча
 $R_{ch} = 1,2$ кбит/с
 $Q_s = 500$ бит
 $\alpha_{им} = 0,2$



Производительность канала доступа при различных стратегиях повторной передачи вызовов

Уровень суммарного трафика в канале

$$G = (N - n)\alpha + n\beta + \alpha_{им}$$

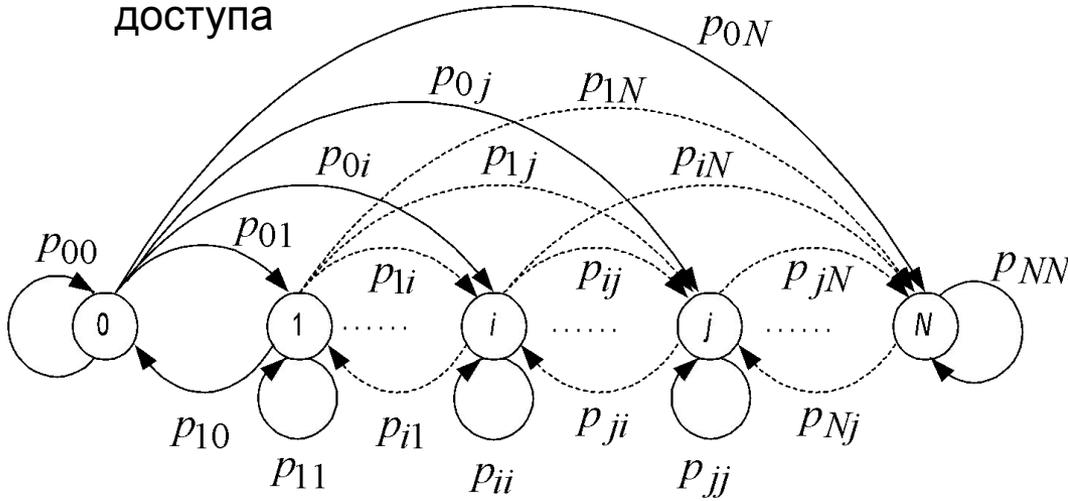
Вероятность передачи очередного (нового) сообщения

$$\alpha = \lambda_s T_s = \lambda_s \frac{Q_s}{R_{ch}}$$

Коэффициент использования (производительность) канала

$$S = (1 - \beta)^n (N - n) \alpha (1 - \alpha)^{N - n - 1} (1 - \alpha_{им}) + n \beta (1 - \beta)^{n - 1} (1 - \alpha)^{N - n} (1 - \alpha_{им}) + \alpha_{им} (1 - \beta)^n (1 - \alpha)^{N - n}$$

Диаграмма состояний и переходов в канале доступа



$$p_{i(k-1)j(k)} = \sum_{m_1=0}^{N-i} \sum_{m_2=0}^i \sum_{m_3=0}^1 p(A_{m_1})p(B_{m_2})p(C_{m_3})$$

$$p_{34} = p(A_1)p(B_0)p(C_1) + p(A_1)p(B_1)p(C_0) + p(A_1)p(B_1)p(C_1) +$$

$$+ p(A_1)p(B_2)p(C_0) + p(A_1)p(B_2)p(C_1) + p(A_1)p(B_3)p(C_0) +$$

$$+ p(A_1)p(B_3)p(C_1) = p(A_1)p(B_0)p(C_1) + \sum_{m_2=1}^j p(A_1)p(B_{m_2})$$

$n(k-1)$	$n(k)$	$p(A_{m_1})p(B_{m_2})p(C_{m_3})$
3	2	$p(A_0)p(B_1)p(C_0)$
	3	$p(A_0)p(B_0)p(C_0)$
	3	$p(A_0)p(B_0)p(C_1)$
	3	$p(A_0)p(B_1)p(C_1)$
	3	$p(A_0)p(B_2)p(C_1)$
	3	$p(A_0)p(B_3)p(C_1)$
	3	$p(A_1)p(B_0)p(C_0)$
	4	$p(A_1)p(B_0)p(C_1)$
	4	$p(A_1)p(B_1)p(C_0)$
	4	$p(A_1)p(B_1)p(C_1)$
	4	$p(A_1)p(B_2)p(C_0)$
	4	$p(A_1)p(B_2)p(C_1)$
	4	$p(A_1)p(B_3)p(C_0)$
	4	$p(A_1)p(B_3)p(C_1)$
	5	$p(A_2)p(B_0)p(C_0)$
	5	$p(A_2)p(B_0)p(C_1)$
	5	$p(A_2)p(B_1)p(C_0)$
	5	$p(A_2)p(B_1)p(C_1)$
	5	$p(A_2)p(B_2)p(C_0)$
	5	$p(A_2)p(B_2)p(C_1)$
5	$p(A_2)p(B_3)p(C_0)$	
5	$p(A_3)p(B_3)p(C_1)$	

$$p(A_{m_1}) = C_N^{m_1} \alpha^{m_1} (1 - \alpha)^{N - m_1} \quad m_1 \in \{0, 1, \dots, N - n\}$$

$$p(B_{m_2}) = C_N^{m_2} \beta^{m_2} (1 - \beta)^{N - m_2} \quad m_2 \in \{0, 1, \dots, N\}$$

$$p(C_{m_3}) = C_1^{m_3} \alpha_{\text{иМ}}^{m_3} (1 - \alpha_{\text{иМ}})^{N - m_3} \quad m_3 \in \{0, 1\}$$

Переходные вероятности состояний в канале доступа

1. При $j - i = 0$ и $j = 0$

$$p_{ij} = (1 - \alpha)^N + N\alpha(1 - \alpha)^{N-1}(1 - \alpha_{\text{иМ}}).$$

2. При $j - i = 0$ и $1 \leq i \leq N - 2$

$$p_{ij} = (1 - \alpha)^{N-i} \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq 1}}^i C_i^m \beta^m (1 - \beta)^{i-m} + (N - i)\alpha(1 - \alpha)^{N-i-1}(1 - \beta)^i \times \\ \times (1 - \alpha_{\text{иМ}}) + (1 - \alpha)^{N-i} i\beta(1 - \beta)^{i-1}\alpha_{\text{иМ}}.$$

3. При $j-i=0$ и $i=N-1$

$$p_{ij} = (1-\alpha) \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq 1}}^i C_i^m \beta^m (1-\beta)^{i-m} + \alpha (1-\beta)^i (1-\alpha_{\text{ИМ}}) + \\ + (1-\alpha) i \beta (1-\beta)^{i-1} \alpha_{\text{ИМ}}.$$

4. При $j-i=0$ и $i=N$

$$p_{ij} = \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq 1}}^i C_i^m \beta^m (1-\beta)^{i-m} + i \beta (1-\beta)^{i-1} \alpha_{\text{ИМ}}.$$

5. При $j-i=1$ и $i=0$

$$p_{ij} = N \alpha (1-\alpha)^{N-1} \alpha_{\text{ИМ}}.$$

6. При $j-i=1$ и $1 \leq i \leq N-2$

$$p_{ij} = (N-i) \alpha (1-\alpha)^{N-i-1} \left(\sum_{m=1}^i C_i^m \beta^m (1-\beta)^{i-m} + (1-\beta)^i \alpha_{\text{ИМ}} \right).$$

7. При $j-i=1$ и $i=N-1$

$$p_{ij} = \alpha \left(\sum_{m=1}^i C_i^m \beta^m (1-\beta)^{i-m} + (1-\beta)^i \alpha_{\text{ИМ}} \right).$$

8. При $j-i=-1$ и $1 \leq i \leq N-1$

$$p_{ij} = (1-\alpha)^{N-i} i \beta (1-\beta)^{i-1} (1-\alpha_{\text{ИМ}}).$$

9. При $j-i=-1$ и $i=N$

$$p_{ij} = N \beta (1-\beta)^{N-1} (1-\alpha_{\text{ИМ}}).$$

10. При $j-i \geq 2$ и $2 \leq j \leq N-1$

$$p_{ij} = C_{N-i}^{j-i} \alpha^{j-i} (1-\alpha)^{N-j}.$$

11. При $j-i \geq 2$ и $j=N$

$$p_{ij} = \alpha^{j-i}.$$

Уравнение

Маркова

$$P(k) = P_{ij}^T \quad \boxtimes \quad \boxtimes$$

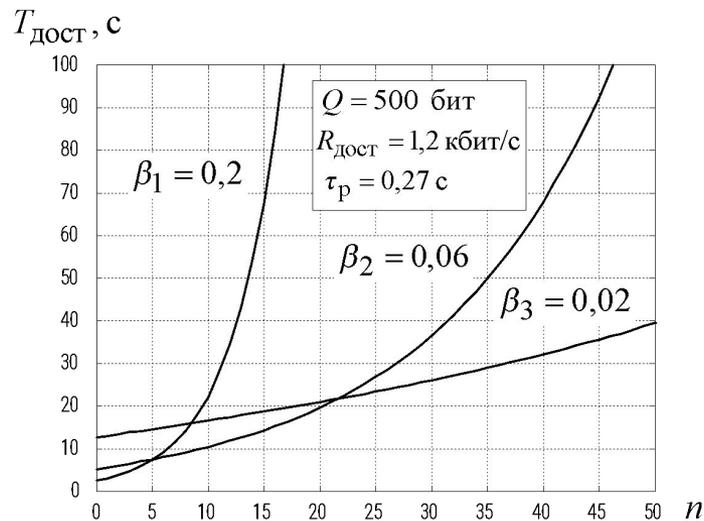
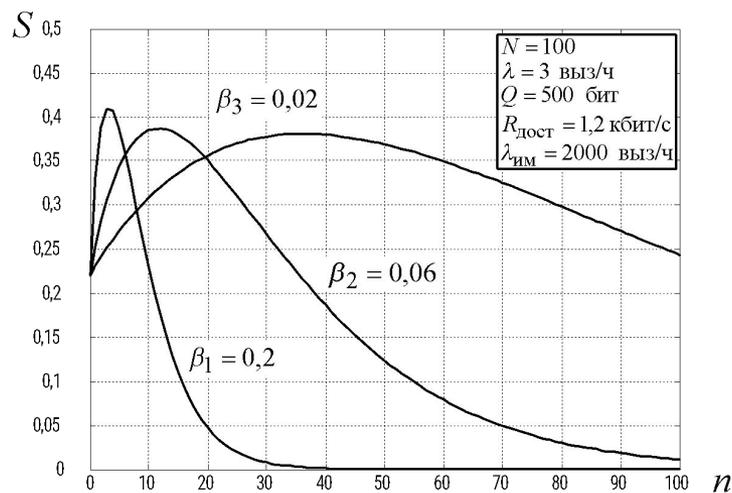
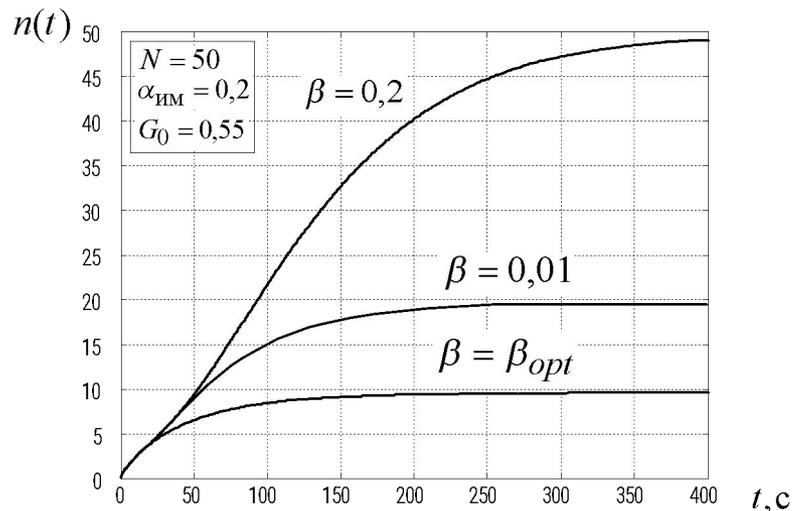
$$P(k) = P_{ij} (1/0)P(k-1)$$

Средняя задолженность
канала

$$\bar{n}(k) = \sum_{n=0}^N n \cdot p_n(k)$$

Среднее время передачи статусного
сообщения

$$T_{\text{дост}} = \tau_p + \tau_{\text{обр}} + M_{\text{повт}} \left[2\tau_p + \tau_{\text{обр}} + \frac{\tau_{\text{обр}}(L+1)}{2} \right] \quad L = \frac{1}{\beta}$$



Список рекомендуемой литературы:

1. Стратонович Р. Л. Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. Изд. МГУ. 1965 г. - 319 с.
2. Карманов А. В. Исследование управляемых конечных Марковских цепей с неполной информацией (минимаксный подход). М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 176 с.
3. Майн Х., Осаки С. Марковские процессы принятия решений. М.: Наука, 1977. - 176 с.
4. Скороход А. В. I. Вероятность. Основные понятия. Структура. Методы. II. Марковские процессы и вероятностные приложения в анализе. III. Вероятность. Прикладные аспекты. 279 с.
5. Дынкин Е. Б., Юшкевич А. А. Управляемые марковские процессы и их приложения. М.: Наука, 1975. – 338 с., ил.
6. Дынкин Е. Б. Марковские процессы, М.: Физматлит, 1963 г. – 860 с.
7. Шелухин О. И., Тенякшев А. М., Осин А. В. Моделирование информационных систем. Под ред. О. И. Шелухина. Учебное пособие. – М.: Радиотехника, 2005. – 368 с., ил.