

Дискретная математика

ГЛАВА 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

ЛЕКЦИЯ 1

§ 1. МНОЖЕСТВО

Эта глава, по существу, служит развернутым словарем для всех остальных глав. Любое понятие дискретной математики можно определить с помощью понятия множества.

- Понятие «множество» относится к исходным понятиям математической теории и не является строго определяемым. Его синонимами являются «совокупность», «семейство», «класс», «система», «собрание» и др.
- Георг Кантор (1845–1918), немецкий математик, создатель теории множеств, дал такое определение: «под множеством понимают объединение в одно общее объектов, хорошо различаемых нашей интуицией или нашей мыслью».



Основатель
теории
множеств
Георг Кантор

**«Множество
есть многое,
мыслимое нами
как единое»**

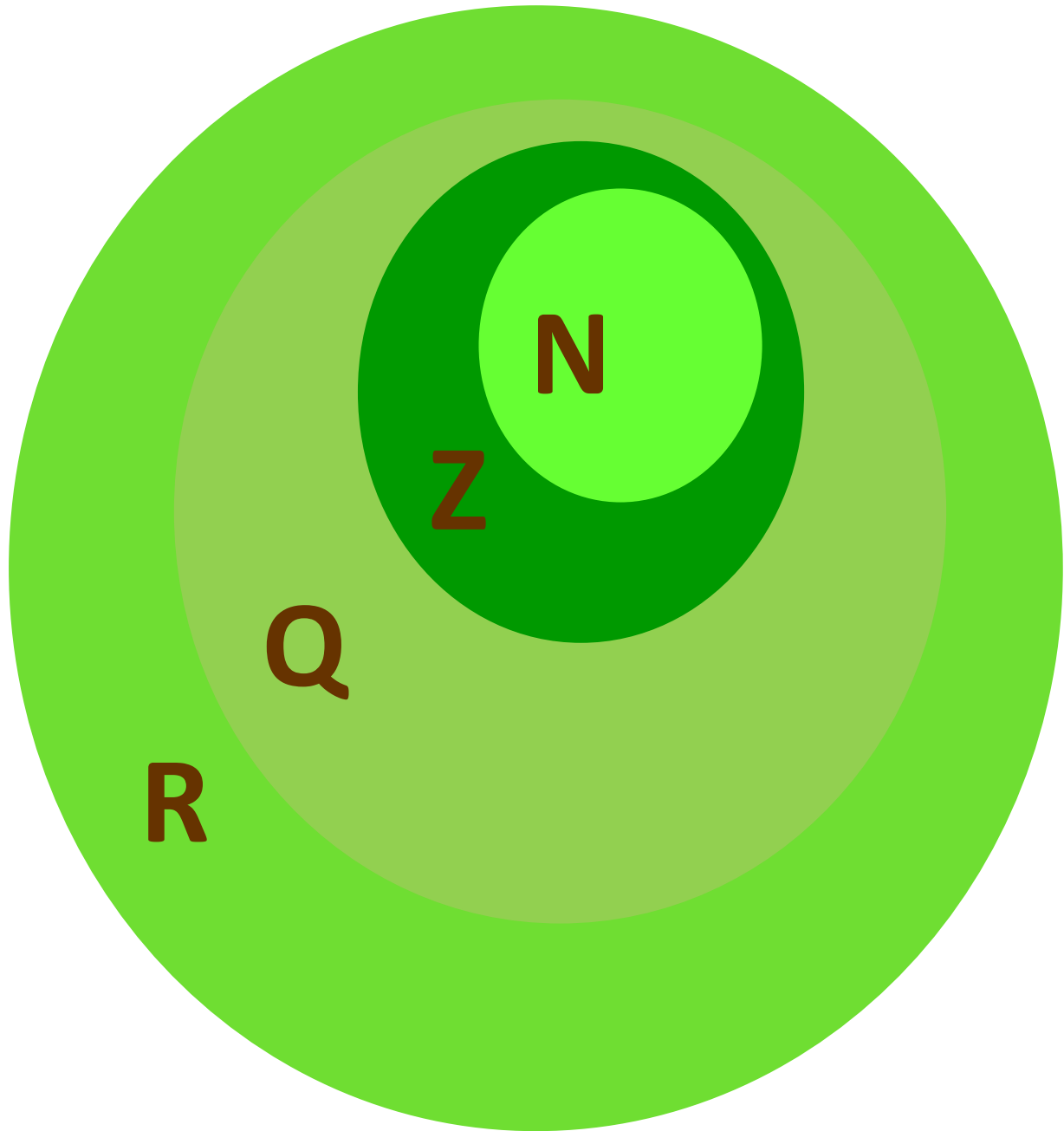
- множество столов в комнате;
- множество всех атомов на Марсе;
- множество всех рыб в океане;
- множество футболистов команды «Звезда»
- множество всех футбольных команд

В математике

- множество точек (например, окружности),
- множество всех решений уравнения $\sin x = 0,5$

Для числовых множеств будем использовать следующие обозначения:

- **N** – множество натуральных чисел
- **Z** – множество целых чисел
- **Q** – множество рациональных чисел
- **R** – множество действительных чисел
- **C** – множество комплексных чисел



Объекты, составляющие данное множество, называют его **элементами**. При этом никаких ограничений на природу элементов множества не накладывается. Предполагается только, что для **любых двух элементов** данного множества имеется возможность выяснить, **различны они или одинаковы**.

-
- Множество называется **конечным**, если оно состоит из конечного числа элементов, и **бесконечным** — в противоположном случае.
- Множество, не содержащее ни одного элемента называется **пустым** и обозначается - \emptyset .

Способы задания множеств

- *полный список (полный перечень) элементов*

$$\mathbf{A} = \{a_1, \dots, a_n\}.$$

- *задание с помощью характеристического свойства множества A ,*

$$\mathbf{A} = \{x \mid P(x)\} \text{ или } \mathbf{A} = \{x: P(x)\}.$$

- *порождающая процедура.*

$$\mathbf{A} = \{n \mid \text{for } n \text{ from } 1 \text{ to } 10 \text{ yield } n\}$$

Определение 1.1.

Пусть A и B – непустые множества. Если каждый элемент множества A является вместе с тем и элементом множества B , то говорят что A – **подмножество множества B** (или A содержится в B , или B содержит A , или A включено в B) и обозначают $A \subseteq B$.

По определению пустое множество \emptyset есть подмножество любого множества B , в том числе и пустого.

Например, выполняются следующие включения для рассмотренных выше числовых множеств:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

Определение 1.2.

Пусть **A** и **B** – два множества. Множества **A** и **B** называются *равными*, если каждый элемент множества **A** является вместе с тем и элементом множества **B**, и обратно, каждый элемент множества **B** является и элементом множества **A**.

Другими словами, множества **A** и **B** называются равными, если выполняются два включения: $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

**Докажем, что пустое множество
единственно.**

Действительно, пусть \emptyset_1 и \emptyset_2 – два пустых множества. Так как для любого множества A имеем, что $\emptyset \subseteq A$, то взяв в качестве A множество \emptyset_1 , получим $\emptyset_2 \subseteq \emptyset_1$, а взяв в качестве A множество \emptyset_2 , получим $\emptyset_1 \subseteq \emptyset_2$. Отсюда $\emptyset_1 = \emptyset_2$.

Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то A называют *собственным подмножеством множества B* и обозначают $A \subset B$. Введенное отношение \subset называется *отношением строго* включения.

Например, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Определение 1.3.

Пусть A – непустое множество.

Совокупность всех подмножеств множества A обозначим через $B(A)$ и будем называть **булеаном множества A** . Ясно, что $\emptyset \in P(A)$ и $A \in P(A)$.

Например, если $A = \{a, b\}$,

то $B(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, A\}$.

Число элементов конечного множества A будем называть его мощностью и обозначать $|A|$. Пусть, например, $|A| = n$, тогда мощность $|B(A)| = 2^n$.

§2. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

Во всех рассуждениях о нескольких множествах будем предполагать, что они являются подмножествами некоторого фиксированного множества, которое назовем *универсальным, универсумом или пространством* и будем обозначать: **U** (или **E**).

Определение 2.1.

Пересечением множеств A и B

называется множество, обозначаемое $A \cap B$ и состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат как множеству A так и множеству B .

Это определение символически можно записать так:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \ \& \ x \in B\}.$$

Примеры:

- $\{1,2,5\} \cap \{1,5,6\} = \{1,5\};$
- $\{1,3\} \cap \{2,4,5\} = \emptyset.$

Определение 2.2.

Объединением множеств A и B называется множество, обозначаемое **$A \cup B$** и состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств **A, B** .

Это определение символически можно записать так:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

Пример:

$$\{1,2\} \cup \{2,3,4,5\} = \{1,2,3,4,5\}.$$

Определение 2.3.

Разностью множеств A и B называется множество, обозначаемое $A \setminus B$ и состоящее из элементов, принадлежащих множеству A и не принадлежащих множеству B .

Это определение символически можно записать так:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \ \& \ x \notin B\}.$$

Пример:

Если A – множество всех действительных чисел, B – множество всех рациональных чисел, то $A \setminus B$ – множество всех иррациональных чисел.

Определение 2.4.

Пусть A – подмножество множества U . **Дополнением множества A** в множестве U называют множество, состоящее из всех тех и только тех элементов из U , которые не принадлежат A , и обозначают \bar{A} .

Это определение символически можно записать так:

$$\bar{A} = \{x \mid x \in U \ \& \ x \notin A\}.$$

Примеры:

- если U – множество всех целых чисел, A – множество всех четных чисел, то \bar{A} – множество всех нечетных чисел.
- если U – множество всех людей, A – множество всех мужчин, то \bar{A} – множество всех женщин.

Определение 2.5.

Симметрической разностью множеств A и B называют множество, обозначаемое **$A\Delta B$** и состоящее из элементов, принадлежащих множеству **A** или множеству **B** не принадлежащих множеству **$A\cap B$** .

Это определение символически можно записать так:

$$A\Delta B = \{x \mid x \in A \vee x \in B \wedge x \notin A\cap B\}.$$

Замечание. Симметрическую разность множеств **A** и **B** называют иногда *кольцевой суммой* и обозначают **$A\oplus B$** .

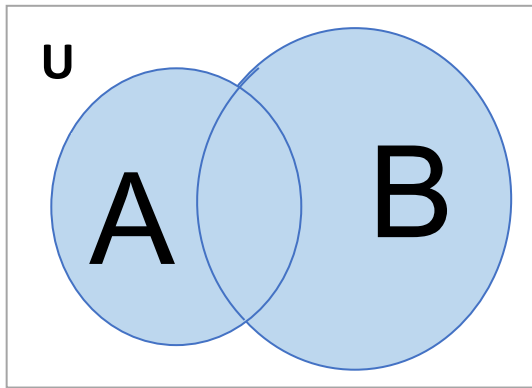
- Введенные операции объединения, пересечения, разности и симметрической разности являются *двуместными*. Операция дополнения является *одноместной*.
- Рассмотренные операции над множествами допускают очень наглядное графическое истолкование с помощью так называемых кругов Эйлера (или диаграмм Венна).

Леонард Эйлер — швейцарский, немецкий и российский математик, внёсший значительный вклад в развитие математики, а также механики, физики, астрономии и ряда прикладных наук.

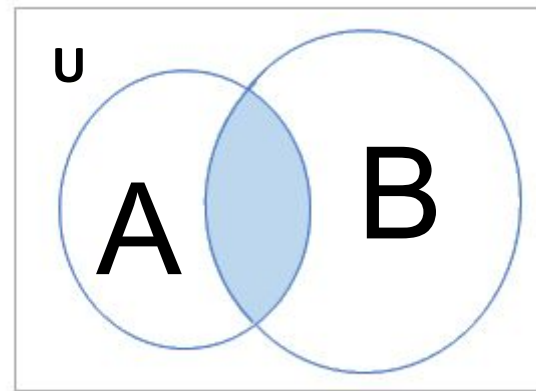


1	48	31	50	33	16	63	18
30	51	46	3	62	19	14	35
47	2	49	32	15	34	17	64
52	29	4	45	20	61	36	13
5	44	25	56	9	40	21	60
28	53	8	41	24	57	12	37
43	6	55	26	39	10	59	22
54	27	42	7	58	23	38	11

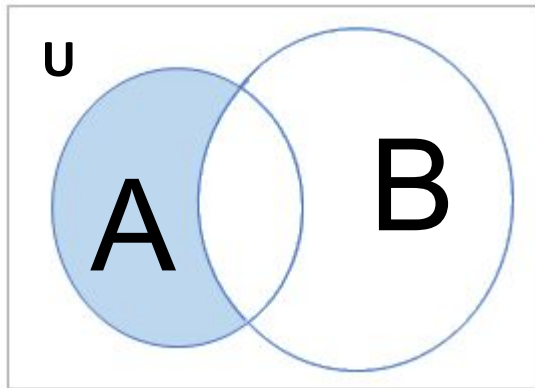




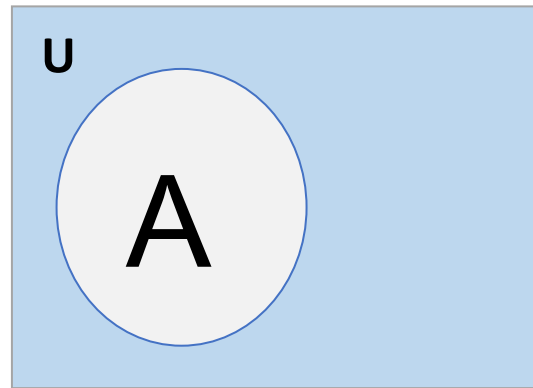
a) $A \cup B$



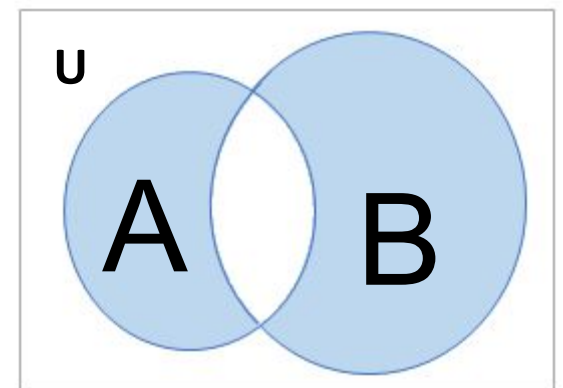
b) $A \cap B$



c) $A \setminus B$



d) \bar{A}



e) $A \Delta B$

§3. АЛГЕБРА ПОДМНОЖЕСТВ

Пусть $\mathbf{B}(E)$ - совокупность всех подмножеств множества E . $\mathbf{B}(E)$ замкнуто относительно операций объединения, пересечения и дополнения множеств, т.е. производя эти операции над элементами множества $\mathbf{B}(E)$, получаем элементы, принадлежащие $\mathbf{B}(E)$. Множество $\mathbf{B}(E)$ с введенными операциями объединения, пересечения и дополнения называют **булевой алгеброй подмножеств множества E** .

Подобно тому, как сложение и умножение чисел удовлетворяют известным законам коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности, операции объединения, пересечения и дополнения в алгебре подмножеств подчинены аналогичным законам, а также ряду других.

Замечание. Формальное изучение этих законов восходит к английскому математику Дж. Булю (1815-1864).

$$1) \quad \overline{\overline{A}} = A;$$

$$2) \quad A \cap B = B \cap A; \left. \vphantom{2)} \right\}$$

$$3) \quad A \cup B = B \cup A; \left. \vphantom{3)} \right\}$$

$$4) \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C); \left. \vphantom{4)} \right\}$$

$$5) \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C); \left. \vphantom{5)} \right\}$$

$$6) \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C); \left. \vphantom{6)} \right\}$$

$$7) \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C); \left. \vphantom{7)} \right\}$$

$$8) \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}; \left. \vphantom{8)} \right\}$$

$$9) \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}; \left. \vphantom{9)} \right\}$$

$$10) \quad A \cap A = A; \left. \vphantom{10)} \right\}$$

$$11) \quad A \cup A = A; \left. \vphantom{11)} \right\}$$

$$12) \quad A \cap E = A;$$

$$13) \quad A \cap \emptyset = \emptyset;$$

$$14) \quad A \cap \overline{A} = \emptyset;$$

$$15) \quad A \cap \overline{A} = \emptyset.$$

$$16) \quad A \cap (A \cap B) = A \cap B; \left. \vphantom{16)} \right\}$$

$$17) \quad A \cup (A \cup B) = A \cup B; \left. \vphantom{17)} \right\}$$

Универсальным методом доказательства вышеприведенных равенств является доказательство, основанное на определении равенств двух множеств.

Например, чтобы доказать 7), достаточно проверить два включения:

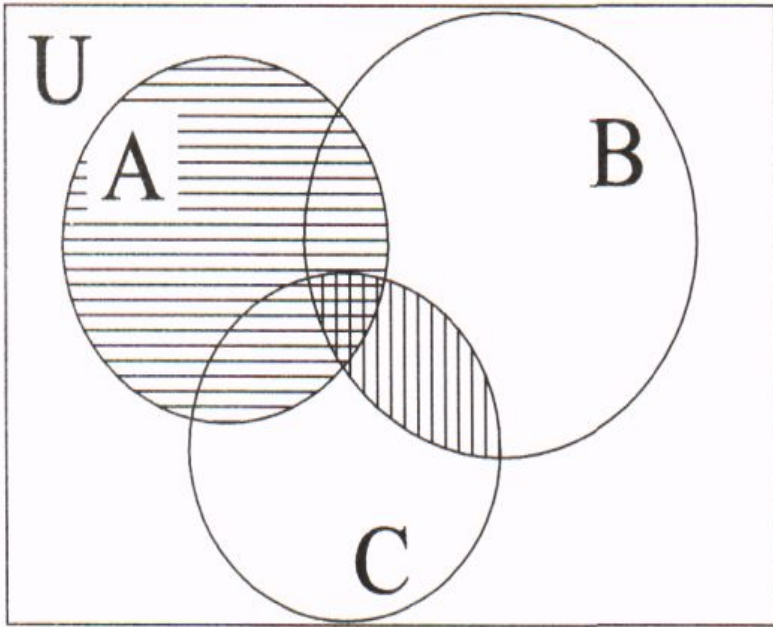
$$7a) \mathbf{A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C);}$$

$$7б) \mathbf{(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C).}$$

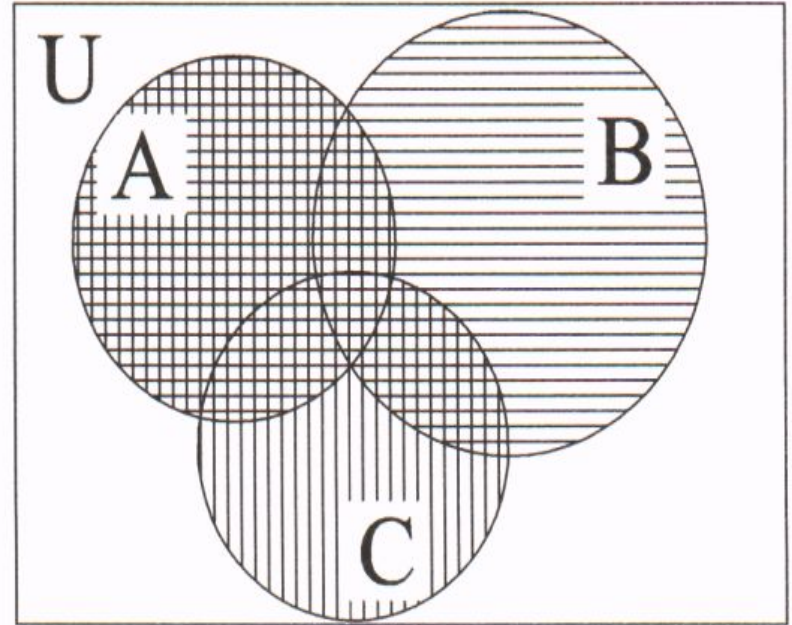
Доказательство 7а

Пусть $x \in A \cup (B \cap C)$. Тогда $x \in A$, или $x \in B \cap C$. Если $x \in A$, то $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$, а следовательно, x является элементом пересечения этих множеств. Если $x \in B \cap C$, то $x \in B$ и $x \in C$. Значит, $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$, так что и в этом случае x есть элемент их пересечения.

Пусть $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Тогда $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$. Следовательно, $x \in A$ или же $x \in B$ и $x \in C$. Из этого вытекает, что $x \in A \cup (B \cap C)$.



$$A \cup (B \cap C)$$



$$(A \cup B) \cap C$$

§4. Декартово произведение множеств

*Декартовым произведением непустых множеств **A** и **B*** называется совокупность всех упорядоченных пар вида (a, b) , где $a \in A$, $b \in B$.

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A, b \in B \}$$

Если хотя бы одно из множеств **A** или **B** пусто, то их декартовым произведением будем называть пустое множество.

- Пусть, например, $\mathbf{A} = \{a_1, a_2\}$, $\mathbf{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$.
Тогда $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \{(a_1, b_1); (a_1, b_2); (a_1, b_3); (a_2, b_1); (a_2, b_2); (a_2, b_3)\}$.
- Если $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, то $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ называют *декартовым квадратом множества \mathbf{A}* и обозначают \mathbf{A}^2 .
- Пусть, например, $\mathbf{A} = \{a_1, a_2\}$.
Тогда $\mathbf{A}^2 = \{(a_1, a_1); (a_1, a_2); (a_2, a_1); (a_2, a_2)\}$.

§5. Бинарные отношения

Определение 5.1.

*Бинарным отношением, определенным на паре множеств **A** и **B**, называется любое подмножество их декартова произведения **A** × **B**.*

Пусть $\mathbf{A} = \{a_1, a_2\}$, $\mathbf{B} = \{b_1, b_2\}$. Выпишем все бинарные отношения, определенные на паре множеств \mathbf{A} , \mathbf{B} , т.е. все подмножества множества $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$. Их число равно $2^4 = 16$:

$$R_1 = \emptyset; R_2 = \{(a_1, b_1)\}; R_3 = \{(a_2, b_2)\};$$

$$R_4 = \{(a_2, b_1)\}; R_5 = \{(a_2, b_2)\};$$

$$R_6 = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2)\};$$

$$R_7 = \{(a_1, b_1), (a_2, b_1)\}; R_8 = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2)\};$$

$$R_9 = \{(a_1, b_2), (a_2, b_1)\}; R_{10} = \{(a_1, b_2), (a_2, b_2)\};$$

$$R_{11} = \{(a_2, b_1), (a_2, b_2)\};$$

$$R_{12} = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1)\};$$

$$R_{13} = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_2)\};$$

$$R_{14} = \{(a_1, b_1), (a_2, b_1), (a_2, b_2)\};$$

$$R_{15} = \{(a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_2)\}; R_{16} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}.$$

Пусть R — бинарное отношение, определенное на паре множеств A, B .

- *Областью определения отношения R* называется совокупность всех таких a , что хотя бы для одного b пара (a, b) принадлежит $A \times B$.
- *Областью значений отношения R* называют множество всех таких b , что хотя бы для одного элемента a пара (a, b) принадлежит $A \times B$.

Область определения бинарного отношения $\{(2, 1), (2, 4), (3, 3), (3, 7)\}$ — множество $\{2, 3\}$, а область значений — $\{1, 3, 4, 7\}$.

Пусть $\mathbf{A} = \{1, 2, 3\}$, $\mathbf{B} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

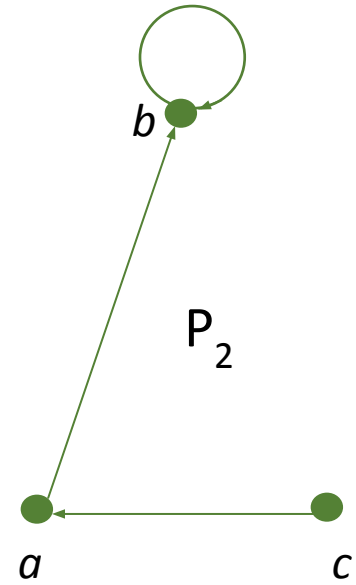
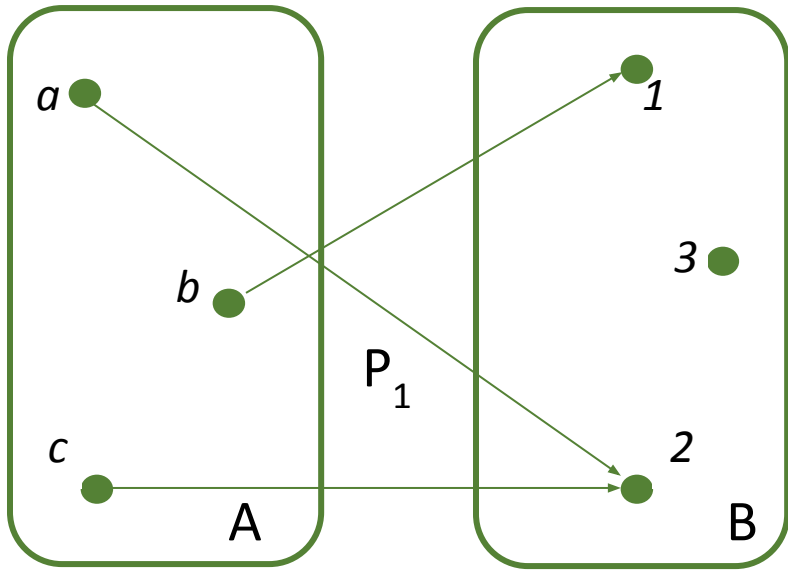
Следующее подмножество множества

$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \{(1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (1, 5); (1, 6); (1, 7); (2, 2); (2, 4); (2, 6); (3, 3); (3, 6)\}$ может быть задано короче (словесно) как отношение

« a является делителем b ».

Область определения этого отношения совпадает с \mathbf{A} , а область значений - с \mathbf{B} .

ГРАФИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ



§ 6. N - арные отношения

Декартовым произведением непустых множеств A_1, \dots, A_n называется совокупность всех n -ок вида (a_1, \dots, a_n) , где $a_i \in A_i$ ($i = 1, \dots, n$), и обозначается $A_1 \times \dots \times A_n$. Если хотя бы одно из множеств A_1, \dots, A_n пустое, то декартовым произведением множеств A_1, \dots, A_n будем называть пустое множество. Другими словами, $A_1 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i, i = 1, \dots, n\}$.

Если $A_1 = \dots = A_n$, то $A_1 \times \dots \times A_n$ называют n -й декартовой степенью множества A и обозначают A^n .

Примеры:

1. Пусть, например, $A = \{a, b, c\}$, $B = \{c, d\}$, $C = \{1, 2\}$.

Тогда $A \times B \times C = \{(a, c, 1), (a, d, 1), (a, c, 2), (a, d, 2), (b, c, 1), (b, d, 1), (b, c, 2), (b, d, 2), (c, c, 1), (c, d, 1), (c, c, 2), (c, d, 2)\}$.

2. Пусть $E = \{0, 1\}$, тогда

$E^3 = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$.

Пусть A_1, \dots, A_n — непустые множества. Всякое подмножество R их декартова произведения $A_1 \times \dots \times A_n$ называется **n -арным отношением**, определенным на системе множеств A_1, \dots, A_n .

Пример

Пусть:

- A – множество дней сессии,
- $B = \{8-00, 14-00\}$,
- C - множество аудиторий ИрГТУ,
- D - множество учебных групп ИрГТУ,
- E - множество учебных дисциплин, изучаемых в ИрГТУ,
- X - множество преподавателей ИрГТУ.

Тогда расписание экзаменов – 6-арное отношение, определенное на множестве $A \times B \times C \times D \times E \times X$.

§ 7. Специальные бинарные отношения

Определение 7.1.

Пусть A – произвольное множество. Множество $A \times A$ называют **универсальным отношением**, определенным на множестве A ; любая пара (a_1, a_2) , где $a_1, a_2 \in A$, находится в этом отношении, поэтому его называют **иногда всюду истинным отношением**.

Определение 7.2.

Пусть R – бинарное отношение на множестве A : $R \subseteq A^2$. Отношение R называется **тождественным или диагональю**, если $R = (a, a)$, где $a \in A$, и обозначается e_A или id_A .

Определение 7.3.

Пусть R – бинарное отношение на множестве A : $R \subseteq A^2$. Отношение R называется:

1. **рефлексивным**, если $(x, x) \in R$ для всех $x \in A$.
2. **симметричным**, если для любых $x, y \in A$ из $(x, y) \in R$ следует $(y, x) \in R$, т.е. $R^{-1} = R$,
3. **антисимметричным**, если из $(x, y) \in R$ и $(y, x) \in R$ следует $x=y$, т.е. $R \cap R^{-1} \subseteq \text{id}_A$.
4. **транзитивным**, если из $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in R$ следует $(x, z) \in R$, т.е. $R \circ R \subseteq R$.

Отметим, что антисимметричность не совпадает с несимметричностью.

Примеры:

- Отношение $P = \{(1,2), (2,3), (3,2)\}$ на множестве $A = \{1,2,3\}$ не симметрично.
- Тожественное отношение id_A является одновременно симметричным и антисимметричным.
- Отношение \leq на множестве \mathbf{R} , а также отношение включения подмножеств некоторого множества являются рефлексивными и транзитивными, но не являются симметричными.
- Отношение $<$ на множестве действительных чисел транзитивно, но не рефлексивно, не симметрично.
- Отношение « x является матерью y » не рефлексивно, не симметрично, не транзитивно.