Теоретические основы начального курса математики

Янкина Лариса Александровна, канд.пед.наук, доцент

Математика

– греч. ***mathēmatikē*** от ***màthēma*** – **знание, наука**

– **наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира**

Математика на педагогическом факультете

1. Общие понятия
2. Целые неотрицательные числа
3. Расширение понятия числа
4. Функции. Уравнения. Неравенства
5. Элементы геометрии
6. Величины

Основная литература

1. Стойлова, Л. П. Математика : учебное пособие для студентов сред. пед. заведений / Л. П. Стойлова. - М. : Академия, 2005. – 464 с
2. Стойлова, Л. П. Математика. Часть 1 / Л. П. Стойлова, Н. Я. Виленкин, Н. Н. Лаврова. – М. : Просвещение, 1990. – 175 с.
3. Лаврова, Н. Н. Задачник-практикум по математике / Н. Н. Лаврова, Л.П. Стойлова. - М. : Просвещение, 1985. – 183 с.
4. Задачи для контрольных работ по математике : для студентов фак. нач. классов пед. ин-тов / Л. П. Стойлова [и др.]. - М. : Просвещение, 1993. – 80 с.

Множества и операции над ними

1. Понятие множества и элемента множества
2. Способы задания множеств
3. Отношения между множествами
4. Операции над множествами

Понятие множества и элемента множества

Часто приходится рассматривать различные *группы* объектов как единое целое:

- **… птиц**
- **… рыб**
- **… марок, картин**
- **… сочинений**
- **… карандашей**

и т. д.

Все эти совокупности называют *множествами*

- **Множество – основное неопределяемое понятие математики**

Его поясняют на примерах.

Примерами множеств могут служить:

- ***множество государств Европы***
- ***множество птиц или животных множество студентов факультета педагогического и художественного образования***
- ***множество букв в алфавите***
- ***множество цифр в записи числа и т.д.***

Множества обозначают прописными буквами латинского алфавита:

A, B, C, …

Для некоторых множеств вводят специальные обозначения, символы:

N – множество натуральных чисел,

Z – множество целых чисел,

Q – множество рациональных чисел,

R – множество действительных чисел.

Множество не содержащее ни одного элемента называют *пустым* и обозначают символом $\varnothing$

Пример: A - множество птиц с двумя головами.

Пишут $A = \varnothing$.

Объекты, из которых образовано множество, называют его *элементами*.

Элементы множества принято обозначать строчными буквами латинского алфавита:

a, b, c, …

$\in$ - знак принадлежности элемента множеству

$a \in A$ $a \notin A$

Множества бывают *конечными* и *бесконечными*.

- **<u>Примеры</u>: 1) множество дней недели - … ,**

  2) множество точек на прямой -…

Множество может содержать и один элемент.

<u>Пример</u>: множество гласных букв в слове «шар»

Способы задания множеств

- **Существуют два способа задания множеств.**

1) перечислением всех его элементов

<u>Примеры</u>: 1) A = {a, b, c, d, e} - множество A состоит из элементов a, b, c, d, e.

2) B = {2, 4, 6, 8} - ...

2) указанием характеристического свойства элементов множества

Характеристическое свойство – свойство, которым обладают все элементы этого множества, и не обладают элементы, не принадлежащие данному множеству.

Примеры: 1) А – множество положительных двузначных чисел.

Характеристическое свойство – «быть положительным двузначным числом».

21 $\in$ А, так как оно … ,

135 $\notin$ А, так как оно …

- 35 $\notin$ А, так как оно …

2) Это же множество А:

$A = \{x \mid x \in N$ и $9 < x < 100\}$ или

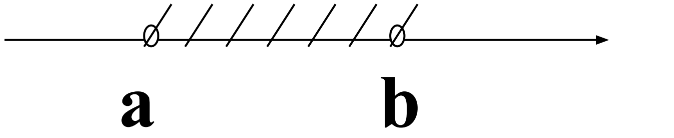
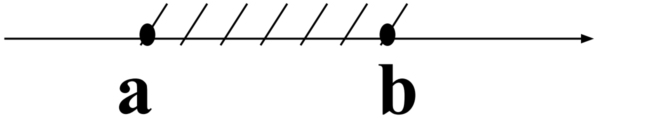
$A = \{x \mid x \in N$ и $10 \leq x \leq 99\}$

Бесконечное **множество можно задать лишь указанием характеристического свойства его элементов.**

Конечное **множество можно задать двумя указанными способами:**

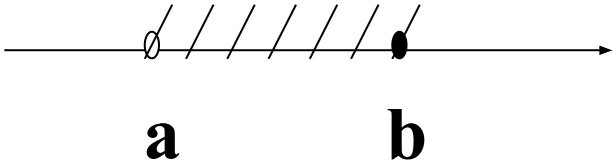
1. **М – множество натуральных чисел, меньших 6**
2. **$M = \{x \mid x \in N$ и $x < 6\}$**
3. **$M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$**

Числовые множества

Подмножество множества R	Обозначение и название	Изображение на координатной прямой
$\{x \mid x \in R,\ a < x < b\}$	$(a; b)$ **интервал**	
$\{x \mid x \in R,\ a \leq x \leq b\}$	$[a; b]$ **отрезок**	

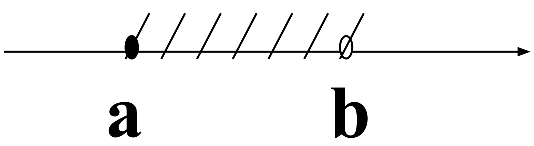
$\{x |\ x \in R,\ a < x \leq b\}$ $(a; b]$

полуинтервал



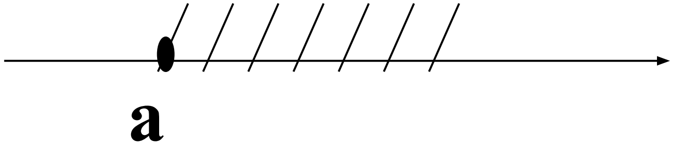
$\{x |\ x \in R,\ a \leq x < b\}$ $[a; b)$

полуинтервал



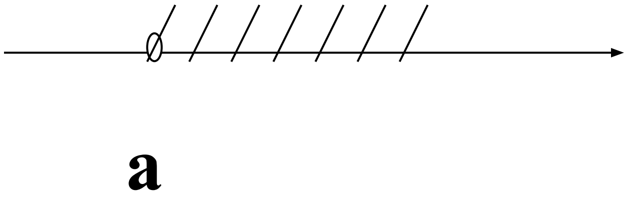
$\{x|\ x \in R,\ x \geq a\}$ $[a; +\infty)$

луч

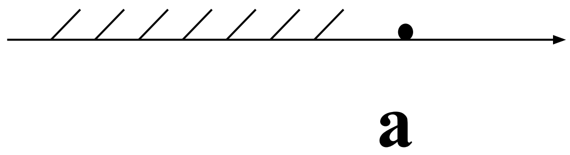


$\{x|\ x \in R,\ x > a\}$ $(a; +\infty)$

луч

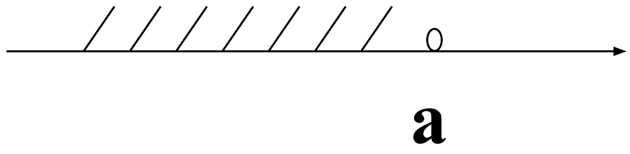


$\{x|\ x \in R,\ x \le a\}$ $(-\infty;\ a]$



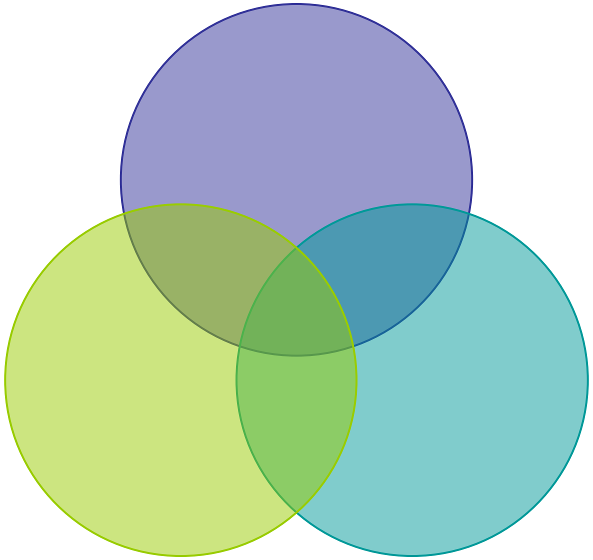
луч

$\{x|\ x \in R,\ x < a\}$ $(-\infty;\ a)$



луч

Отношения между множествами



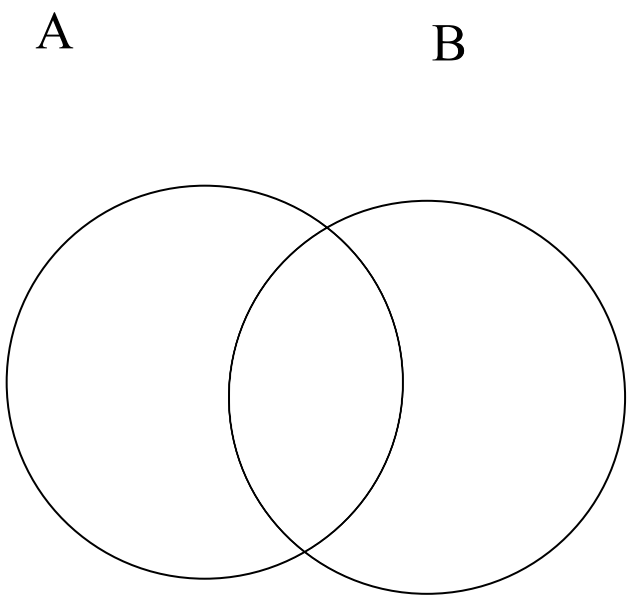
Отношения между множествами можно наглядно представить с помощью **диаграмм Эйлера-Венна** (кругов Эйлера).

Множество изображается кругом на плоскости и мыслится как множество точек круга.

Эйлер Леонард (1707-1783) – швейцарский математик, механик, физик, астроном.

Венн Джон (1834 – 1923) – английский ученый.

Если множества A и B имеют общие элементы, т.е. элементы, принадлежащие одновременно A и B, то говорят, что эти множества **пересекаются**



Пишут: $A \cap B \neq \varnothing$.

<u>Примеры</u>:

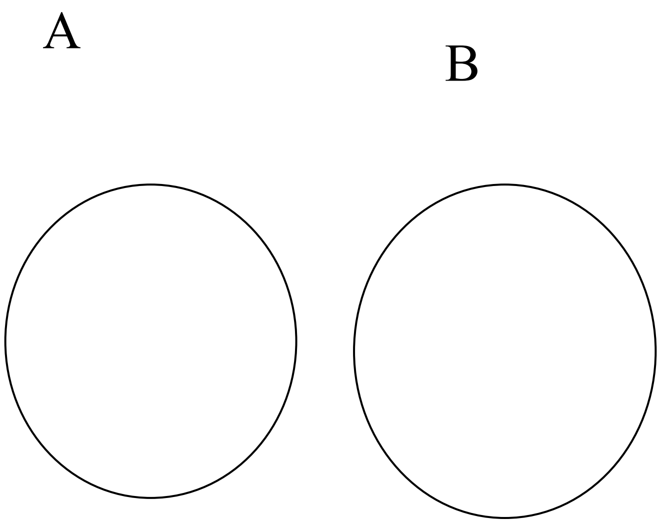
1) $A = \{a, b, c, d\}$,

$B = \{b, d, e\}$.

2) A – множество четных чисел, B – множество чисел, кратных 3.

Если множества не имеют общих элементов, то они

не пересекаются

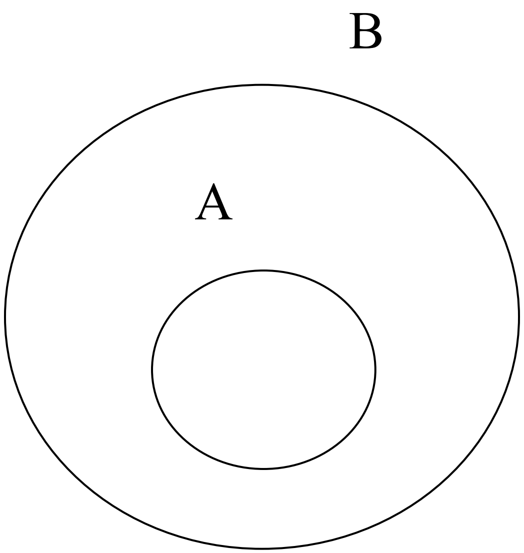


Пишут: $A \cap B = \varnothing$.

Примеры:

1) $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{e, f, g\}$.
2) А – множество двузначных чисел, В – множество трехзначных чисел.
3) А – множество положительных чисел, В – множество отрицательных чисел.

Если каждый элемент множества A является элементом множества B, то говорят, что множество A **включено** во множество B (A является **подмножеством** множества B)



$A \subset B$

<u>Примеры:</u>

1) $A = \{a, b\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ –

$A \subset B$ (строгое включение: $A \neq B$).

2) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 2, 1\}$ -

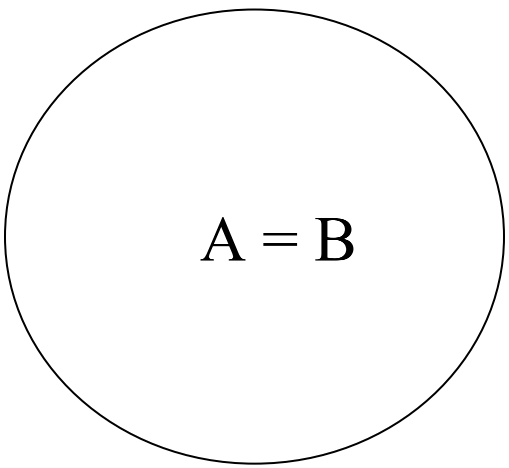
$A \subseteq B$ (нестрогое включение).

Для любого множества A справедливы утверждения:

1) $\varnothing \subset A$

2) $A \subset A$

Множества называют **равными**, если они состоят из одних и тех же элементов



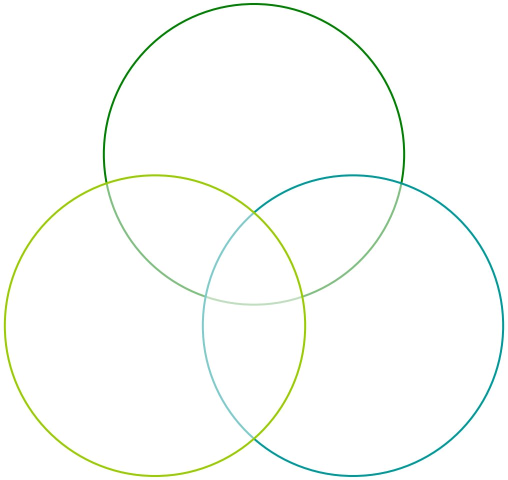
Примеры:

1) A = {a, b, c}, B = {b, a, c,}.

2) A – множество четных чисел,

B – множество чисел, кратных 2.

Операции над множествами



Пересечение множеств

Пересечением множеств А и В называется множество А ∩ В, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат **и** множеству А, **и** множеству В.

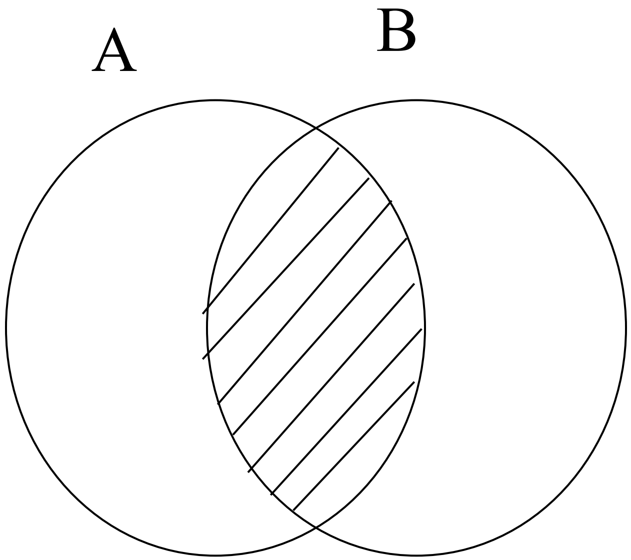
$$\mathbf{A \cap B = \{\mathit{x} \mid \mathit{x} \in A \text{ и } \mathit{x} \in B\}}$$

Другими словами, ***пересечением*** множеств А и В называется множество А ∩ В, состоящее из ***общих*** элементов множеств А и В.

Операция, в результате которой находят пересечение множеств, также называется ***пересечением***

Примеры: 1) $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, d, e, f\}$

$A \cap B = \{b, d,\}$.



2) A – множество четных натуральных чисел,

B – множество натуральных чисел, кратных 3.

$A \cap B$ – множество четных натуральных чисел, кратных 3.

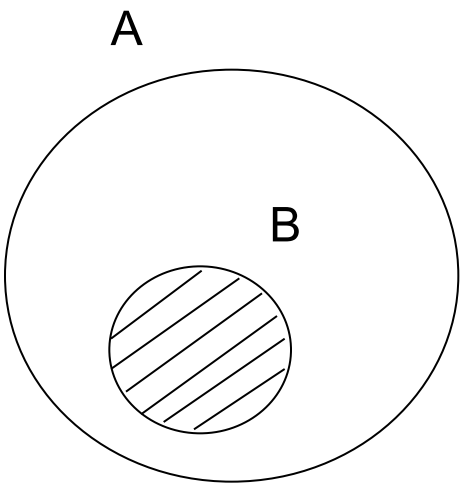
$24 \in A \cap B$, $36 \in A \cap B$,

$8 \notin A \cap B$, $15 \notin A \cap B$.

3) A – множество четных натуральных чисел,

B – множество натуральных чисел, кратных 4,

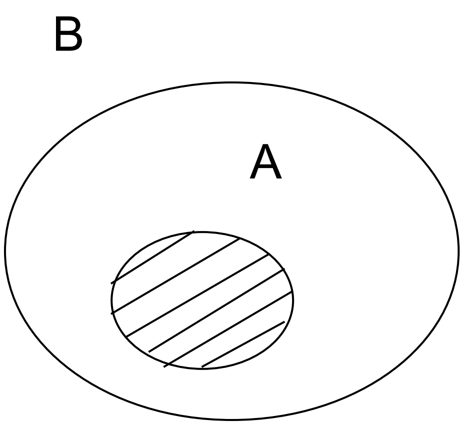
$A \cap B = B.$



$B \subset A$

4) A – множество квадратов,
B – множество прямоугольников

$A \cap B = A$



$A \subset B$

Для любого множества A справедливы следующие утверждения:

1) $A \cap \varnothing = \varnothing$

2) $A \cap A = A$

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ и } x \in B$$

$$x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A \text{ или } x \notin B$$

Объединение множеств

Объединением множеств A и B называется множество A ∪ B, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A и B.

$$\mathbf{A \cup B = \{\mathit{x} \mid \mathit{x} \in A \text{ или } \mathit{x} \in B\}}$$

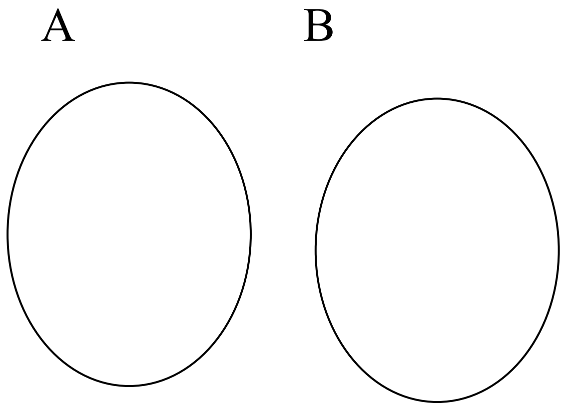
Союз «или» - не разделительный, а употребляется в смысле: либо одному, либо другому, либо одному и другому вместе.

Объединением множеств А и В называется множество $A \cup B$, содержащие все элементы множества А, и все элементы множества В, причем общие элементы берутся один раз.

Операция, в результате которой находят объединение множеств, также называется **объединением**.

Примеры:1) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$

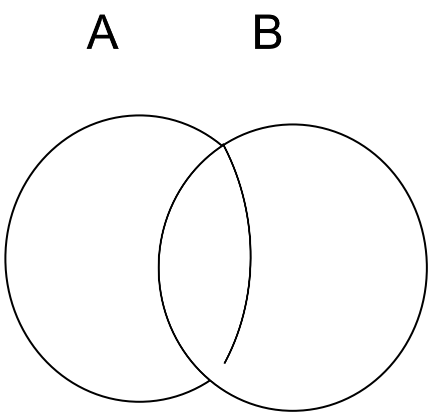
$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$



2) A – множество четных чисел,

B – множество двузначных чисел

$A \cup B$ – множество четных или двузначных чисел



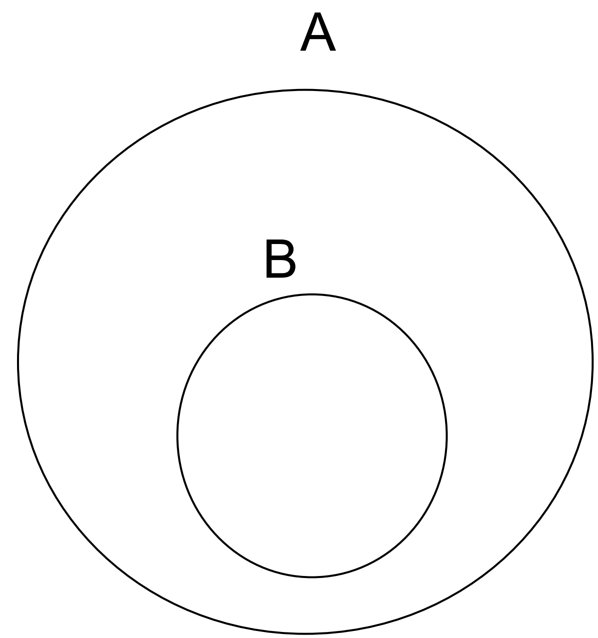
$8 \in A \cup B$, $13 \in A \cup B$,

$24 \in A \cup B$,

$7 \notin A \cup B$, $100 \in A \cup B$,

$101 \notin A \cup B$

3) A – множество четных натуральных чисел,
B – множество натуральных чисел, кратных 4,
$B \subset A$
$A \cup B = A$.



Для любых множеств A и B справедливы следующие утверждения:

1) $\mathbf{A} \cup \varnothing = \mathbf{A}$

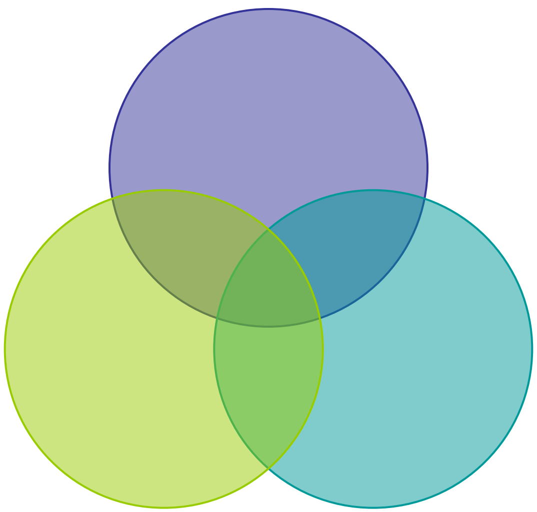
2) $\mathbf{A} \cup \mathbf{A} = \mathbf{A}$

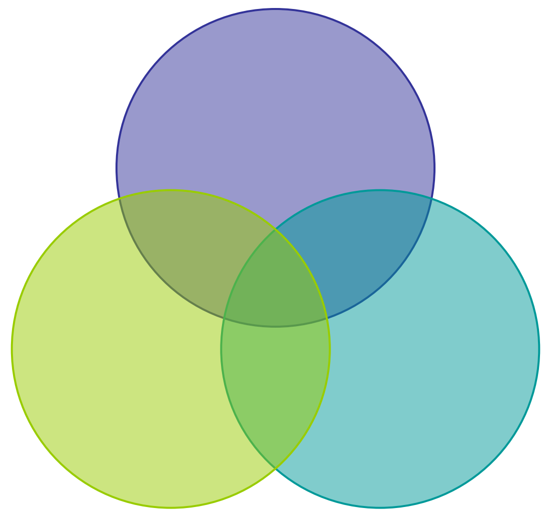
3) $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \subset (\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ или } x \in B$$

$$x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \text{ и } x \notin B$$

Законы пересечения и объединения множеств





Операции над числами обладают рядом свойств:

Например:

$a + b = b + a$

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

и др.

Законы пересечения множеств

1) ***Коммутативный закон пересечения множеств***:

$$\mathbf{A \cap B = B \cap A}$$

Лат. commutare – *перемещать*.

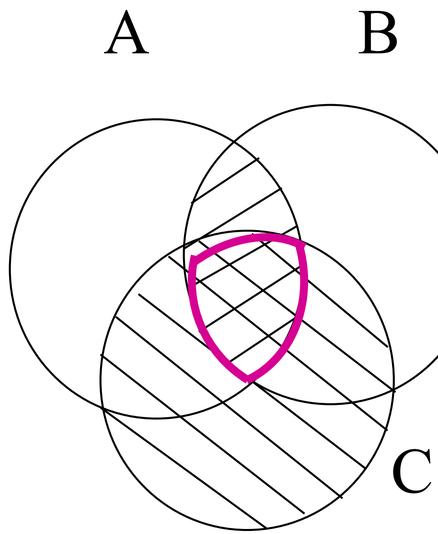
2) ***Ассоциативный закон пересечения множеств:***

$$\mathbf{(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)}$$

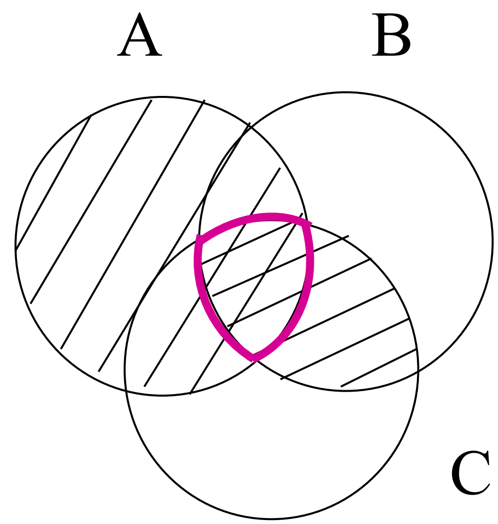
Лат. associatio – *соединение*.

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Графическое доказательство



$(A \cap B) \cap C$



$A \cap (B \cap C)$

Области, изображающие на рисунках множества $(A \cap B) \cap C$ и $A \cap (B \cap C)$ одинаковы. Следовательно, данные множества равны.

Законы объединения множеств

1) ***Коммутативный закон объединения множеств:***

$$\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \mathbf{B} \cup \mathbf{A}$$

2) ***Ассоциативный закон объединения множеств:***

$$(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cup \mathbf{C} = \mathbf{A} \cup (\mathbf{B} \cup \mathbf{C})$$

3) ***Дистрибутивный закон пересечения относительно объединения:***

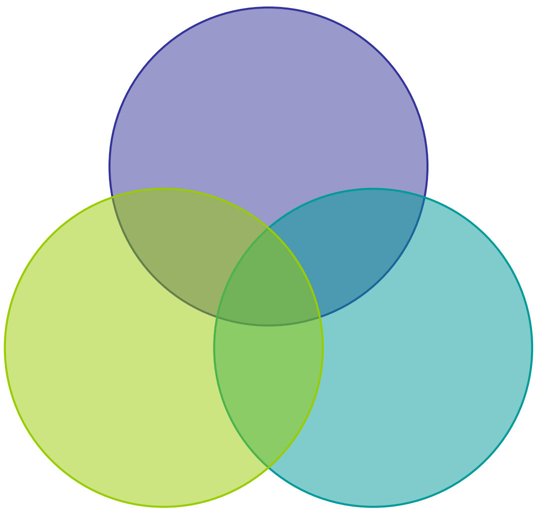
$$(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cap \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cap \mathbf{C}) \cup (\mathbf{B} \cap \mathbf{C})$$

4) ***Дистрибутивный закон объединения относительно пересечения:***

$$(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cup \mathbf{C}) \cap (\mathbf{B} \cup \mathbf{C})$$

Лат. distributus – *распределенный*.

Вычитание множеств. Дополнение подмножества



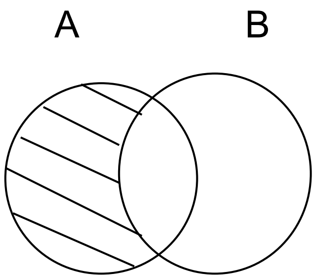
Разностью множеств А и В называется множество, содержащее те и только те элементы, которые принадлежат множеству А и не принадлежат множеству В

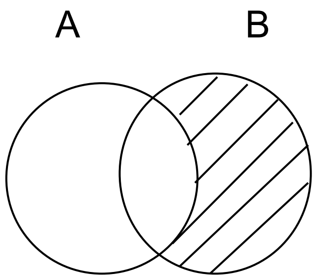
$$\mathbf{A \setminus B = \{\mathit{x} \mid \mathit{x} \in A \text{ и } \mathit{x} \notin B\}}$$

Операцию, в результате которой находят разность множеств, называют **вычитанием**.

<u>Примеры</u>:

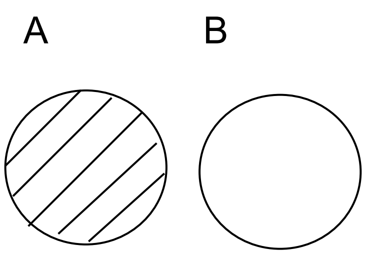
1) A – множество четных чисел,
B – множество двузначных чисел.

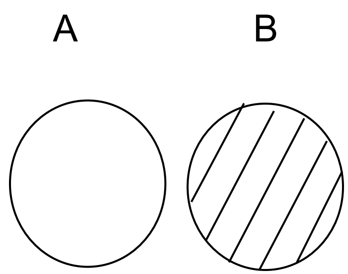




A \ B – множество четных чисел, не являющихся двузначными,

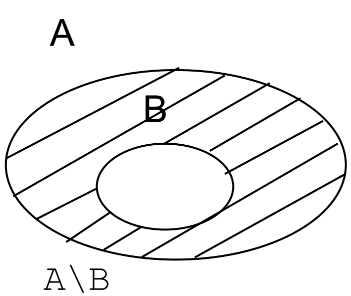
B \ A – множество нечетных двузначных чисел.





2) A – множество треугольников,
B – множество квадратов.

A \ B = A, B \ A = B.



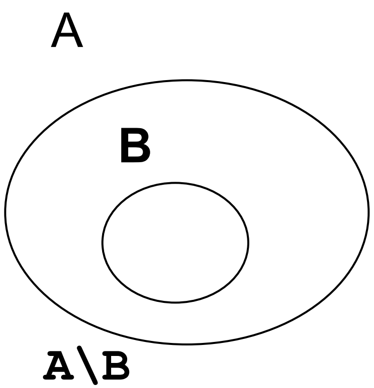
3) A – множество прямоугольников,
B – множество квадратов.

A \ B – множество прямоугольников, не являющихся квадратами.

B \ A = ∅

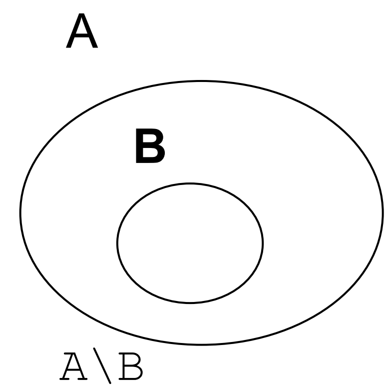
Пусть B ⊂ A

Дополнением множества B до множества A называется разность множеств A и B:



$$B'_A = A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$$

Примеры:



1) A = {1, 2, 3, 4, 5}, B = {1, 3, 5}.

$B'_A = \{2, 4\}$.

2) A – множество четных чисел, B – множество чисел, кратных 4.

B'_A - множество четных чисел, не кратных 4.

3) A множество прямоугольников, B – множество квадратов.

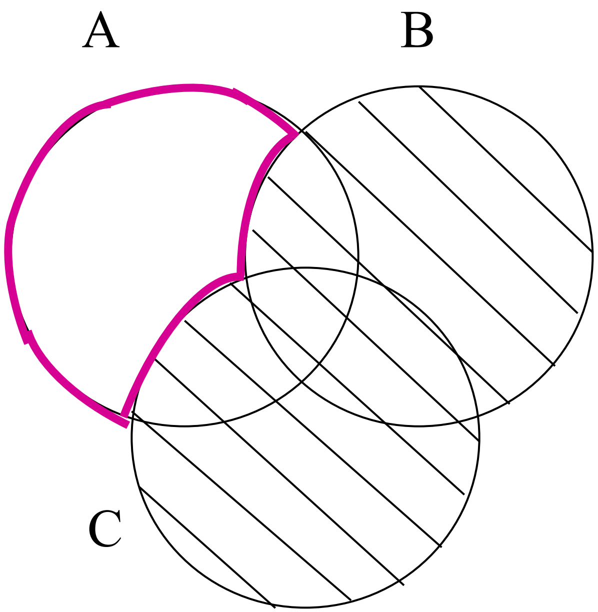
B'_A - множество прямоугольников, не являющихся квадратами.

Свойства вычитания множеств

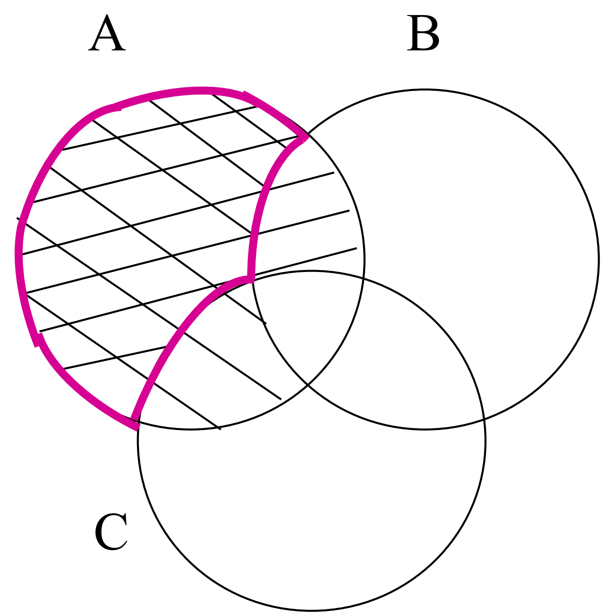
1. $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$
2. $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ – дистрибутивность вычитания относительно объединения
3. $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$ – дистрибутивность пересечения относительно вычитания
4. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
5. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Доказать самостоятельно с помощью кругов Эйлера

$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$



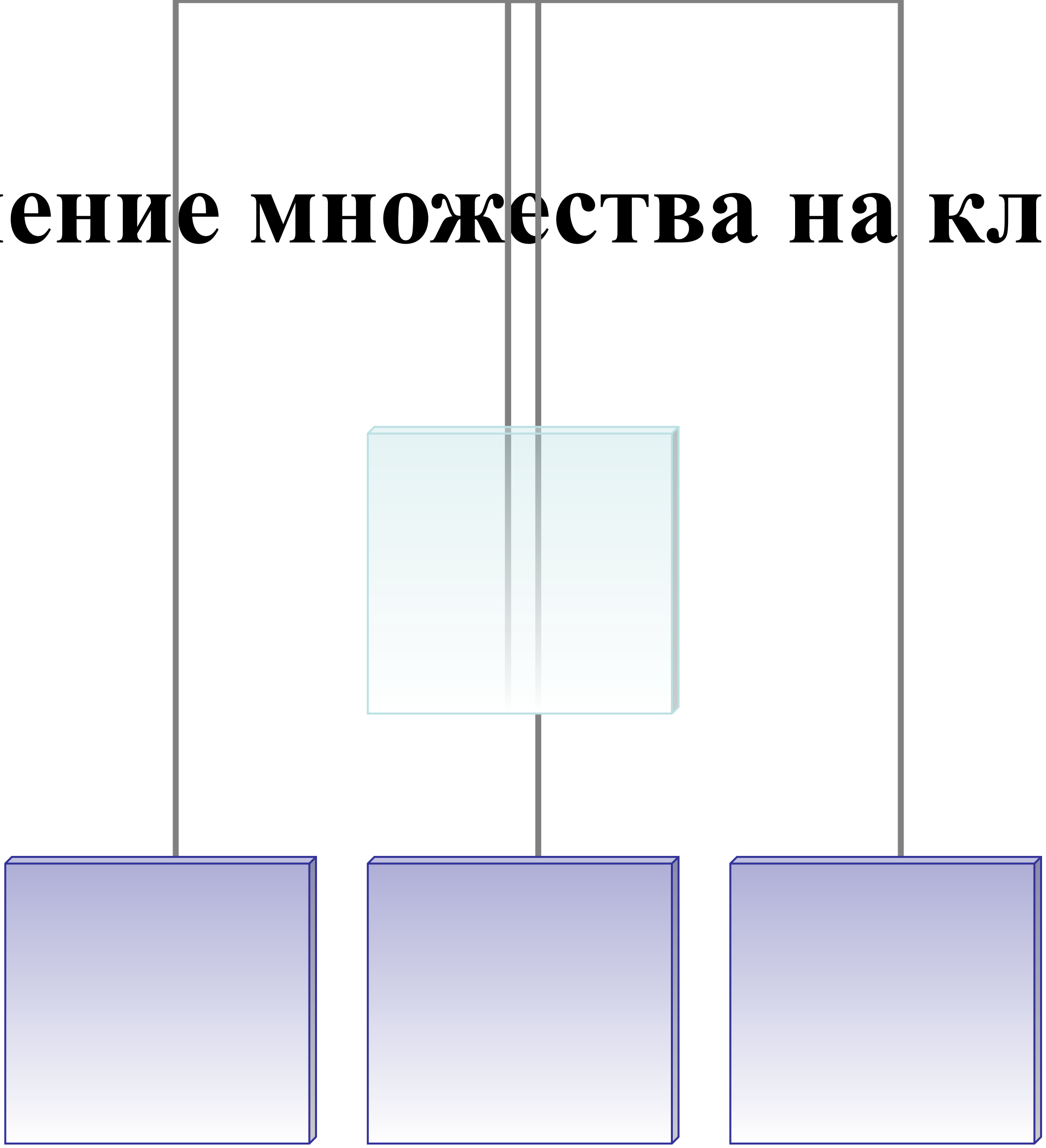
$A \setminus (B \cup C)$



$(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

Области, изображающие на рисунке множества $A \setminus (B \cup C)$ и $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ одинаковы. Следовательно, данные множества равны.

Разбиение множества на классы



Элементы некоторого множества можно распределить по классам на основании сходств элементов внутри класса и их отличия от элементов других классов. Такое распределение называется **классификацией**.

Наряду с понятием «класса» широко в человеческой жизни используются слова «тип», «вид», «семейство», «ряд», «сорт».

Считают, что **множество X разбито на** попарно непересекающиеся подмножества или **классы** X_1, X_2, …, X_n, если одновременно выполняются следующие условия:

1. Все подмножества, образующие разбиение, не пусты:

$$X_1 \neq \varnothing, X_2 \neq \varnothing, \ldots X_n \neq \varnothing$$

2. Любые два таких подмножества не пересекаются:

$$X_i \cap X_j = \varnothing, \; i, j = 1, \ldots n, \; i \neq j$$

3. Объединение всех подмножеств есть данное множество:

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n$$

Если не выполнено хотя бы одно их этих условий, классификацию считают неправильной.

Примеры: Произошло ли разбиение множества X на классы? или Верна ли классификация?

1. X – множество треугольников, X_1 – множество остроугольных треугольников, X_2 – множество прямоугольных треугольников, X_3 – множество тупоугольных треугольников.

1) $X_1 \neq \varnothing$, $X_2 \neq \varnothing$ $X_3 \neq \varnothing$

2) $X_1 \cap X_2 = \varnothing$, $X_2 \cap X_3 = \varnothing$, $X_1 \cap X_3 = \varnothing$,

3) $X_1 \cup X_2 \cup X_3 = X$.

Множество X разбито на три класса: X_1, X_2, X_3.

2. X – множество треугольников, X_1 – множество равнобедренных треугольников, X_2 – множество равносторонних треугольников, X_3 – множество разносторонних треугольников.

1) $X_1 \neq \varnothing$, $X_2 \neq \varnothing$, $X_3 \neq \varnothing$,

2) $X_2 \subset X_1$, т.е. $X_1 \cap X_2 \neq \varnothing$.

Разбиения множества X на классы X_1, X_2, X_3 не получим.

Декартово умножение множеств

2 и 7

22 27 72 77

В том случае, когда важен порядок следования элементов, в математике говорят об **упорядоченных наборах элементов**.

Упорядоченные наборы элементов называют **кортежами** и различают по длине. **Длина кортежа** – это число элементов, из которых он состоит.

Упорядоченную пару, образованную из элементов x и y, записывают так: **$(x;\ y)$**. Элемент x называют **первой координатой (компонентой) пары**, а элемент y – **второй координатой (компонентой) пары.**

Например, (2; 2), (3; 7).

Пары $(x; y)$ и $(m; n)$ равны тогда и только тогда, когда $x = m$ и $y = n$.

$$(2;\ 7) \neq (7;\ 2)$$

Декартовым произведением множеств A и B называется множество всех упорядоченных пар, первая компонента которых принадлежит множеству A, а вторая компонента принадлежит множеству B.

$$\mathbf{A \times B = \{(\mathit{a}; \mathit{b}) \mid \mathit{a} \in A \text{ и } \mathit{b} \in B\}}$$

Операцию нахождения декартова произведения называют **декартовым умножением множеств**.

Примеры:

1) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{m, n\}$.

$A \times B = \{(1; m), (1; n), (2; m), (2; n), (3; m), (3; n)\}$

2) $A = \{a, b, c\}$.

$A \times A = \{(a; a), (a; b), (a; c), (b; a), (b; b), (b; c), (c; a), (c; b), (c; c)\}$

Декартовым произведением множеств $\mathbf{X_1}$, $\mathbf{X_2}$, …, $\mathbf{X_n}$ называется множество всех кортежей длины *n*, первая компонента которых принадлежит множеству X_1, вторая множеству X_2, …, *n*-*я* – множеству X_n:

$$\mathbf{X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n = \{(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n) \mid x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2,\ \ldots,\ x_n \in X_n\}}$$

Примеры:

1) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5\}$, $C = \{6, 7\}$.

$$A \times B \times C = \{(1;4;6), (1;4;7), (1;5;6), (1;5;7), (2;4;6), (2;4;7), (2;5;6), (2;5;7), (3;4;6), (3;4;7), (3;5;6), (3;5;7)\}.$$

2) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5\}$, $C = \varnothing$

$$A \times B \times C = \varnothing$$

Свойства декартова умножения

1. Декартово умножение **не обладает свойством коммутативности:**

$$\textbf{если } A \neq B\textbf{, то } A\times B \neq B\times A$$

2. Декартово умножение **не обладает свойством ассоциативности:**

$$(A\times B)\times C \neq A\times(B\times C)$$

3. **Дистрибутивный закон декартова умножения относительно объединения:**

$$(A\cup B)\times C = (A\times C) \cup (B\times C)$$

4. **Дистрибутивный закон декартова умножения относительно пересечения**:

$$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$$

5. **Дистрибутивный закон декартова умножения относительно вычитания**:

$$(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$$

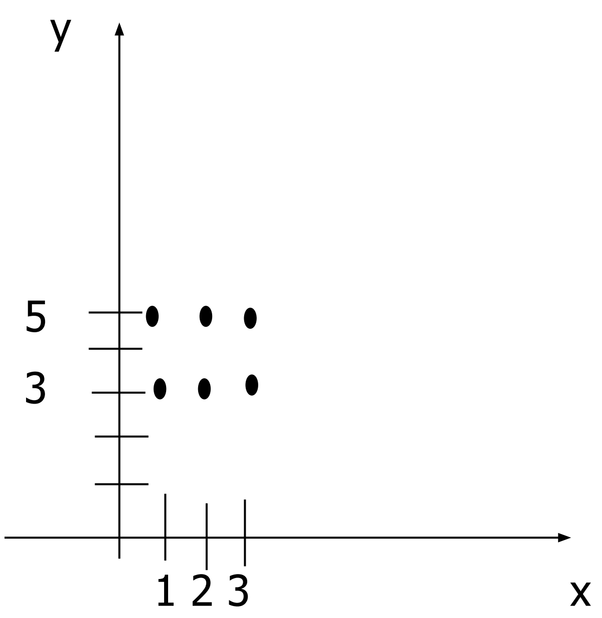
6. $A \times \varnothing = \varnothing \times A = \varnothing.$

График декартова произведения двух числовых множеств

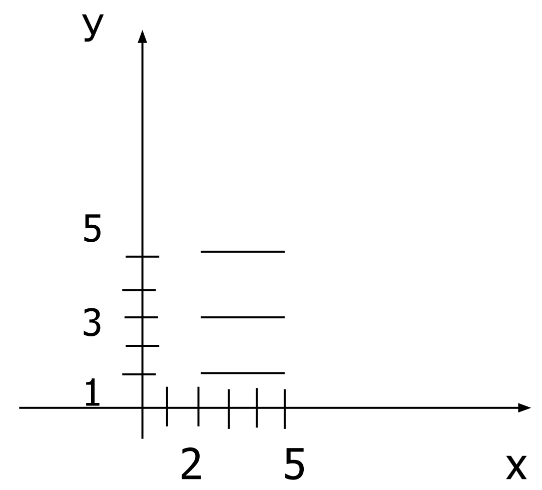
<u>Примеры</u>: Построить график декартова произведения множеств A и B.

1) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 5\}$.

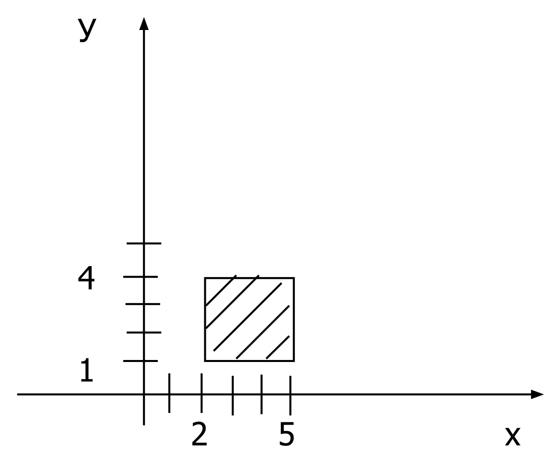
$A \times B = \{(1;3), (1;5), (2;3), (2;5), (3;3), (3;5)\}$



2) $A = [2; 5]$, $B = \{1, 3, 5\}$

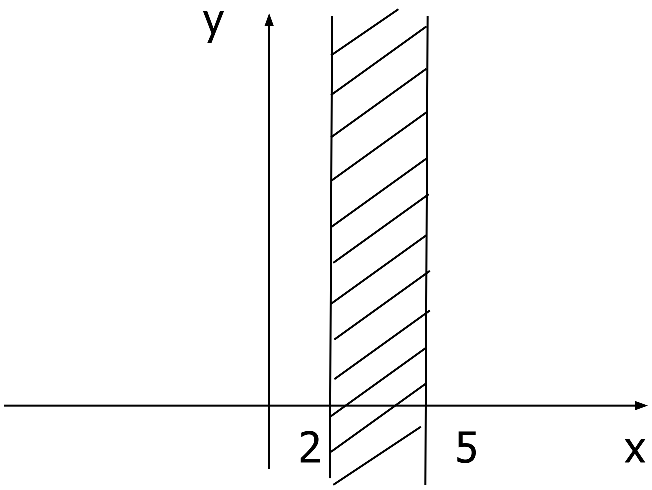


3) $A = [2; 5]$, $B = [1; 4]$

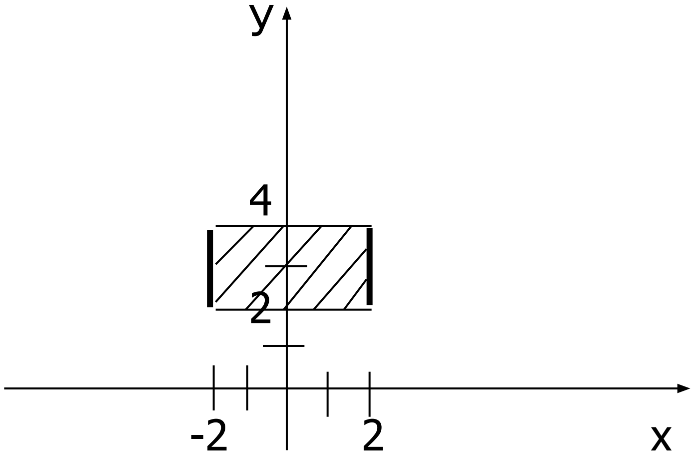


4) $A = [2; 5]$, $B = \mathbf{R}$

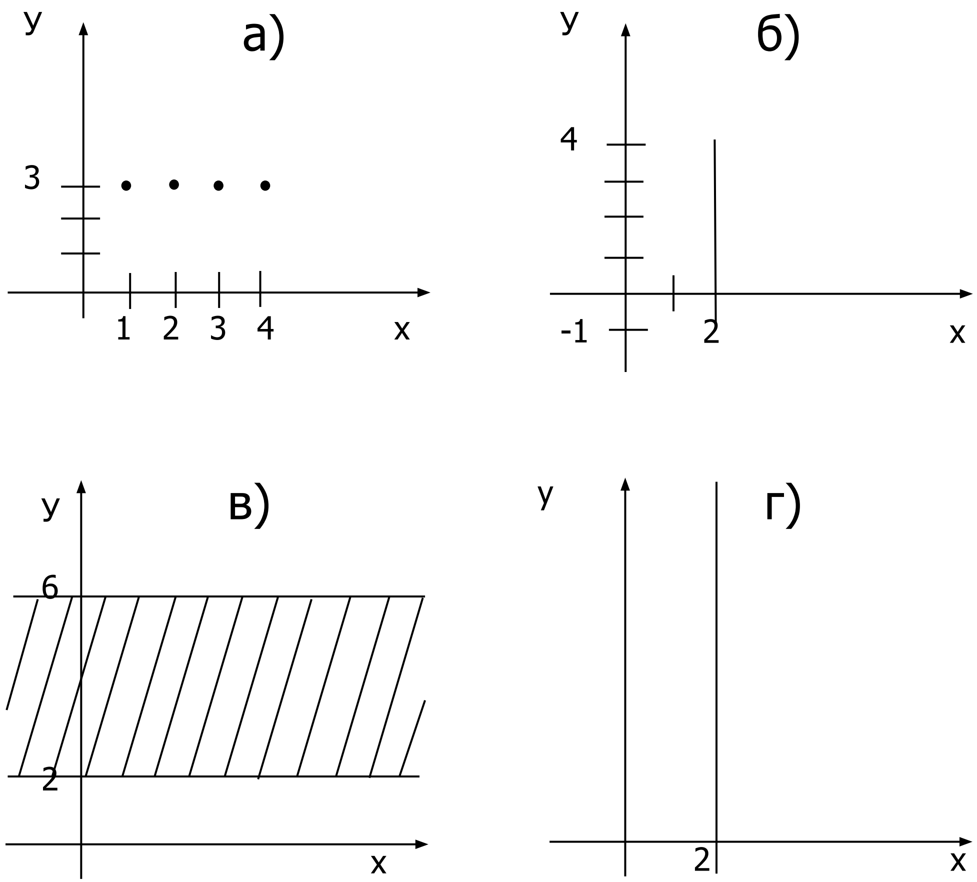
полоса



5) $A = [-2; 2]$, $B =]2; 4[$



Определить, декартово произведение каких множеств A и B изображено на рисунке:



а) A = {1, 2, 3, 4}, B = {3}

б) A = {2}, B = [-1; 4]

в) A = **R**, B = [2; 6]

г) A = {2}, B = **R**

Спасибо за внимание!