

Метод параллельного  
проектирования. Изображение  
пространственных фигур на  
плоскости.

Геометрия,  
*10* класс.



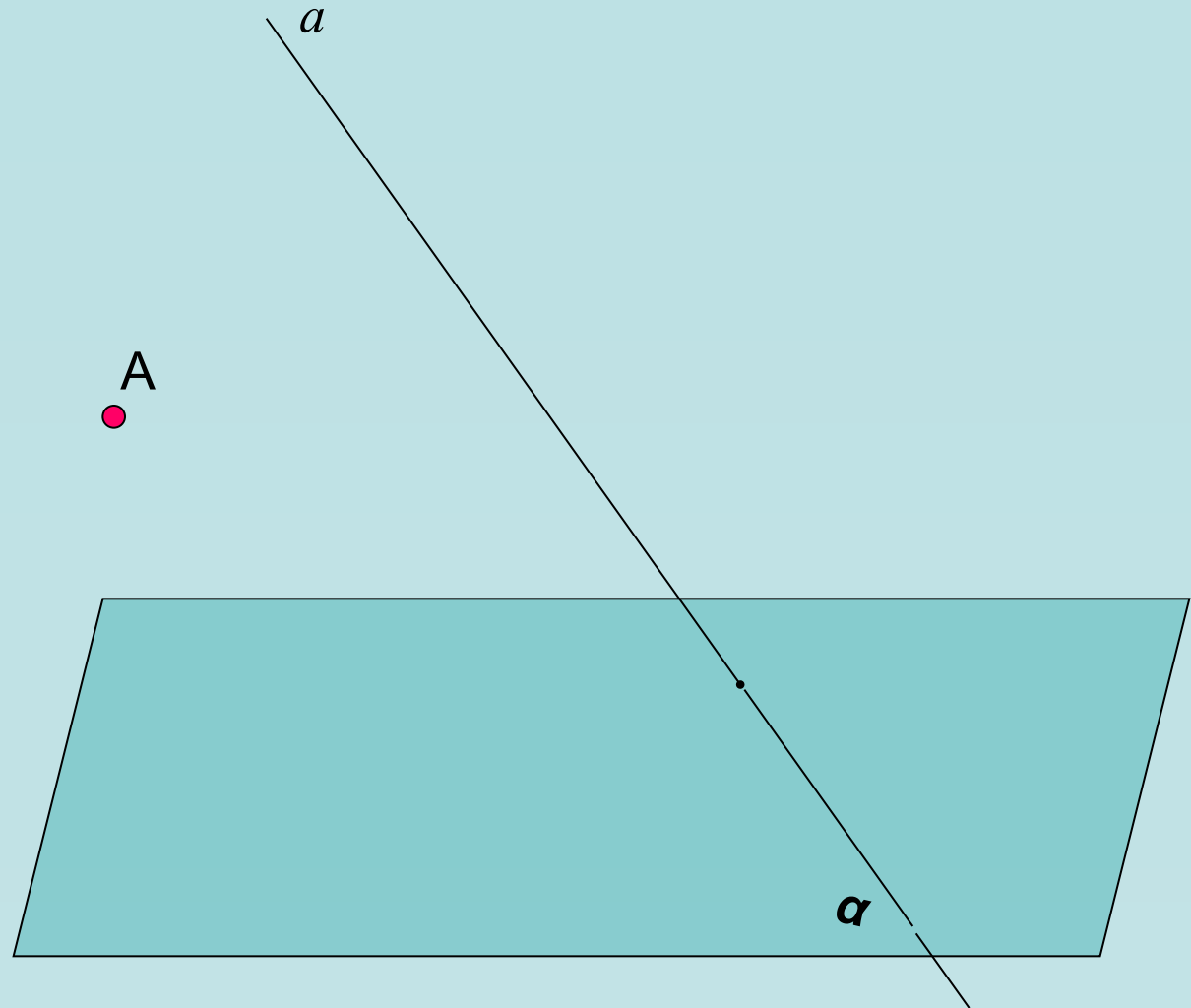
Итак, мы приступили к изучению *стереометрии* – геометрии в пространстве. Как всегда нам необходимо уметь изображать геометрические фигуры, причем все чертежи мы по-прежнему выполняем на плоскости (на странице тетради, на доске и т.д.). Каким образом пространственную фигуру (например, куб) можно «уложить» в плоскость?

Для решения этой задачи применяется *метод параллельного проектирования*. Выясним его суть на примере простейшей геометрической фигуры – точки.

Итак, у нас есть геометрическая фигура в пространстве – точка А.

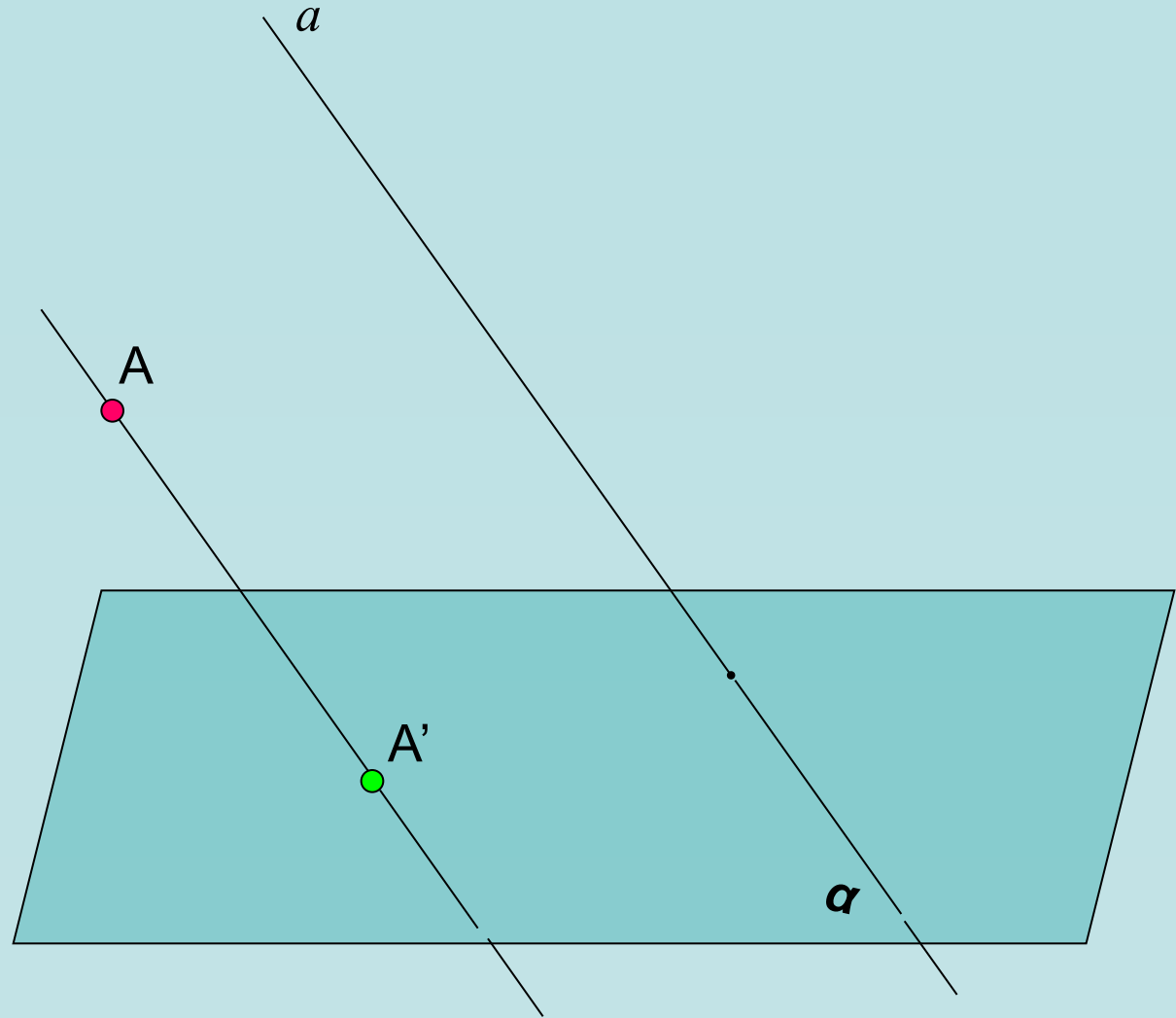


Выберем в пространстве произвольную плоскость  $\alpha$  (её мы будем называть *плоскостью проекций*) и любую прямую  $a \perp \alpha$  (она задает *направление параллельного проектирования*).

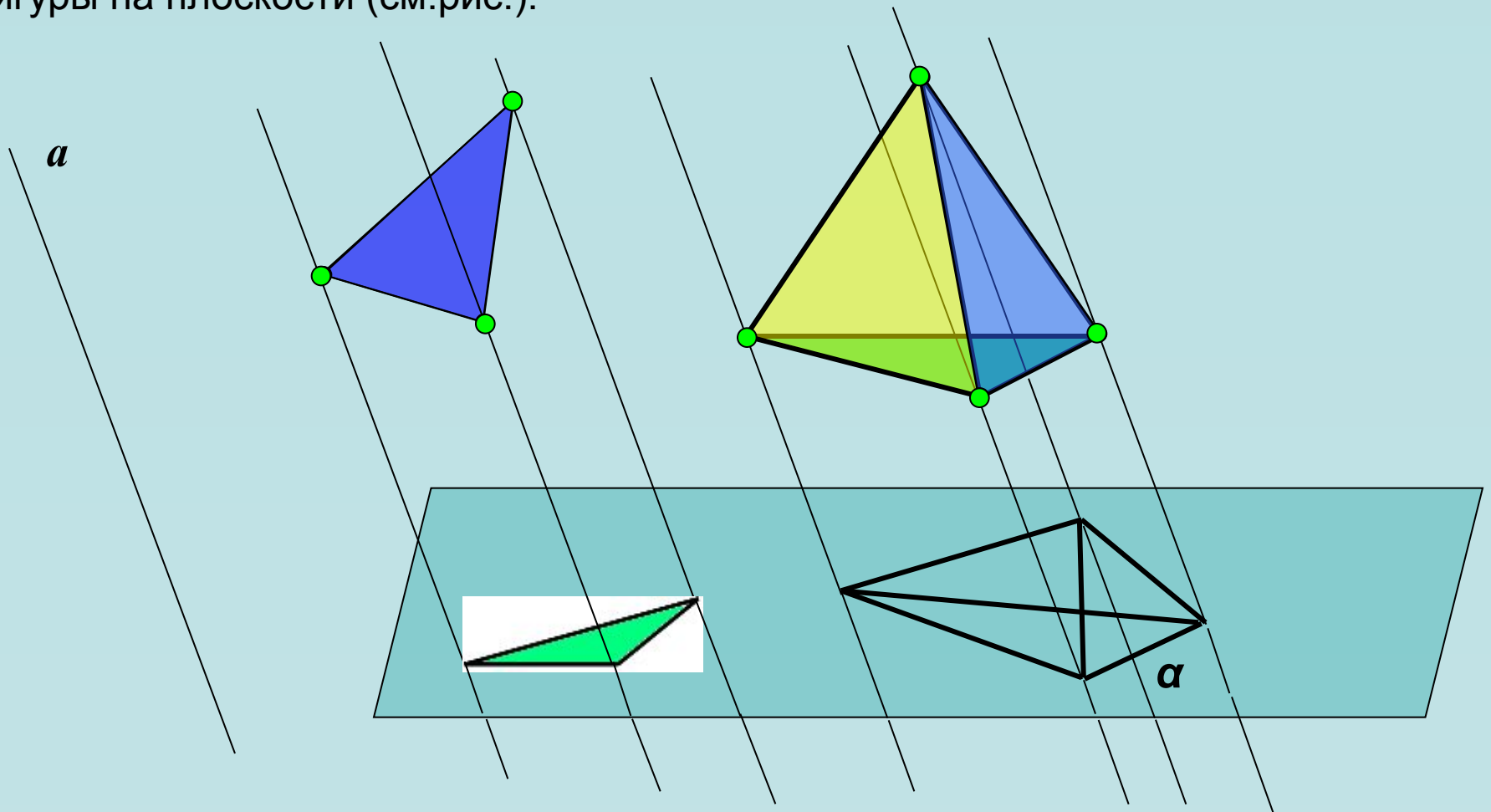


Проведем через точку  $A$  прямую, параллельную прямой  $a$ .

Точка  $A'$  пересечения этой прямой с плоскостью и есть **проекция** точки  $A$  на плоскость  $\alpha$ . Точку  $A$  ещё называют **прообразом**, а точку  $A'$  – **образом**. Если  $A \in \alpha$ , то  $A'$  совпадает с  $A$ .

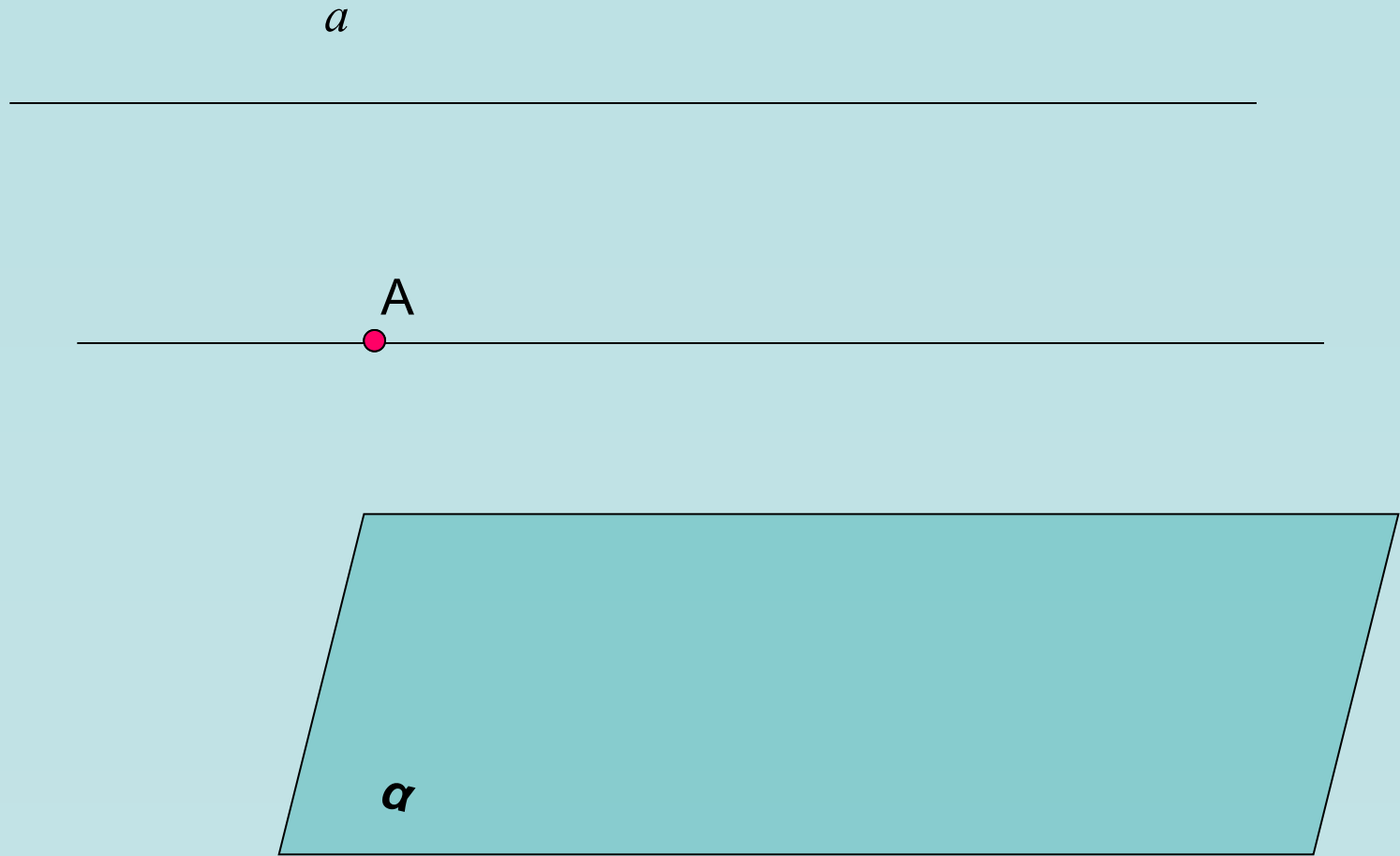


Рассматривая любую геометрическую фигуру как множество точек, можно построить в заданной плоскости проекцию данной фигуры. Таким образом можно получить изображение (или «проекцию») любой плоской или пространственной фигуры на плоскости (см.рис.).

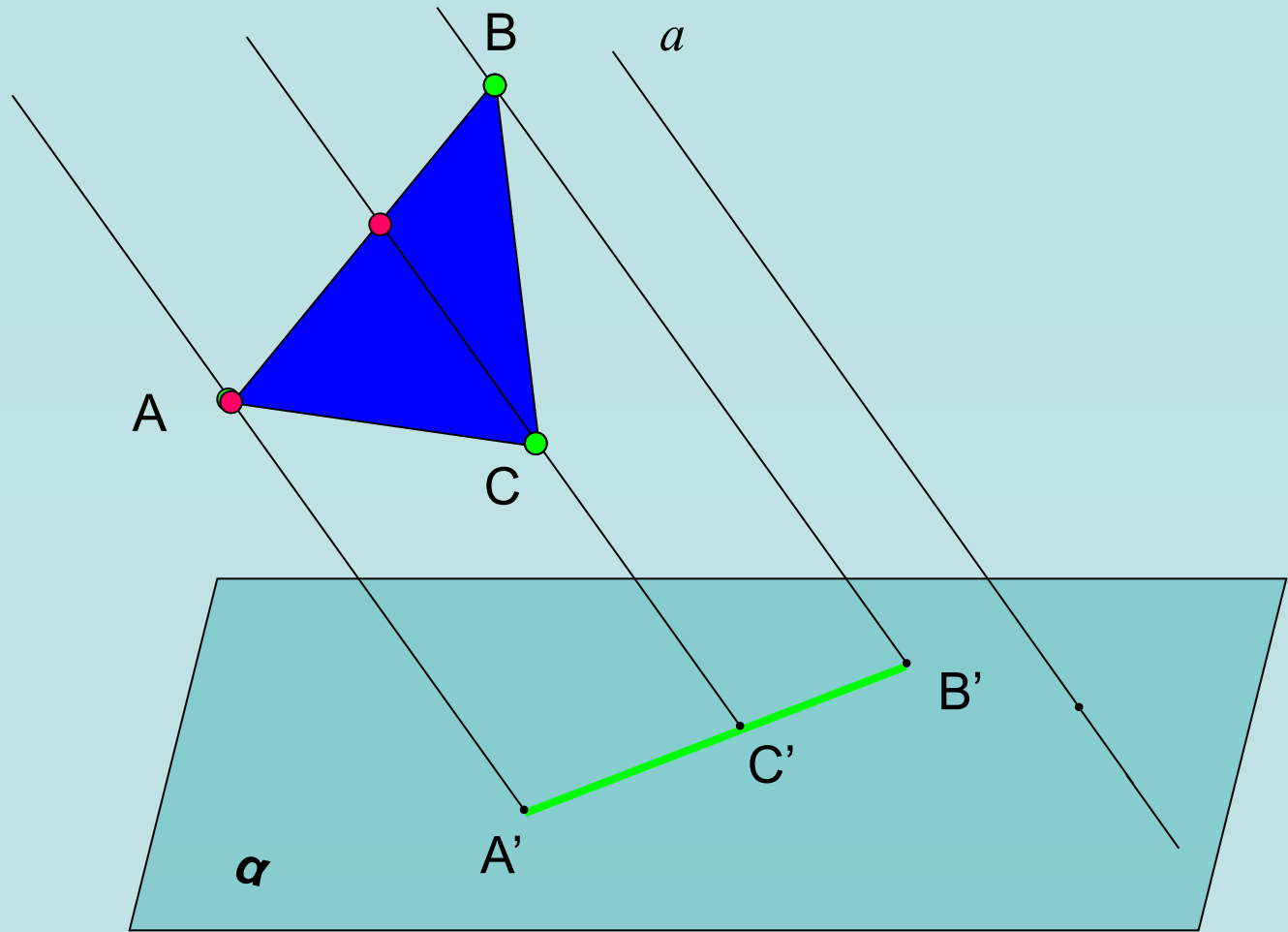


Наглядным примером параллельного проектирования является отбрасываемая любым объектом(прообраз) в пространстве тень(образ) от солнечных лучей (направление параллельного проектирования) на Земле(плоскость проекций).

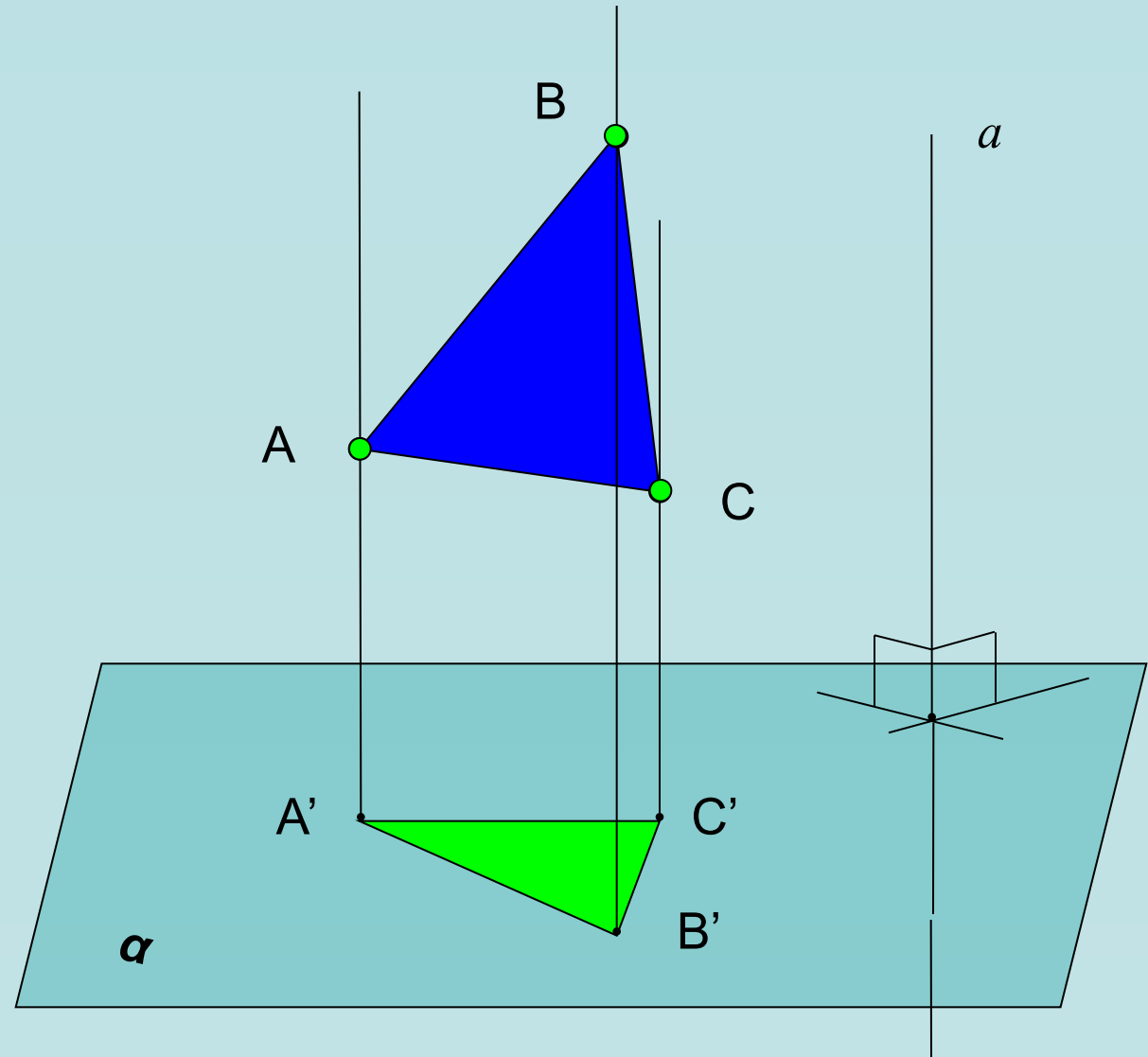
**Примечание 1.** При параллельном проектировании не выбирают направление параллельного проектирования параллельно плоскости проекции (самостоятельно обоснуйте почему).



**Примечание 2.** При параллельном проектировании плоских фигур не выбирают направление параллельного проектирования параллельно плоскости, которой принадлежит эта плоская фигура, т.к. получающаяся при этом проекция не отражает свойства данной плоской фигуры.



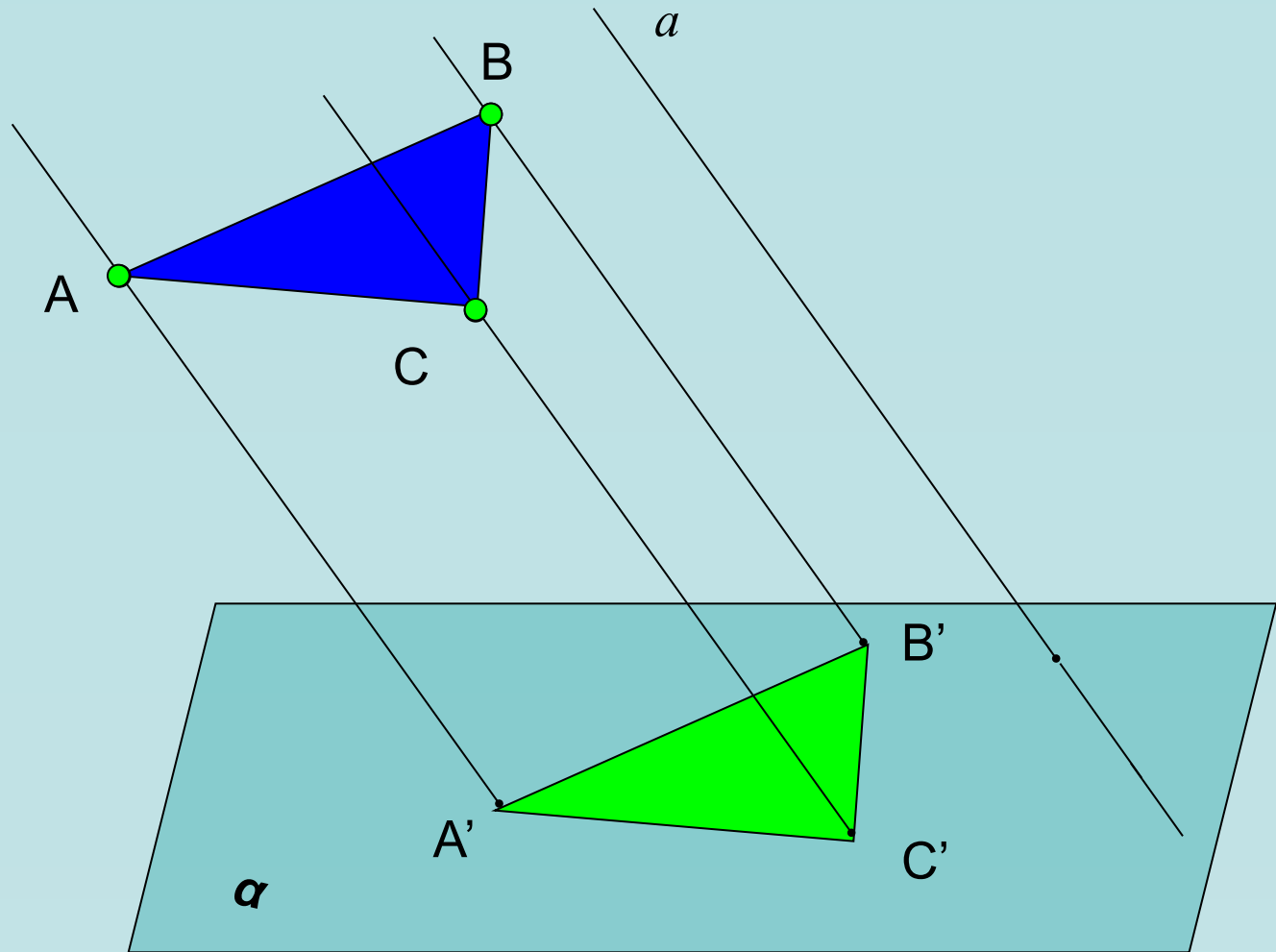
**Примечание 3.** Если направление параллельного проектирования перпендикулярно плоскости проекций, то такое параллельное проектирование называется **ортогональным (прямоугольным) проектированием**.





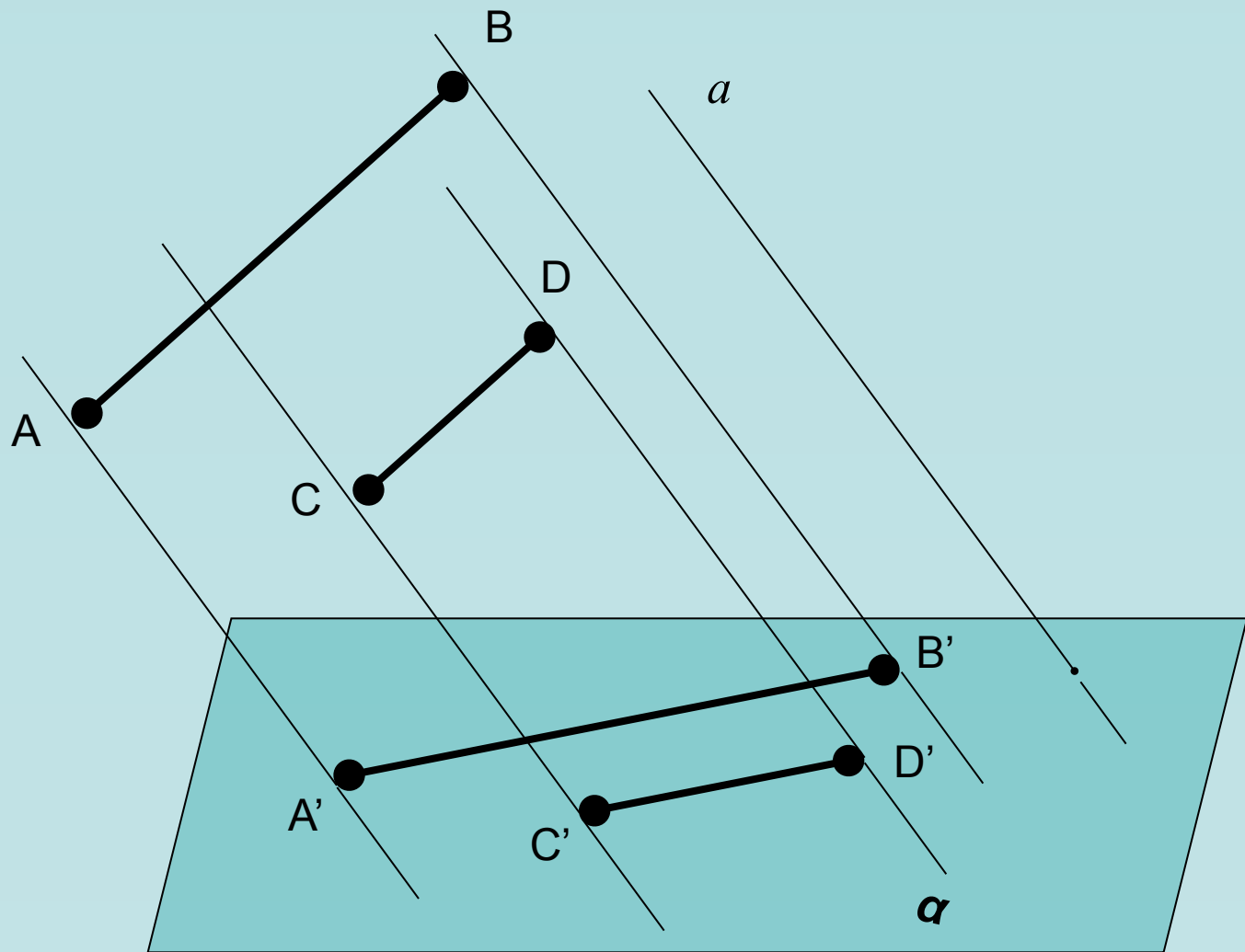
**Примечание 4.** Если плоскость проекций и плоскость, в которой лежит данная фигура параллельны ( $\alpha \parallel (ABC)$ ), то получающееся при этом изображение...

...правильно – равно прообразу!



Параллельное проектирование обладает свойствами:

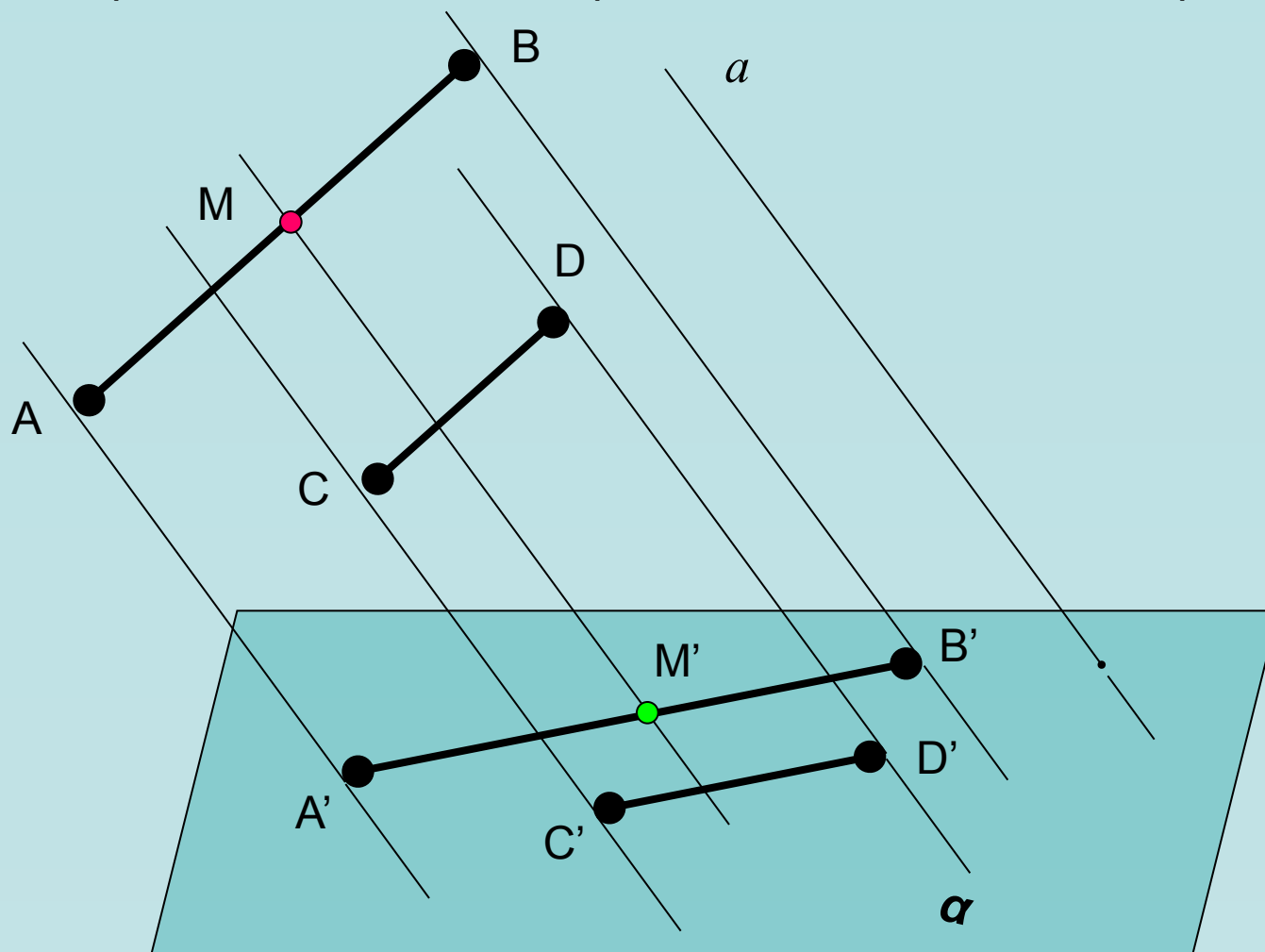
1) параллельность прямых (отрезков, лучей) **сохраняется**;



$$AB \parallel CD \Rightarrow A'B' \parallel C'D'$$

Параллельное проектирование обладает свойствами:

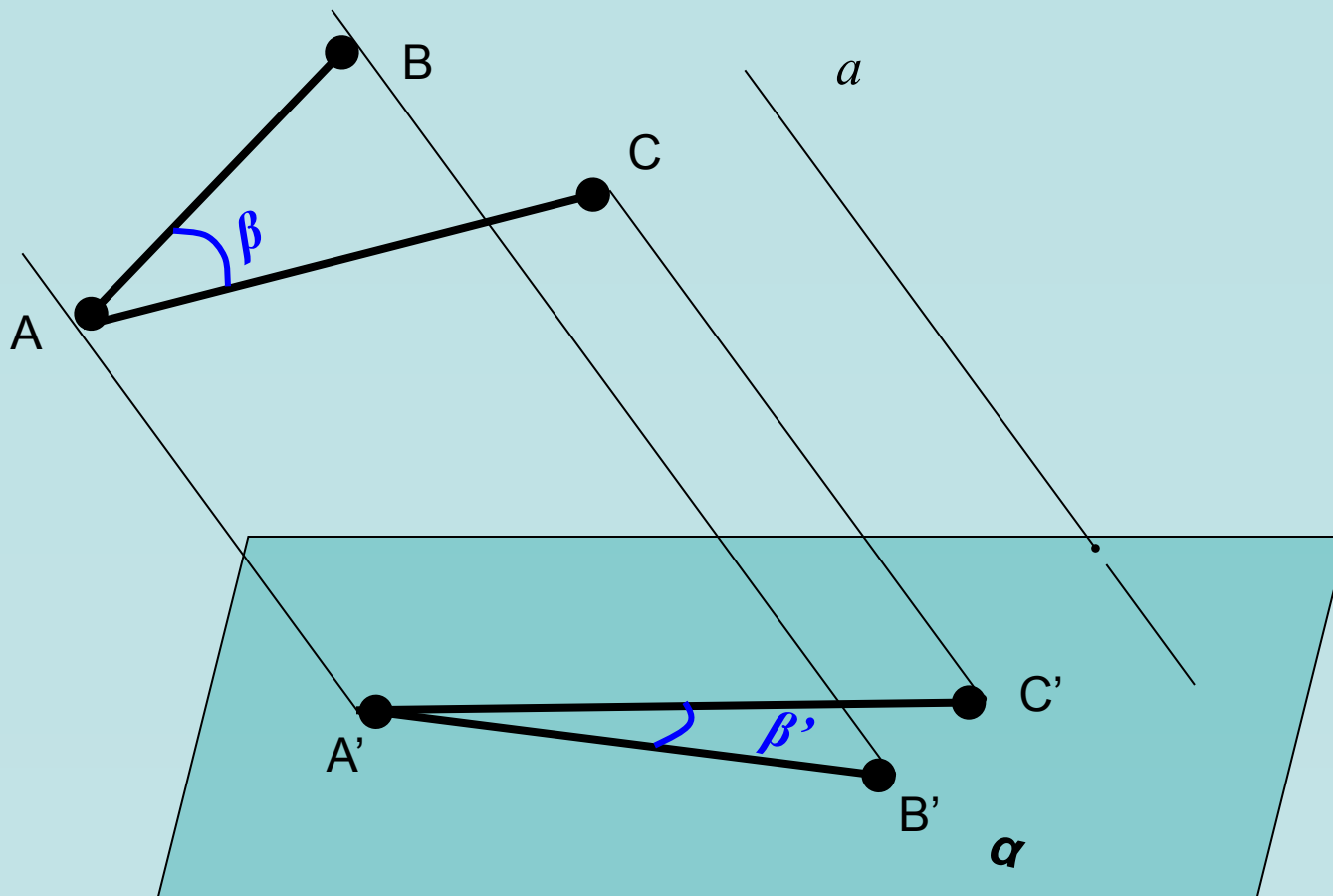
- 1) параллельность прямых (отрезков, лучей) **сохраняется**;
- 2) отношение длин отрезков, лежащих на параллельных или на одной прямой **сохраняется**;



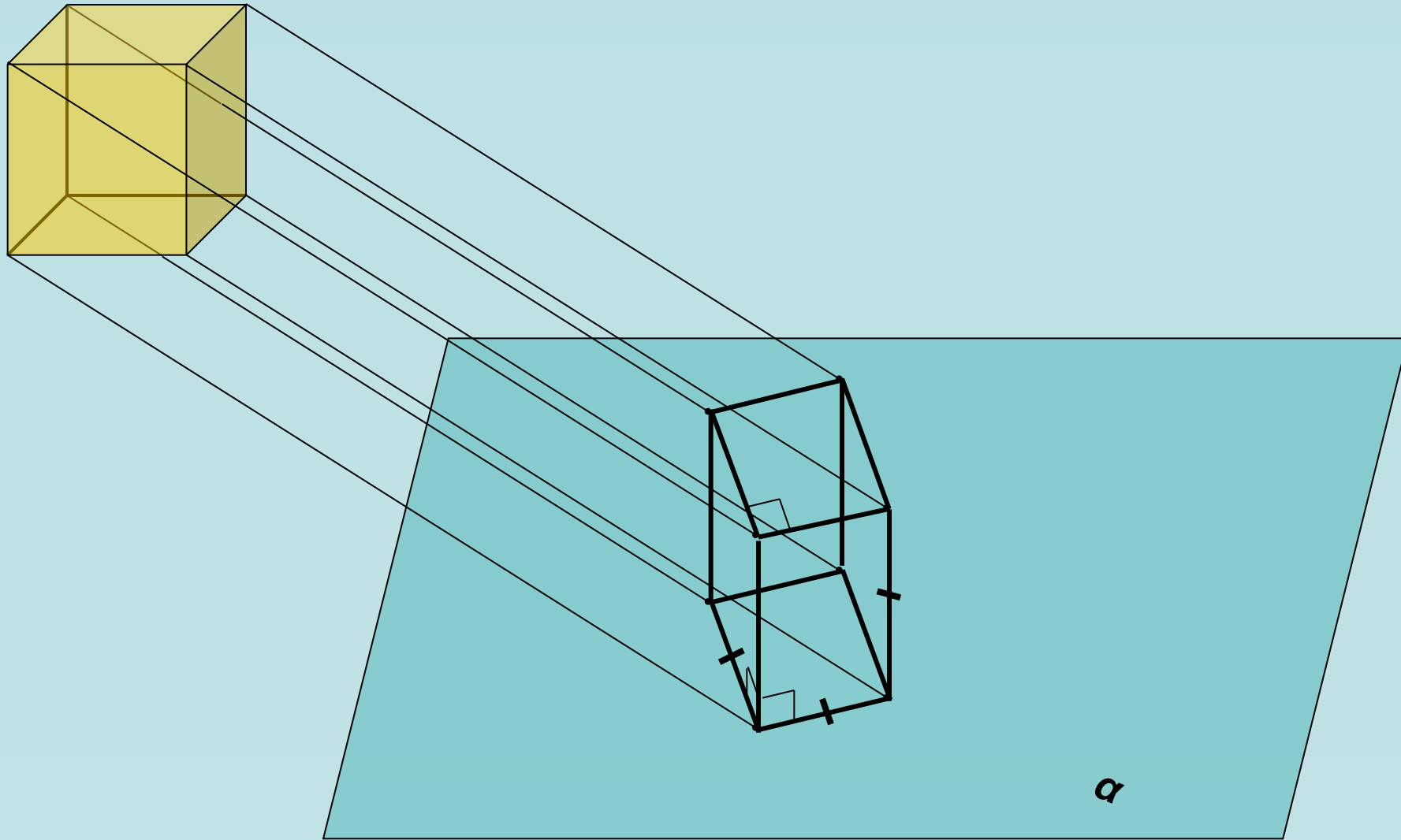
Если, например,  $AB=2CD$ , то  $A'B'=2C'D'$  или  $\frac{AM}{MB} = \frac{A'M'}{M'B'}$

Параллельное проектирование обладает свойствами:

- 1) параллельность прямых (отрезков, лучей) **сохраняется**;
- 2) отношение длин отрезков, лежащих на параллельных или на одной прямой **сохраняется**;
- 3) Линейные размеры плоских фигур (длины отрезков, величины углов) **не сохраняются** (исключение – см. примечание 4).

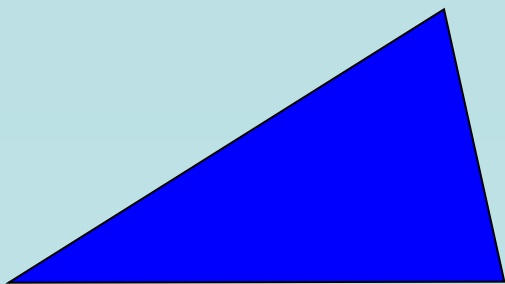


Итак, построим изображение куба:

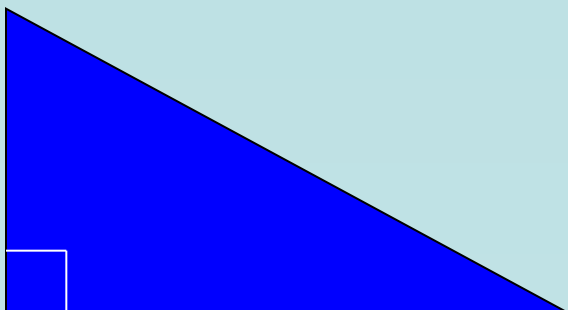


Далее разберем примеры изображения некоторых плоских фигур...

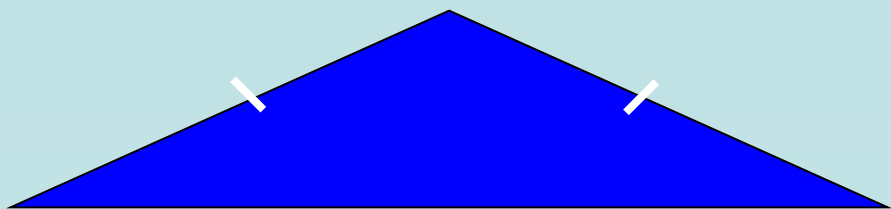
Фигура в пространстве



Произвольный треугольник

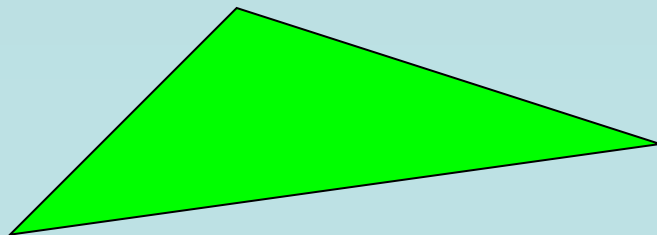


Прямоугольный треугольник

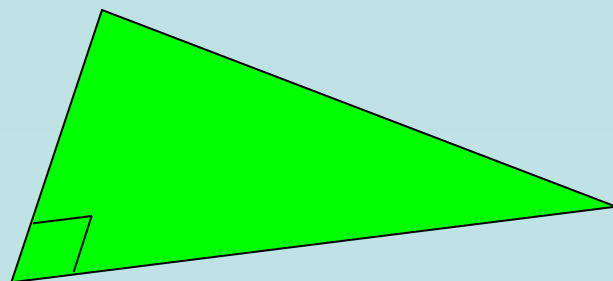


Равнобедренный треугольник

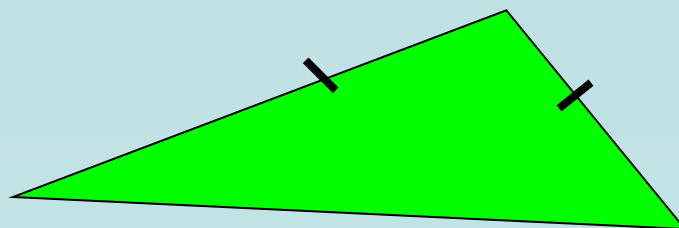
Её изображение на плоскости



Произвольный треугольник

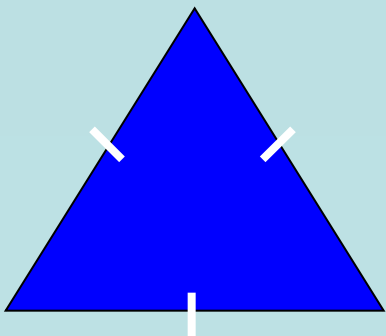


Произвольный треугольник



Произвольный треугольник

Фигура в пространстве



Равносторонний треугольник

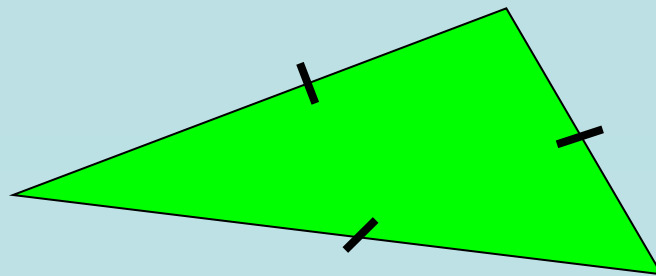


Параллелограмм

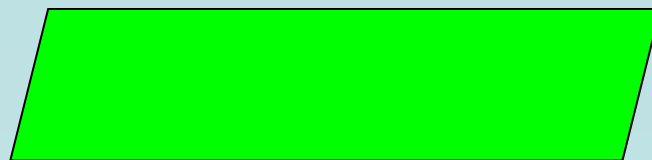


Прямоугольник

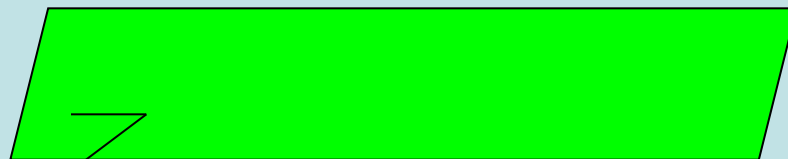
Её изображение на плоскости



Произвольный треугольник

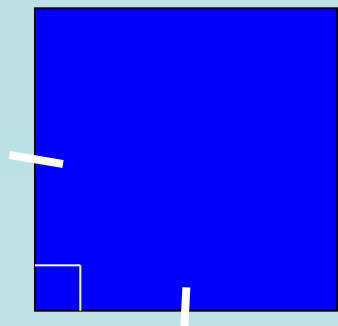


Произвольный параллелограмм

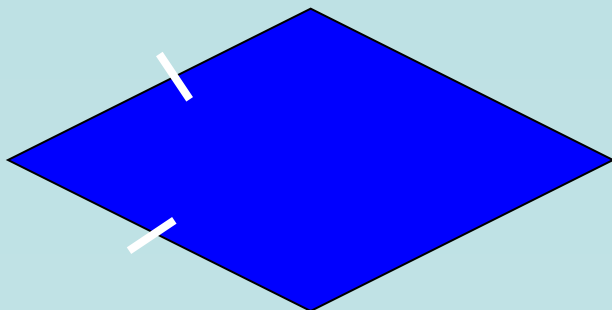


Произвольный параллелограмм

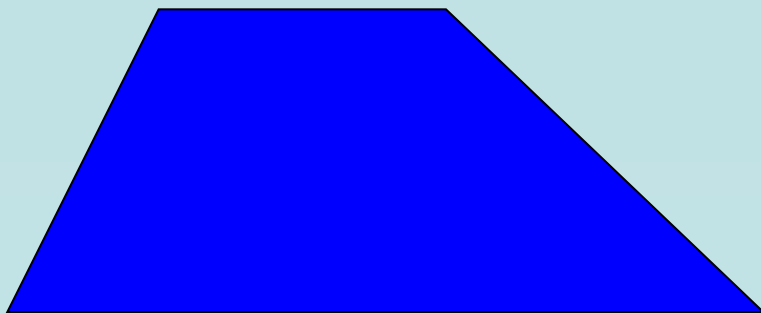
Фигура в пространстве



Квадрат

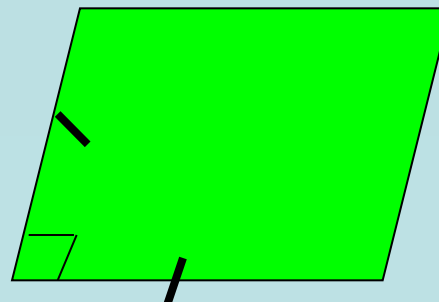


Ромб

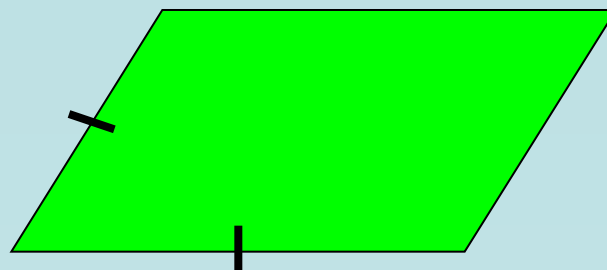


Трапеция

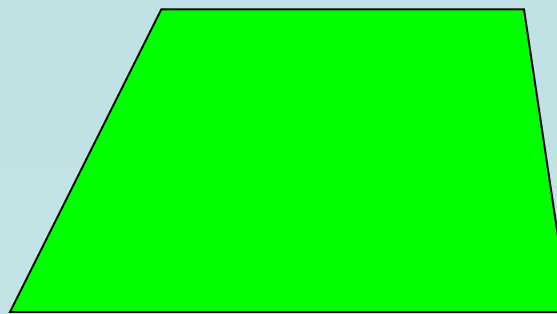
Её изображение на плоскости



Произвольный параллелограмм



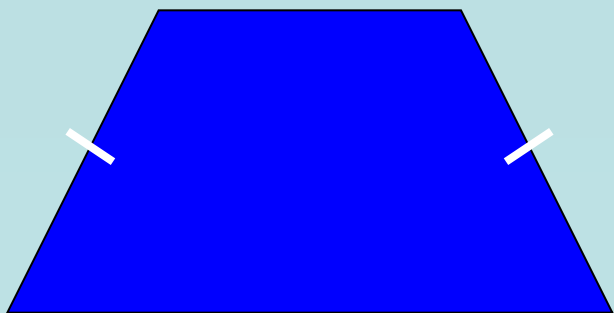
Произвольный параллелограмм



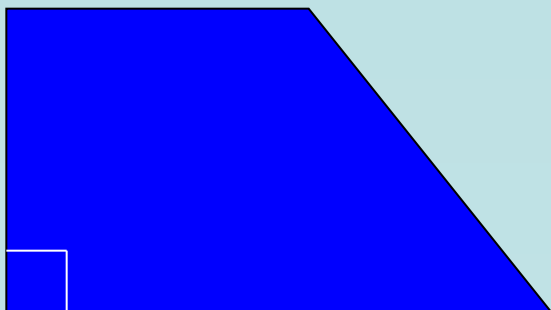
Произвольная трапеция



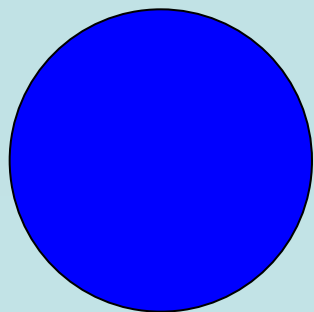
Фигура в пространстве



Равнобокая трапеция

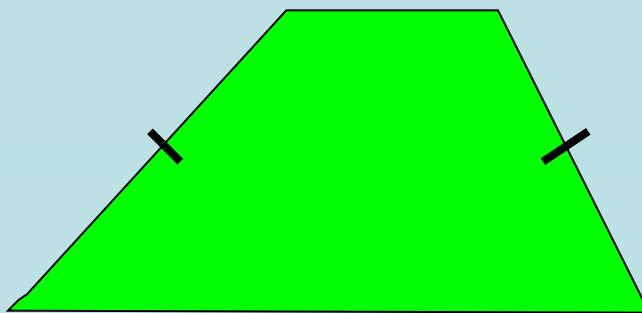


Прямоугольная трапеция

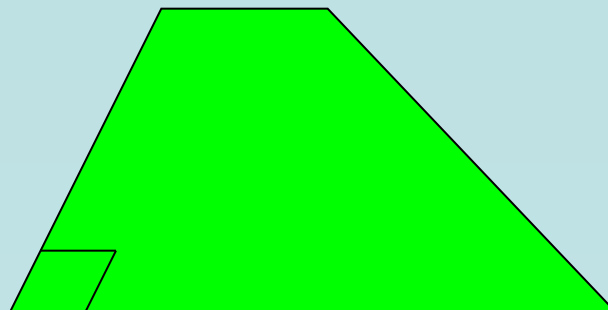


Круг (окружность)

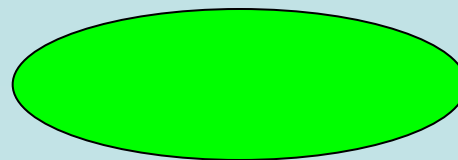
Её изображение на плоскости



Произвольная трапеция

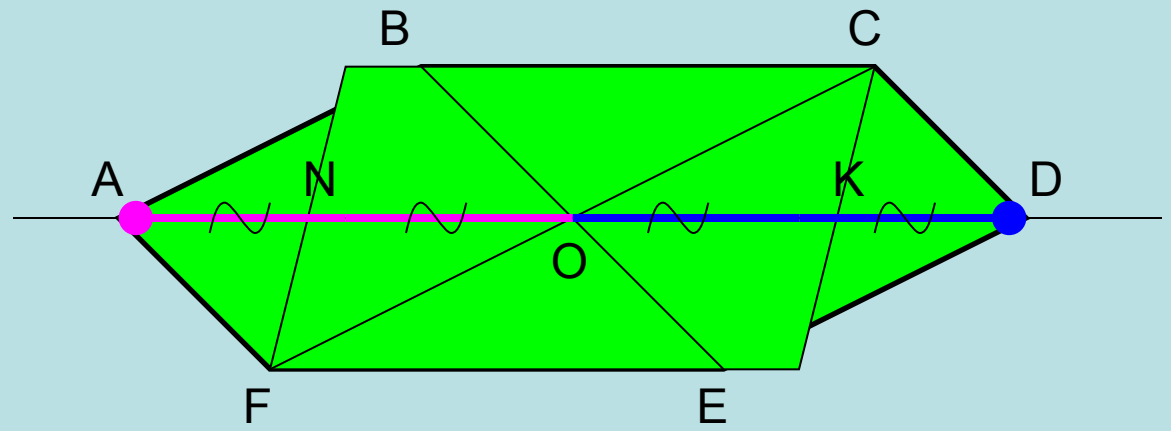
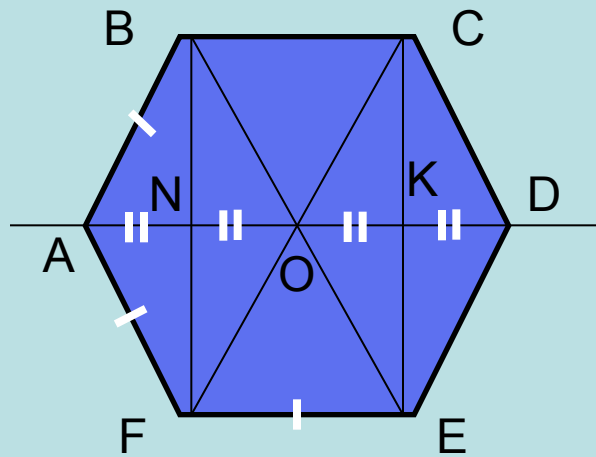


Произвольная трапеция



Овал (эллипс)

Разберемся, как построить изображение правильного шестиугольника.

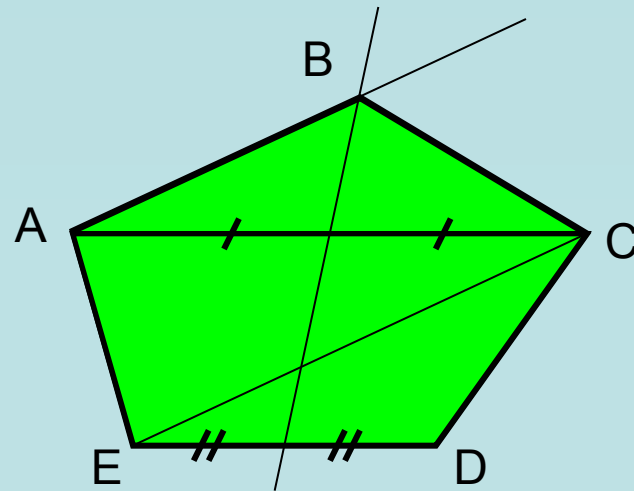
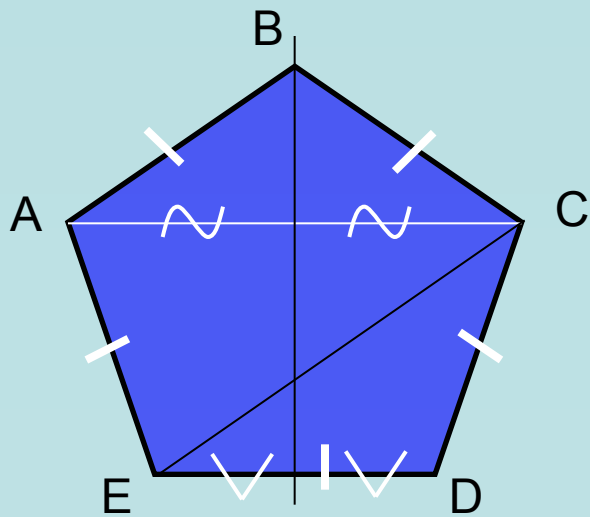


Разобьем правильный шестиугольник на три части: прямоугольник FBCE и два равнобедренных треугольника  $\triangle FAB$  и  $\triangle CDE$ . Построим вначале изображение прямоугольника FBCE – произвольный параллелограмм FBCE. Осталось найти местоположение двух оставшихся вершин – точек A и D.

Вспомнив свойства правильного шестиугольника, заметим, что: 1) эти вершины лежат на прямой, проходящей через центр прямоугольника и параллельной сторонам BC и FE; 2)  $OK = KD$  и  $ON = NA$ .

Значит, 1) находим на изображении точку O и проводим через неё прямую, параллельную BC и FE, получив при этом точки N и K;

2) откладываем от точек N и K от центра O на прямой такие же отрезки – в итоге получаем две оставшиеся вершины правильного шестиугольника A и D.



Попробуйте самостоятельно построить изображение *правильного пятиугольника*.

*Подсказка*: разбейте фигуру на две части – равнобокую трапецию и равнобедренный треугольник, а затем воспользуйтесь некоторыми свойствами этих фигур и, конечно же, свойствами параллельного проектирования.

*Решение*. Просмотрите ход построения...