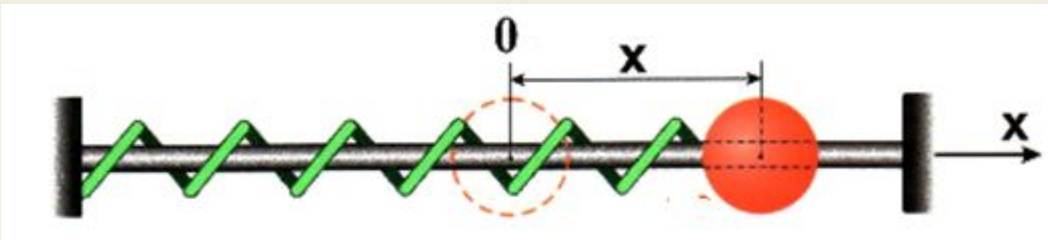
5.2 Свободные затухающие колебания

-это колебания, происходящие под действием внутренних сил системы; при этом **амплитуда** колебаний со временем **уменьшается из-за потерь энергии** реальной колебательной системой.

-В механических системах колебания затухают из-за взаимного трения частей системы или сопротивления среды; в колебательном контуре – из-за выделения джоулева тепла или излучения электромагнитной энергии.

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний и его решение

Получим это уравнение на примере **пружинного маятника**. При небольших скоростях движения тела сила сопротивления



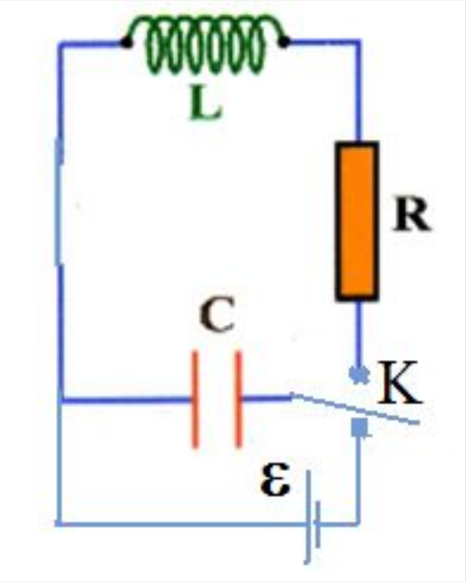
$$F_c = -r\upsilon = -r\dot{x}$$

$$m\vec{a} = \vec{F}_{упр} + \vec{F}_c$$

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad \frac{r}{m} = 2\beta, \frac{k}{m} = \omega_0^2$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$ (**)



Для реального колебательного контура $R(\neq 0$
)
в разделе 5.1 получили

$$\ddot{Q} + \frac{R}{L}\dot{Q} + \frac{1}{LC}Q = 0 \qquad (*)$$

Введя обозначения $Q = x, \frac{R}{L} = 2\beta, \frac{1}{LC} = \omega_0^2 \Rightarrow$ (*)

Получим (**): $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ - общий вид дифуравнения свободных затухающих колебаний любой природы.

Это однородное линейное (при постоянных коэффициентах) дифуравнение 2-го порядка.
Решение уравнения различно в зависимости от соотношения между коэффициентами. Рассмотрим 2 случая - $\beta < \omega_0$ и $\beta > \omega_0$.

1) **При небольшом затухании** $\beta \ll \omega_0$

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

, где начальная амплитуда и начальная фаза A_0, φ_o определяются из начальных условий $x(0), \dot{x}(0)$.

Частота колебаний

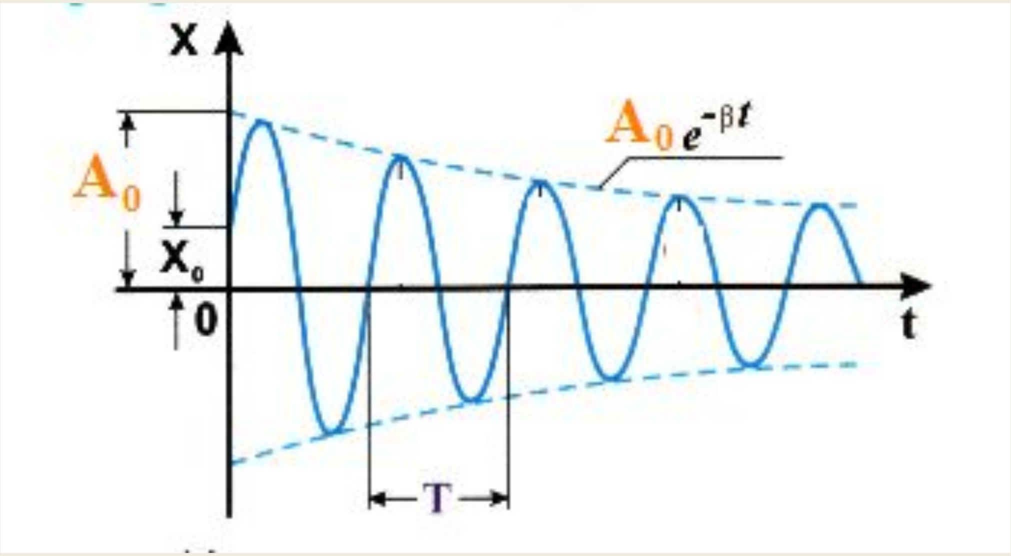
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

Амплитуда

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}$$



С ростом затухания период колебаний растет.

$$\beta \to \omega_0, \omega \to 0, T \to \infty.$$

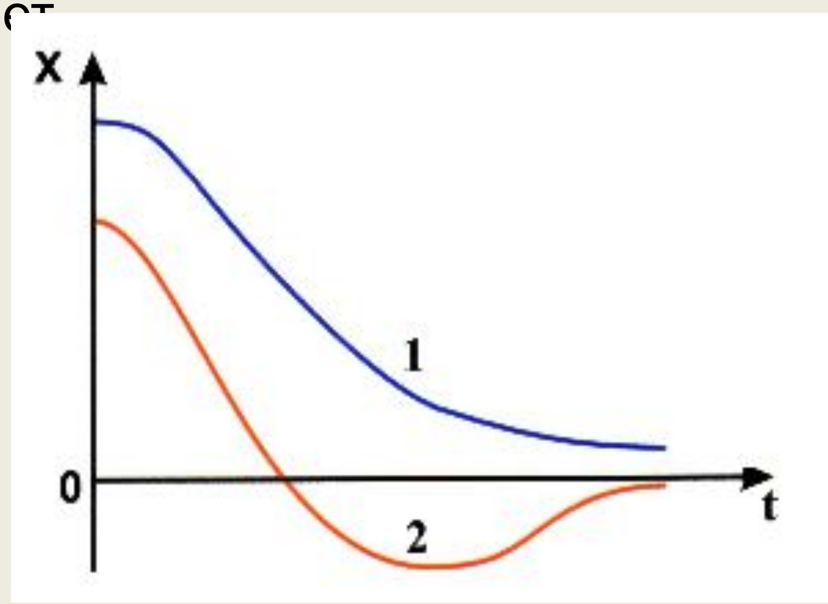
2) **При большом затухании** $\beta \gg \omega_0$

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

, где C_1, C_2 - вещественные постоянные, которые определяются начальными условиями.

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \underbrace{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}}_{\approx \beta} < 0$$

, т.е. x с течением времени убывает



При этом система совершает **апериодическое движение** – возвращение выведенной из состояния равновесия системы обратно происходит без колебаний двумя способами.

1 –систему вывели из состояния равновесия и отпустили без толчка.

2 – вывели из состояния равновесия и сообщили сильный толчок к положению равновесия.

Условие, при котором затухающие колебания переходят в апериодический процесс:

$$\beta = \omega_0$$

Для колебательного контура:

$$\frac{R_{кр}}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}}, R_{кр} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

-критическое сопротивление, при котором прекращаются колебания в контуре.

В механической системе с диссипативными силами:

$$\frac{r_{кр}}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}}, r_{кр} = 2\sqrt{km}$$

Общие характеристики колебательной системы с затуханием

1. **Коэффициент затухания β . Время релаксации τ.**

Рассмотрим промежуток времени

$$\tau = \frac{1}{\beta}$$

Отношение двух амплитуд, отстоящих друг от друга на этот промежуток времени

$$\frac{A(t+\tau)}{A(t)} = \frac{A_0 e^{-\beta(t+\tau)}}{A_0 e^{-\beta t}} = e^{-\beta\tau} = \frac{1}{e} \Longrightarrow A(t+\tau) = \frac{A(t)}{e}$$

Коэффициент затухания обратен по величине промежутку времени, за который амплитуда уменьшается в e раз.
Промежуток времени, за который амплитуда колебаний уменьшается в **e** раз, называется временем релаксации колебаний.

2. Логарифмический декремент затухания δ.

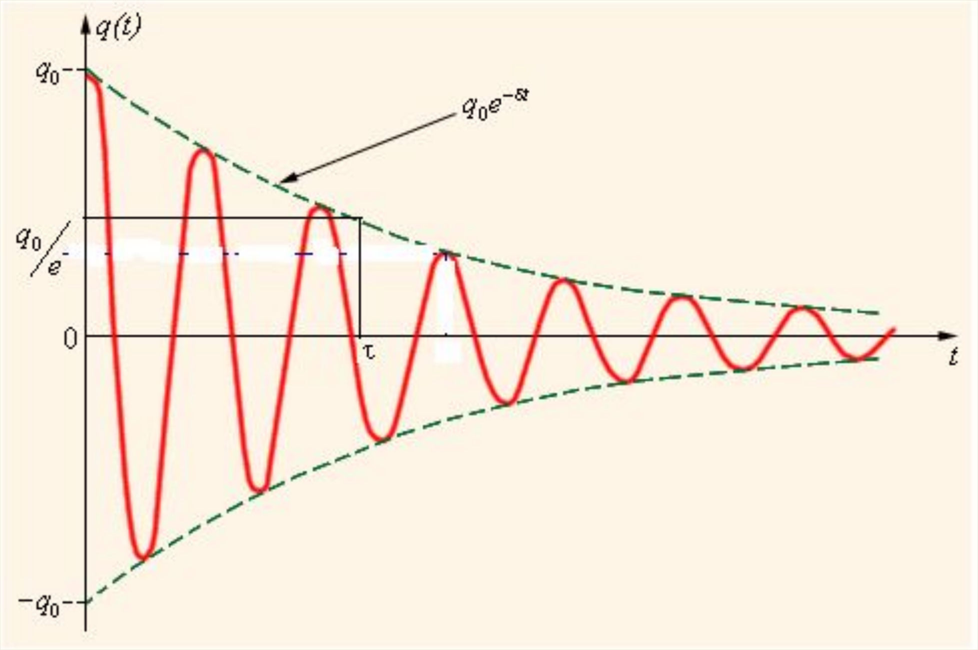
Отношение амплитуд, соответствующих моментам времени, различающимся на период, называют декрементом затухания

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = e^{+\beta T}$$

$$\delta = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T$$

$$\delta = \frac{T}{\tau} = \left(\frac{\tau}{T}\right)^{-1} = \frac{1}{N_e}$$

, где N_e - число колебаний, в течение которых амплитуда уменьшается в **е** раз.



Логарифмический декремент затухания обратен числу колебаний, в течение которых амплитуда уменьшается в е раз.

3. Добротность колебательной системы Q.

Добротность характеризует потери энергии в колебательной системе

$$Q = 2\pi \frac{E(t)}{E(t) - E(t+T)} \qquad (1)$$

Она равна произведению 2π на отношение энергии, запасенной в системе в произвольный момент времени, к убыли этой энергии за один период колебаний.

Рассмотрим колебательный контур с малым затуханием.

$$Q(t) = Q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Когда вся энергия сосредоточена в конденсаторе, полная энергия колебаний

$$E(t) = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q_0^2 e^{-2\beta t}}{2C}$$

$$E(t+T) = \frac{Q_0^2 e^{-2\beta (t+T)}}{2C}$$

$$\frac{E(t+T)}{E(t)} = e^{-2\beta T} \Rightarrow (1)$$

$$Q = 2\pi \frac{1}{1 - \dfrac{E(t+T)}{E(t)}} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\beta T}} \qquad (2)$$

При малом затухании колебаний $\beta \ll \omega_0$:

$$\beta T = \frac{\beta 2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\underbrace{\left(\dfrac{\omega_0}{\beta}\right)^2}_{\gg 1} - 1}} \ll 1$$

$$e^{-x}\Big|_{x \ll 1} \approx 1 - x \quad \Longrightarrow \quad (2)$$

$$Q = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\beta T}} = \frac{2\pi}{1 - (1 - 2\beta T)} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\pi}{\delta} = \pi N_e \qquad Q = \pi N_e$$

Добротность системы с малым затуханием пропорциональна числу колебаний, в течение которых амплитуда уменьшается в **e** раз.

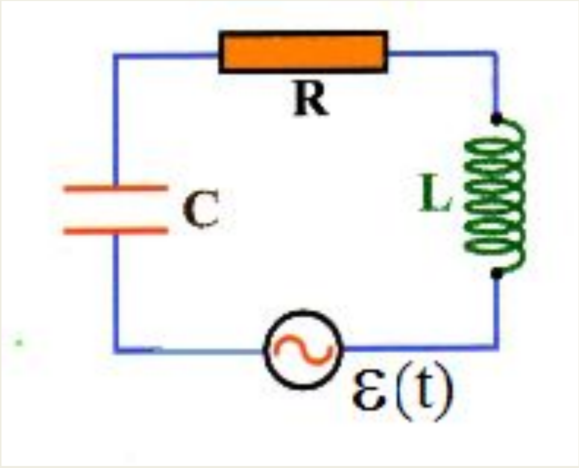
5.3 Вынужденные колебания

-Происходят под действием **внешней**, периодически меняющейся со временем **силы**. Чтобы в реальной колебательной системе получить незатухающие колебания, надо **компенсировать потери энергии**.

В колебательном контуре, например, такая компенсация осуществляется с помощью источника переменного тока.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний и его решение

Получим это уравнение на примере колебательного контура, подключенного к переменной ЭДС.



$$\varepsilon(t) + \varepsilon_s = U_C + U_R$$

$$\varepsilon(t) - L\frac{dI}{dt} = IR + \frac{Q}{C}\bigg| \times \frac{1}{L}$$

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{LC}Q = \frac{\varepsilon(t)}{L}$$

$$\frac{\varepsilon(t)}{L} = f(t)$$ - некая периодическая функция времени. Пусть, например, она меняется по гармоническому закону:

$$f(t) = \frac{\varepsilon_0}{L}\cos\Omega t = f_0 \cos\Omega t$$

Общий вид дифференциального уравнения вынужденных колебаний любой природы:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$$

Если вынуждающая сила изменяется по гармоническому закону с частотой Ω
уравнение имеет вид

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos\Omega t \qquad (1)$$

(1) – линейное (при постоянных коэффициентах) неоднородное уравнение 2-го порядка. Общее решение такого уравнения есть сумма общего решения однородного уравнения + любое частное решение неоднородного уравнения:

$$x(t) = x_{од}(t) + x_{н}(t)$$

Рассмотрим случай не очень быстрого затухания собственных колебаний, когда $\beta \ll \omega_0$

Тогда $x_{од}(t) = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0)$,

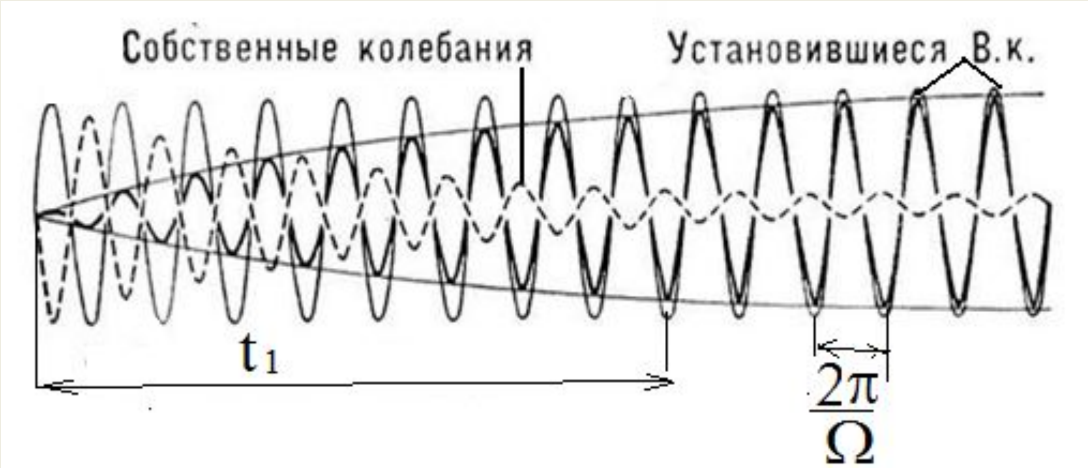
а $x_н(t)$ соответствует незатухающим колебаниям с частотой вынуждающей силы:

$$x_н(t) = A\cos(\Omega t - \varphi), \quad (2)$$

Где A – амплитуда, φ - величина отставания по фазе вынужденного колебания от вынуждающей силы.

После приложения периодически действующей силы к колебательной системе вначале возникает **переходный процесс**: со временем собственные колебания в системе затухают и остаются только колебания вида (2):

$$x(t)\big|_{t \gg t_1} = A\cos(\Omega t - \varphi) \quad (3)$$



$$x(t)\Big|_{t \gg t_1} = A\cos(\Omega t - \varphi) \qquad (3)$$

Определим A и φ, потребовав, чтобы x(t) удовлетворял (1).

$$\frac{dx}{dt} = -A\Omega\sin(\Omega t - \varphi) = A\Omega\cos(\Omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}) \qquad (4)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\Omega^2\cos(\Omega t - \varphi) = A\Omega^2\cos(\Omega t - \varphi + \pi) \qquad (5)$$

(3), (4), (5)$\Rightarrow$ (1):

$$A\Omega^2\cos(\Omega t - \varphi + \pi) + 2\beta A\Omega\cos(\Omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}) + A\omega_0^2\cos(\Omega t - \varphi) =$$

$$= f_0\cos\Omega t.$$

Последнее уравнение должно выполняться в любой момент времени. Для t=0:

$$A\Omega^2\cos(\pi - \varphi) + 2\beta A\Omega\cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) + A\omega_0^2\cos(-\varphi) = f_0$$

Т.к. $\cos(\pi - \varphi) = \cos(-\varphi)$, то

$$A(\omega_o^2-\Omega^2)\cos(-\varphi)+2\beta A\Omega\cos(\frac{\pi}{2}-\varphi)=f_0$$

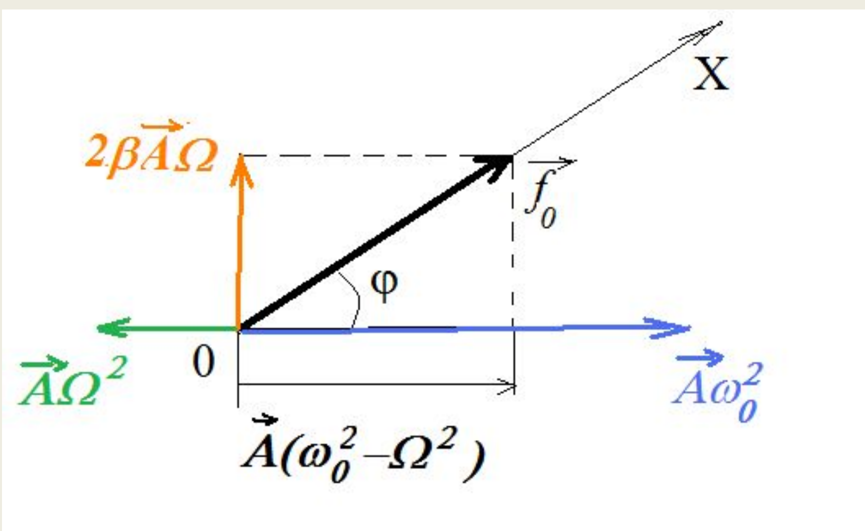
$$A(\omega_o^2-\Omega^2)\cos\varphi+2\beta A\Omega\sin\varphi=f_0 \qquad (6)$$

Далее используем метод векторных диаграмм. Рассмотрим векторное уравнение

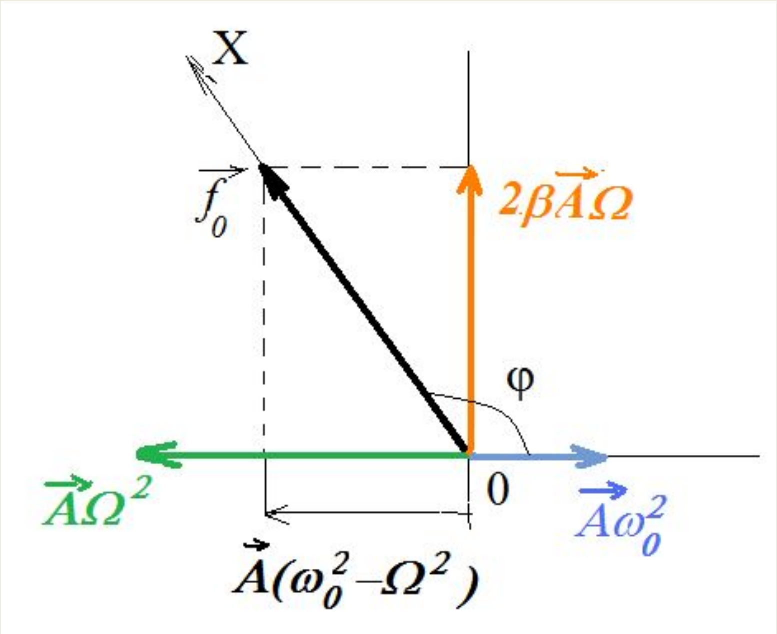
$$\vec{f}_0=\vec{A}(\omega_0^2-\Omega^2)+2\beta\vec{A}\Omega$$

Выражение (6) – проекция на ось *OX* векторного уравнения (см. рис.)

а) $\omega_0 > \Omega$



б) $\omega_0 < \Omega$



Из прямоугольного треугольника

$$f_0^2 = A^2\left[(\omega_0^2 - \Omega^2) + 4\beta^2\Omega^2\right]$$

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}} \qquad (7)$$

$$tg\varphi = \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \qquad (8)$$

Т.о. А и φ зависят от соотношения ω_0 и Ω, хотя вынужденные колебания происходят при частоте вынуждающей силы.

Если нет затухания, т.е. $\beta = 0$, то $\varphi = 0$ - нет отставания по фазе колеблющейся величины *X* от вынуждающей силы.

Резонанс

Амплитуда вынужденных колебаний определяется выражением

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}$$

Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждаю-щей силы приводит к тому, что **при некоторой определенной для данной системы частоте амплитуда достигает максимального значения**. **Это явле-ние называется резонансом, а соответствующая частота - резонансной**.

Рассмотрим две ситуации.

а) $\omega_0, \beta = const$, Ω меняется.

Резонансную частоту Ω_p определим из условия максимального значения амплитуды или минимального значения для подкоренного выражения в знаменателе. Продифференцировав это выражение по Ω и приравняв нулю, получим условие, определяющее резонансную частоту:

$$\frac{d}{d\Omega}\left[(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\beta^2\Omega^2\right]=0$$

$$2(\omega_0^2-\Omega^2)(-2\Omega)+8\beta^2\Omega=0$$

$$\omega_0^2-\Omega^2=2\beta^2 \qquad \Omega=\pm\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$$

$$\Omega_p=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$$

- частота вынуждающей силы, при которой амплитуда вынужденных колебаний максимальна.

$$A_{\max}=\frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega_p{}^2)^2+4\beta^2\Omega_p{}^2}}=\frac{f_0}{\sqrt{4\beta^4+4\beta^2(\omega_0^2-2\beta^2)}}$$

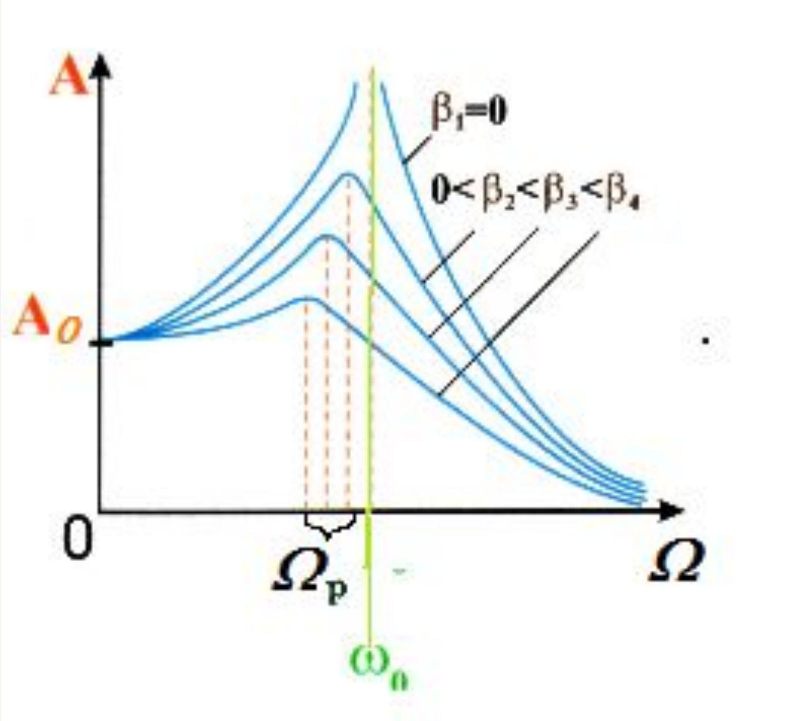
$$A_{\max}=\frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}=\frac{f_0}{2\beta\omega}$$

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}$$

$$\Omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

$$A_{\max} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

Исследуем зависимость $A(\Omega)$:



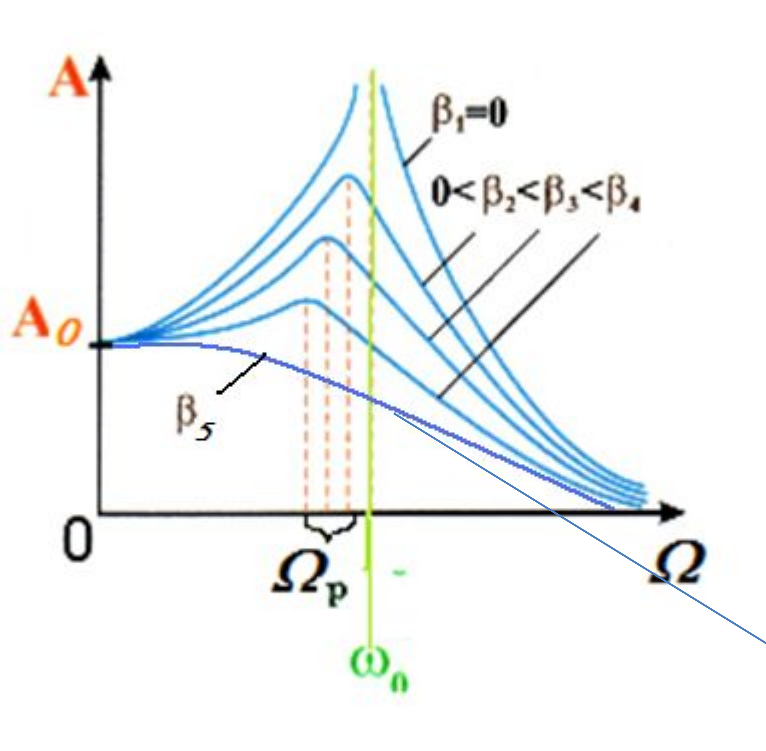
1) $\Omega = 0 : A = A_0 = \dfrac{f_0}{\omega_0^2}$ - статическое смещение системы из положения равновесия под действием постоянной силы f_0 .

2) $\Omega \to \infty : A \to 0.$

3) Изменяем β :

$$\beta = 0, \Omega_p = \omega_{0,} A_{\max} = \infty$$

$$\beta \neq 0, \beta \uparrow, \Omega_p \downarrow, A_{\max} \downarrow .$$



Т.о. с ростом коэффициента затухания уменьшается рост амплитуды при резонансе, а резонансная частота смещается влево по оси частот.

$$\Omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

При $\Omega_p \le 0, \beta \ge \dfrac{\omega_0}{\sqrt{2}}$ резонанса

амплитуд не наблюдается.

При малом затухании

$$A_{\max} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \approx \frac{f_0}{2\beta\omega_0}$$

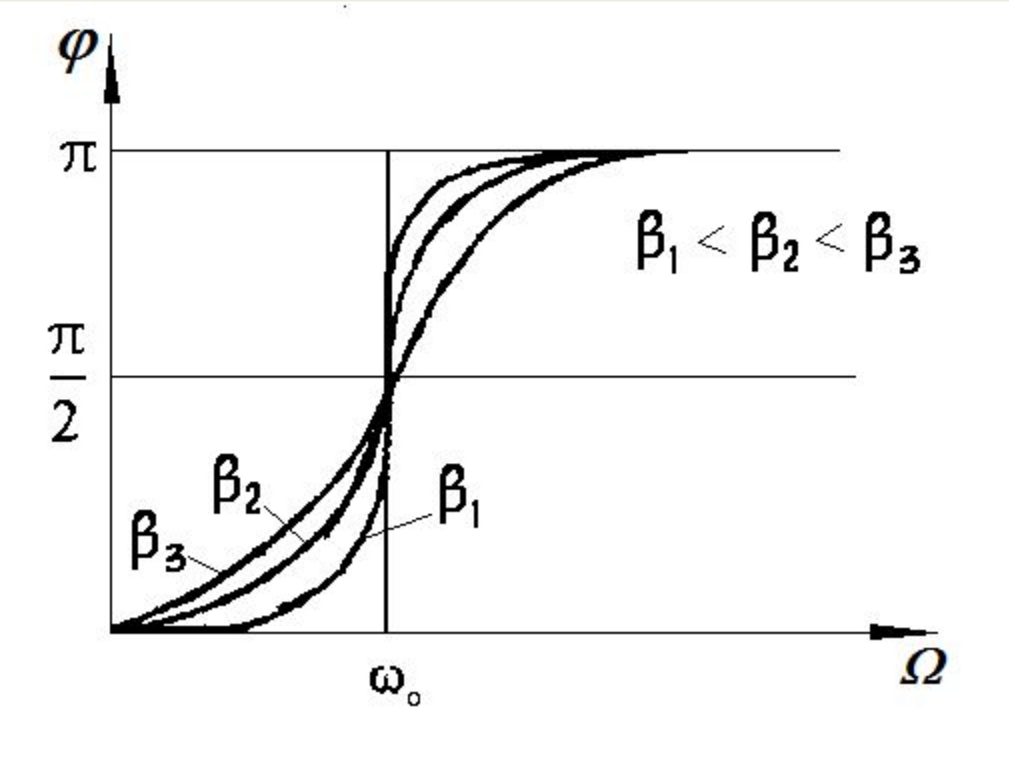
$$A_0 = \frac{f_0}{\omega_0^2}$$

$$\frac{A_{\max}}{A_0} = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{2\pi}{2\beta T_0} = \frac{\pi}{\delta} = Q$$

добротность системы при малом затухании - отношение амплитуды в резонансе к статическому смещению .

$$tg\varphi = \frac{2\beta\,\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \quad (8)$$

Изобразим фазовые резонансные кривые $\varphi(\Omega)$



$$\Omega = 0 : tg\varphi = 0, \varphi = 0$$

$$\Omega = \omega_0 : tg\varphi = \infty, \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\Omega \to \infty : tg\varphi \to 0, \varphi \to \pi$$

б) $\Omega, \beta = const$, меняется ω_0 . (Например, настройка радиоприемника на частоту передающей станции).

Различают несколько видов резонанса.
Рассмотренный вид называется **резонансом смещений** (в колебательном контуре это резонанс напряжения на обкладках конденсатора).
Другой вид резонанса – **резонанс скоростей-** возрастание амплитуды скорости вынужденных колебаний (в колебательном контуре это соответствует резонансу тока).