5.4 СЛОЖЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ

Часто периодический процесс описывается некой негармонической функцией $F(t) = F(t+T)$, где Т – период. Можно строго показать, что такая функция есть сумма гармонических колебаний различных частот ω_i.

Метод разложения негармонической функции на гармонические составляющие называется **разложением в ряд Фурье** и является основным методом исследования в радиотехнике.

Сложение колебаний, направленных вдоль одной прямой. Биения.

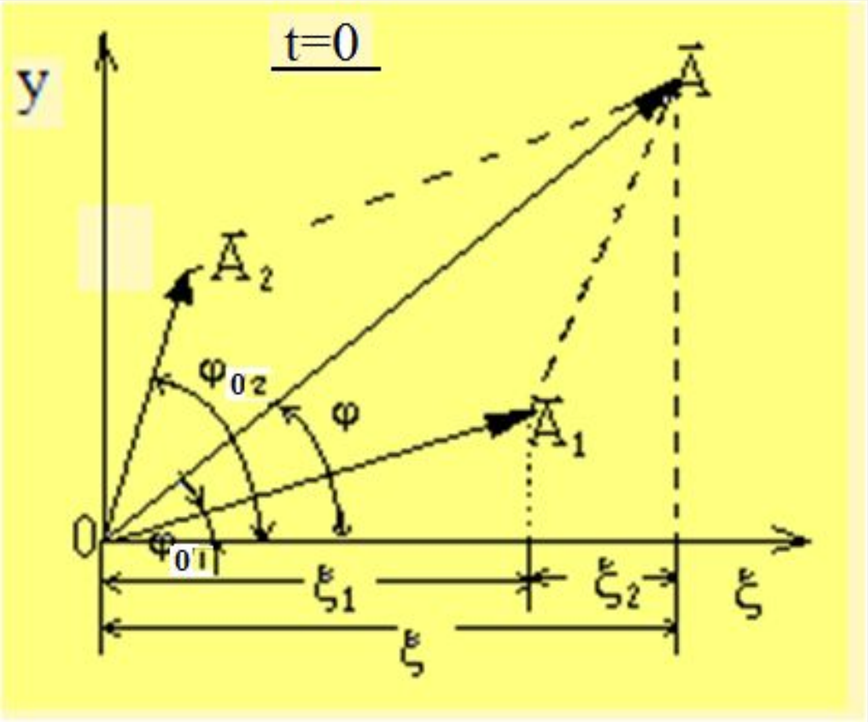
Рассмотрим сложение двух гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты. Воспользуемся методом векторных диаграмм.

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$$

$$\xi_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_{01})$$
$$\xi_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_{02})$$

$$\varphi_0 = \varphi_{02} - \varphi_{01} = const$$

$$\xi = \xi_1 + \xi_2$$



Результирующее колебание:

$$\xi = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\varphi_0$$

$$tg\varphi = \frac{y_1 + y_2}{\xi_1 + \xi_2}$$

$$tg\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_{01} + A_2\sin\varphi_{02}}{A_1\cos\varphi_{01} + A_2\cos\varphi_{02}}$$

Если $\omega_{01} \neq \omega_{02}$, результирующее колебание будет негармоническим.

Тогда разность фаз колебаний: $$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (\omega_{02} - \omega_{01})t + (\varphi_{02} - \varphi_{01})$$

Рассмотрим случай близких частот, когда

$$\omega_{01} = \omega; \;\; \omega_{02} = \omega + \Delta\omega \quad \text{и} \quad \Delta\omega << \omega$$

Пусть $A_1 = A_2 = A_0$ $\qquad \varphi_{01} = \varphi_{02} = 0$

Тогда: $$\xi_1 = A_0 \cos\omega t$$
$$\xi_2 = A_0 \cos(\omega + \Delta\omega)t$$

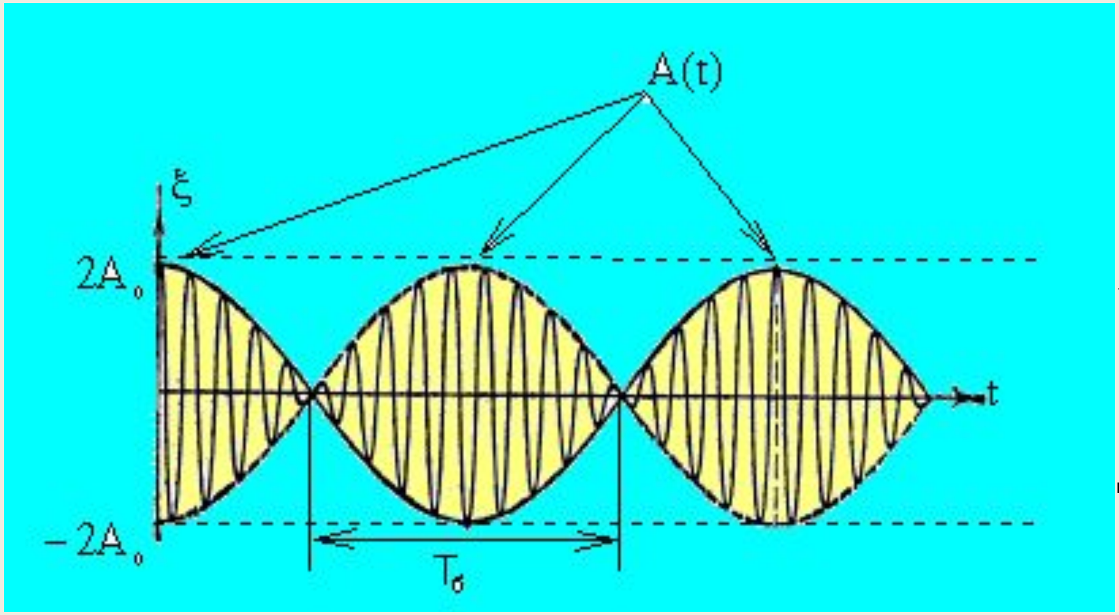
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = A_0\left[\cos\omega t + \cos(\omega + \Delta\omega)t\right] =$$

$$= 2A_0 \cos\underbrace{(\omega + \frac{\Delta\omega}{2})}_{\Delta\omega \langle\langle \omega} t \cdot \cos\frac{\Delta\omega}{2}t \approx \left(2A_0 \cos\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos(\omega t)$$

Периодические изменения амплитуды результирующего колебания при наложении двух гармонических колебаний одинакового направления с близкими частотами называются биениями.

$$\xi = \left(2A_0 \cos\frac{\Delta\omega}{2} t \right) \cos(\omega t)$$



Биения возникают от того, что один из двух сигналов постоянно отстаёт от другого по фазе и в те моменты, когда колебания происходят синфазно, суммарный сигнал оказывается усилен, а в те моменты, когда два сигнала оказываются в противофазе, они взаимно гасят друг друга. Эти моменты периодически сменяют друг друга по мере того как нарастает отставание.

$$A(t) = \left| 2A \cos\frac{\Delta\omega}{2} t \right|$$ - амплитуда биений

$$T_б = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$$ - период пульсаций амплитуды

Сложение взаимно перпендикулярных колебаний.
Фигуры Лиссажу.

Найдем траекторию движения м.т., колеблющейся одновременно вдоль осей OX и OY по законам:

$$\begin{cases} x = A_1 \cos \omega_1 t \\ y = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_0) \end{cases}$$

Вначале рассмотрим случай $\omega_1 = \omega_2 = \omega$

$$\frac{x}{A_1} = \cos \omega t \Rightarrow \sin \omega t = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{A_1}\right)^2}$$

$$\frac{y}{A_2} = \cos(\omega t + \varphi_0) = \cos \omega t \cos \varphi_0 - \sin \omega t \sin \varphi_0$$

$$\frac{y}{A_2} = \frac{x}{A_1} \cos \varphi_0 - \sqrt{1 - \left(\frac{x}{A_1}\right)^2} \sin \varphi_0$$

$$\sqrt{1 - \left(\frac{x}{A_1}\right)^2} \sin \varphi_0 = \frac{x}{A_1} \cos \varphi_0 - \frac{y}{A_2}$$

$$\left[1-\left(\frac{x}{A_1}\right)^2\right]\sin^2\varphi_0=\left(\frac{x}{A_1}\right)^2\cos^2\varphi_0-2\frac{xy}{A_1A_2}\cos\varphi_0+\left(\frac{y}{A_2}\right)^2$$

$$\frac{x^2}{A_1^2}-2\frac{xy}{A_1A_2}\cos\varphi_0+\frac{y^2}{A_2^2}=\sin^2\varphi_0 \quad (1)$$

- траектория движения точки.

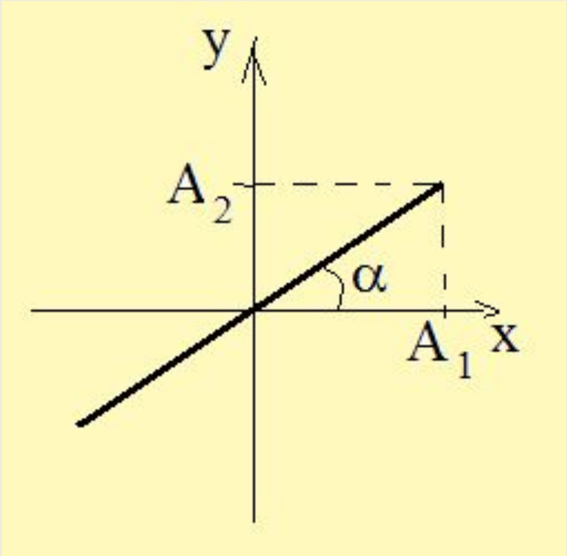
Это уравнение эллипса, оси которого повернуты относительно осей *OX,OY.*

Рассмотрим частные случаи.

а) $\underline{\varphi_0=0}:\ \frac{x^2}{A_1^2}-2\frac{xy}{A_1A_2}+\frac{y^2}{A_2^2}=0;$

$$\left(\frac{y}{A_2}-\frac{x}{A_1}\right)=0;$$

$$\left.\begin{aligned} y&=\frac{A_2}{A_1}x \\ tg\alpha&=\frac{A_2}{A_1}\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$



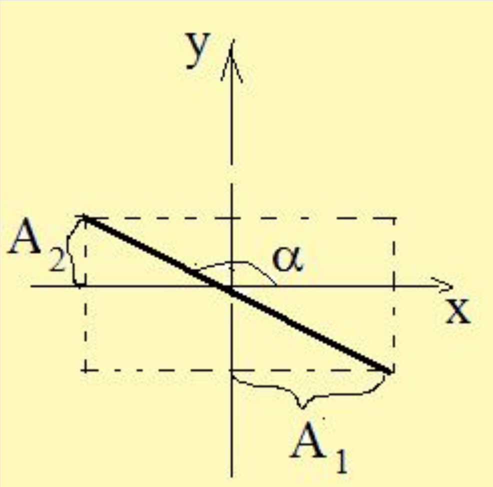
б)

$$\underline{\varphi_0 = \pi} : \frac{x^2}{A_1^2} + 2\frac{xy}{A_1 A_2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 0;$$

$$\left(\frac{y}{A_2} + \frac{x}{A_1}\right) = 0;$$

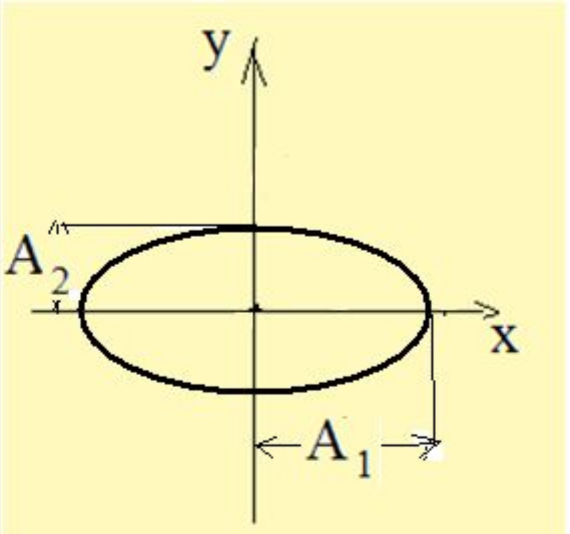
$$y = -\frac{A_2}{A_1}x$$

$$tg\alpha = -\frac{A_2}{A_1}$$



в)

$$\underline{\varphi_0 = \frac{\pi}{2}} : \frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$$

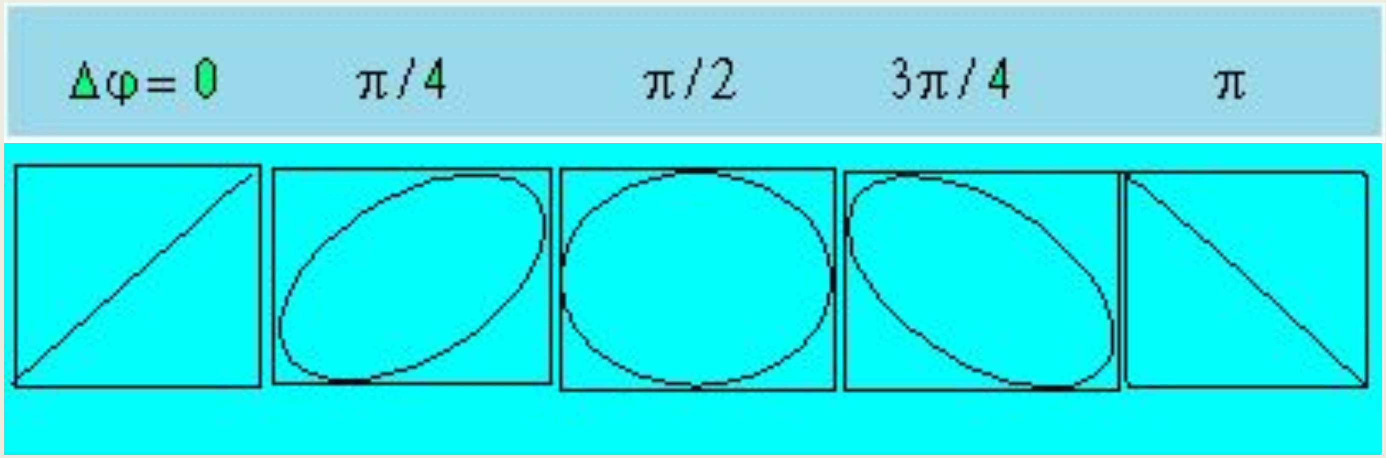


Рассмотрим случай близких частот, когда $\omega_{01} = \omega; \ \omega_{02} = \omega + \Delta\omega$ и $\Delta\omega << \omega$

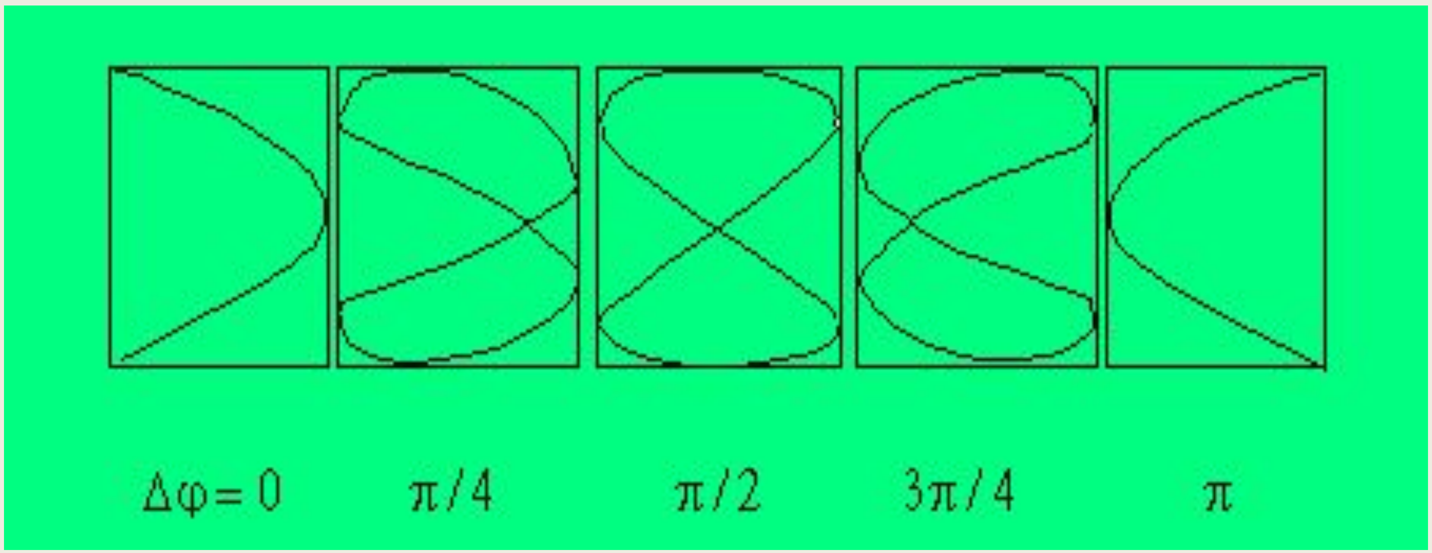
$$x = A_1 \cos \omega t$$

$$y = A_2 \cos[(\omega + \Delta\omega)t + \varphi_0] = A_2 \cos[\omega t + \Delta\varphi(t)]$$

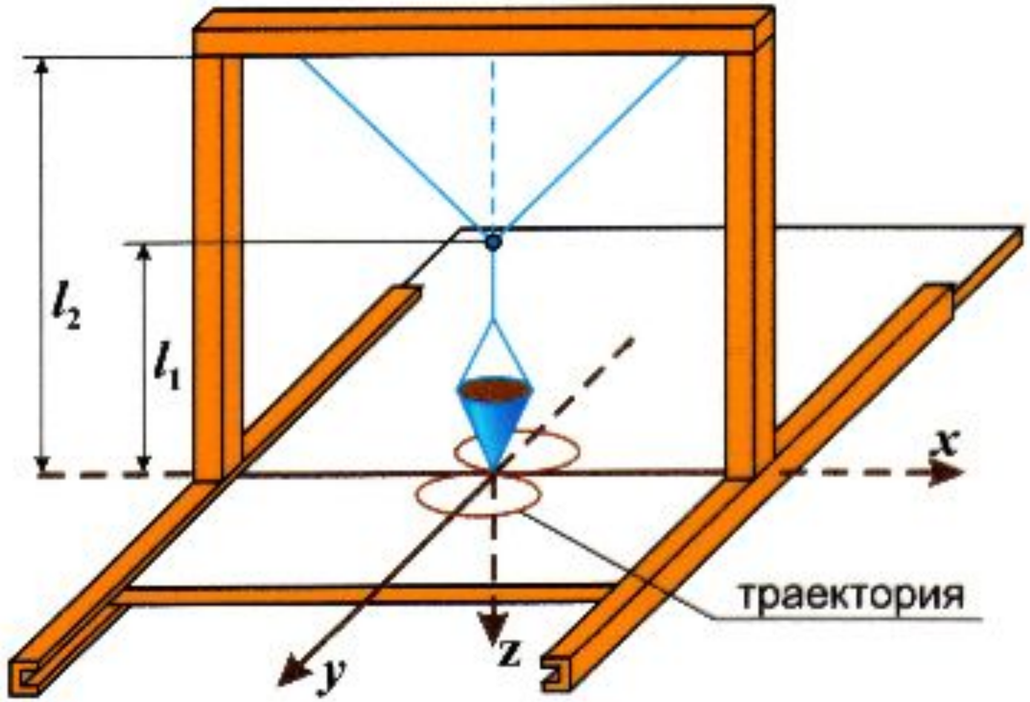
$\Delta\varphi(t) = \Delta\omega t + \varphi_o$ - разность фаз складываемых колебаний медленно меняется со временем по сравнению с изменением самих фаз.



При сложении взаимно перпендикулярных гармонических колебаний характер результирующего процесса существенным образом определяется соотношениями амплитуд, частот и разностью фаз исходных колебаний. При $\omega_1 \neq \omega_2$ кривые имеют сложный вид; они называются **фигурами Лиссажу**.



$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{2}$$



ω_1 - частота колебаний в плоскости YZ

ω_2 - в плоскости XZ

$$\frac{\omega_1}{\omega_2}=\sqrt{\frac{l_2}{l_1}}$$

Фигуры Лиссажу