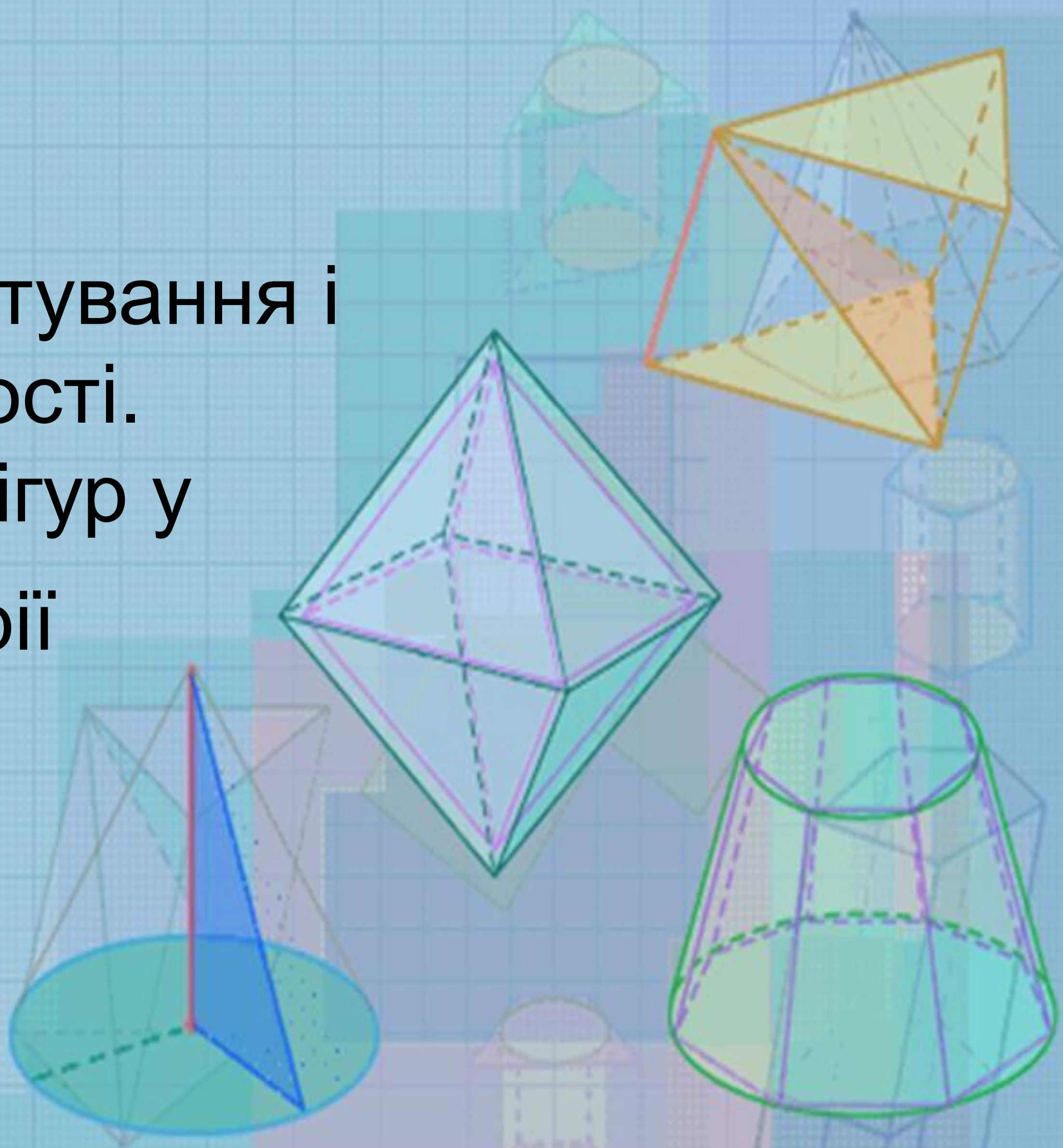
Паралельне проектування і його властивості. Зображення фігур у стереометрії

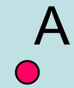


Воробьев Леонид Альбертович, г.Минск

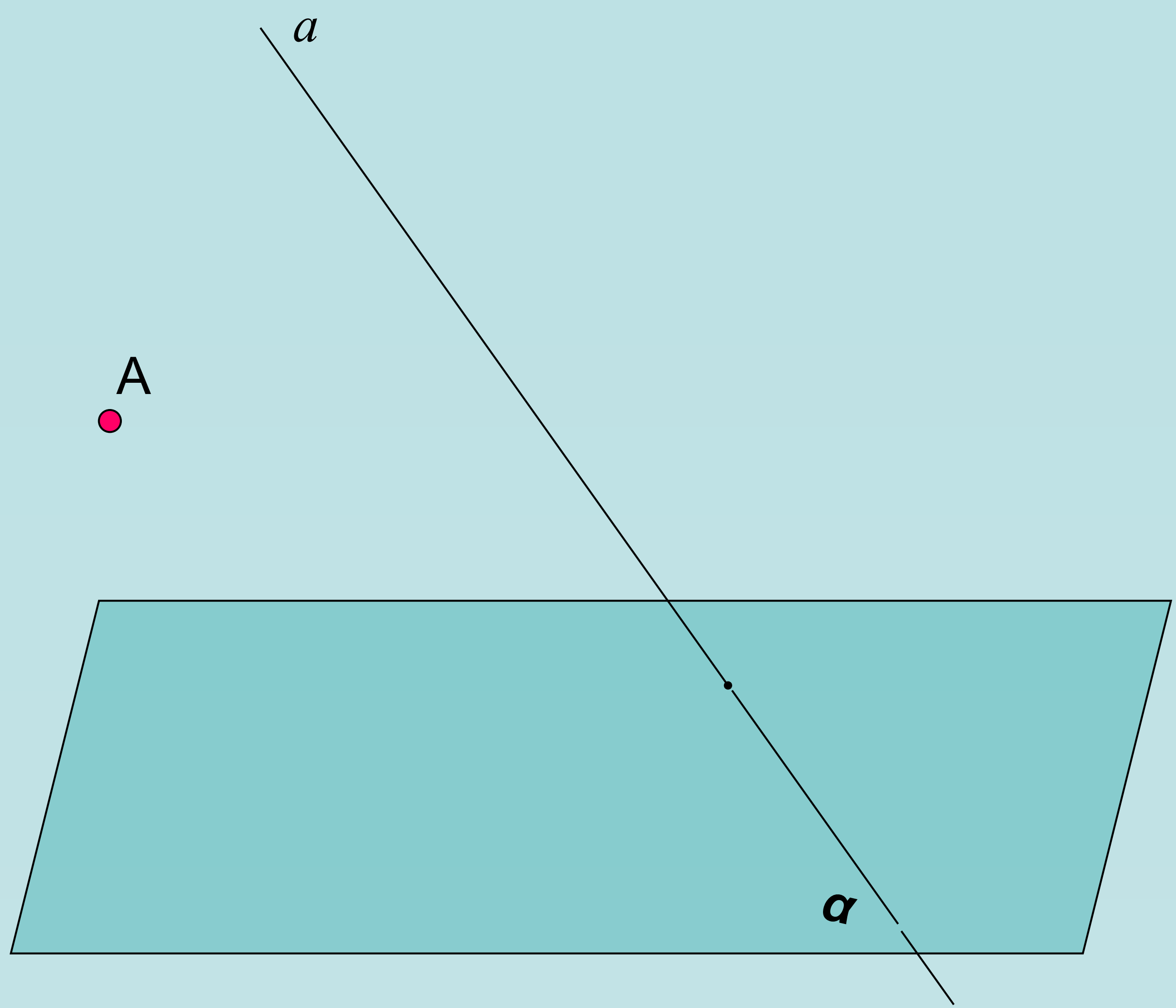
Ми почали вивчати *стереометрію* – геометрію у просторі. Як завжди нам необхідно вміти зображувати геометричні фігури, причому всі креслення ми і досі виконуємо на площині (на сторінці зошита, на дошці тощо). Яким чином просторову фігуру (наприклад , куб) можна «вкласти» до площини?

Для розв'язання цієї задачі приймається *метод паралельного проектування*. З'ясуємо його суть на прикладі найпростішої геометричної фігури – точки.

Таким чином, у нас є геометрична фігура у просторі – точка А.

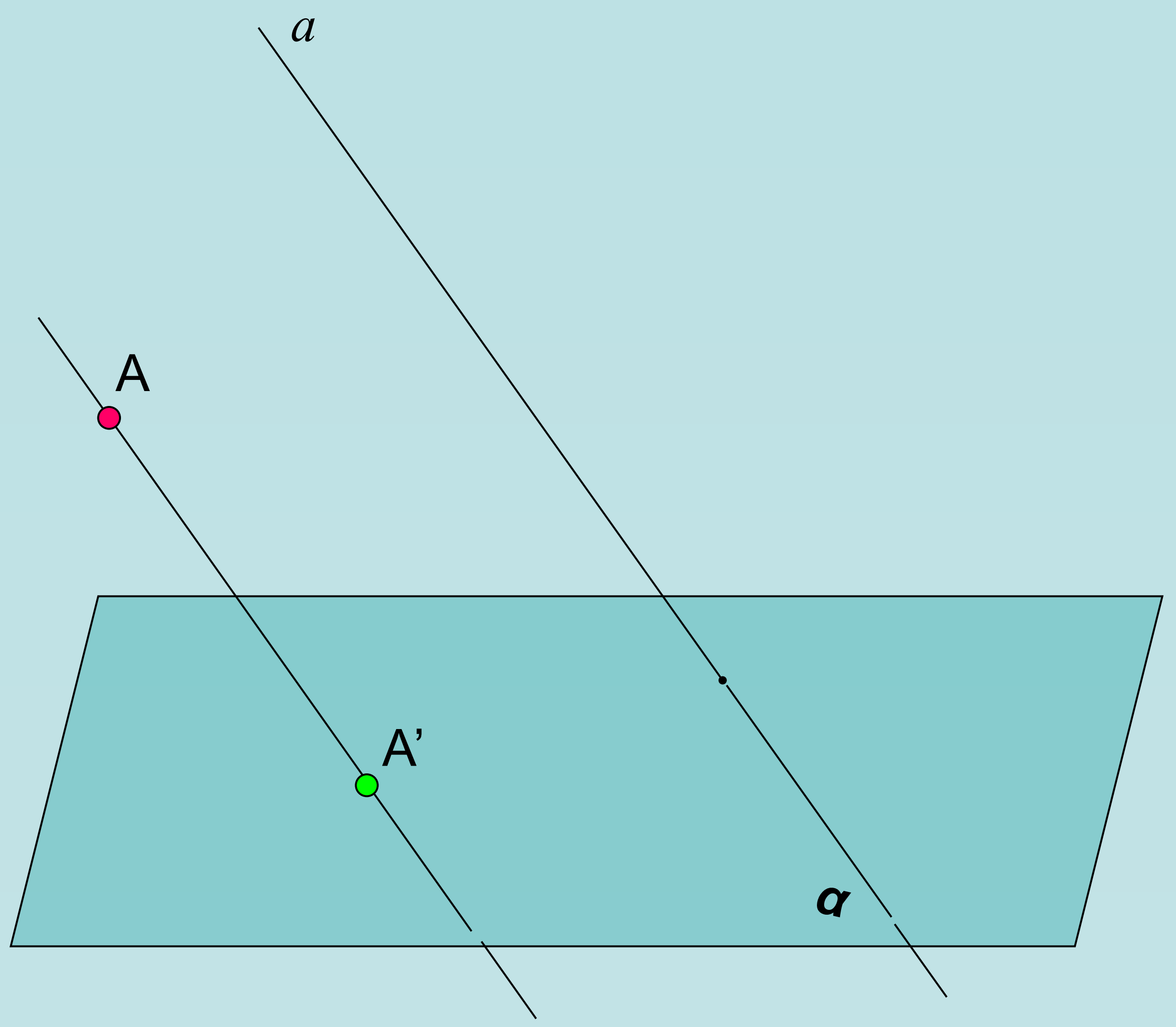


Оберемо у просторі довільну площину α (її ми будемо називати *площиною проекцій*) та довільну пряму $a \cap \boldsymbol{\alpha}$ (вона задає *напрямок паралельного проектування*).

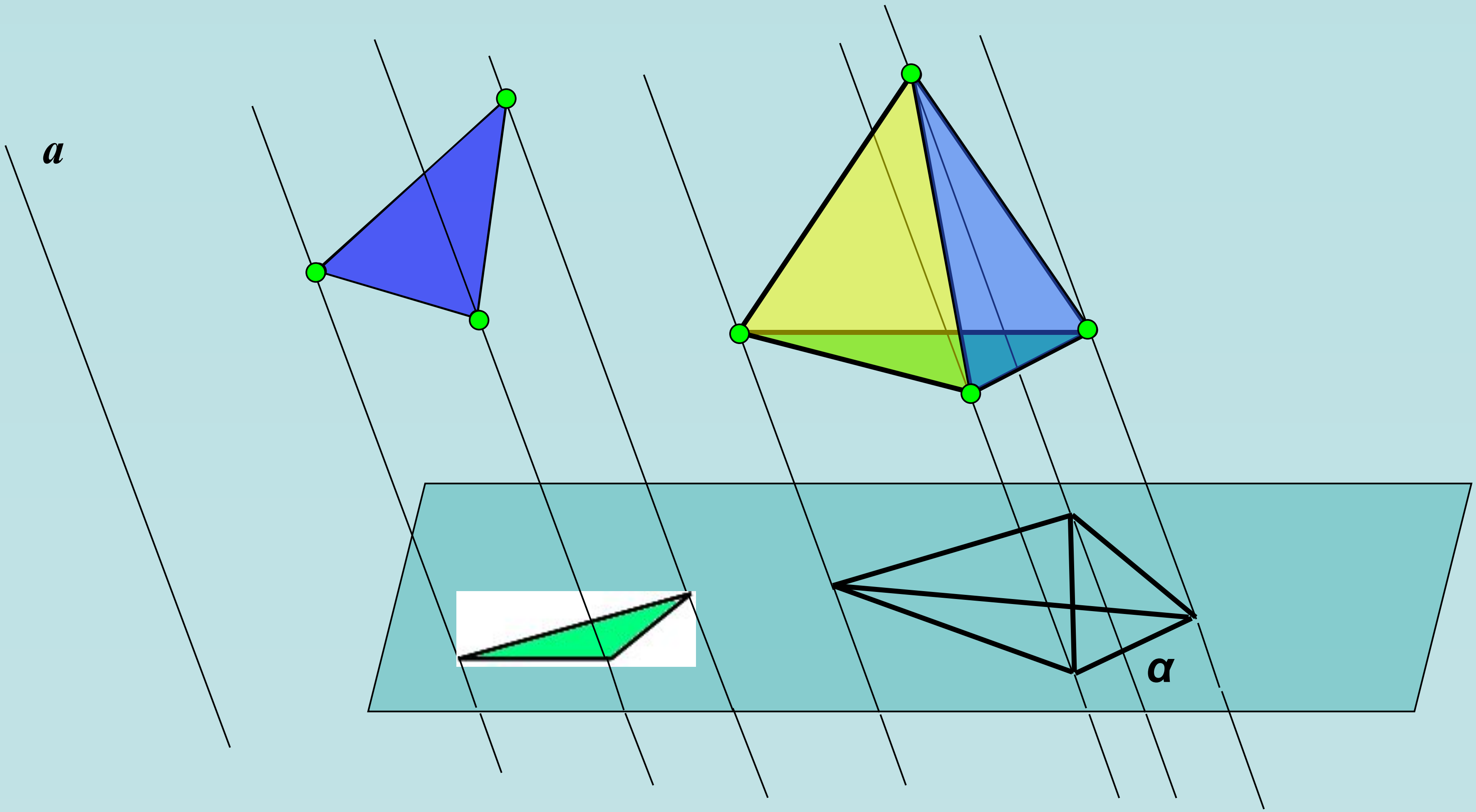


Проведемо через точку A пряму, паралельну до прямої a.

Точка A’ перетину цієї прямої з площиною і є *проекція* точки A на площину α. Точку A ще називають *прообразом*, а точку A’ – *образом*. Якщо A∈α, то A’ співпадає з A.

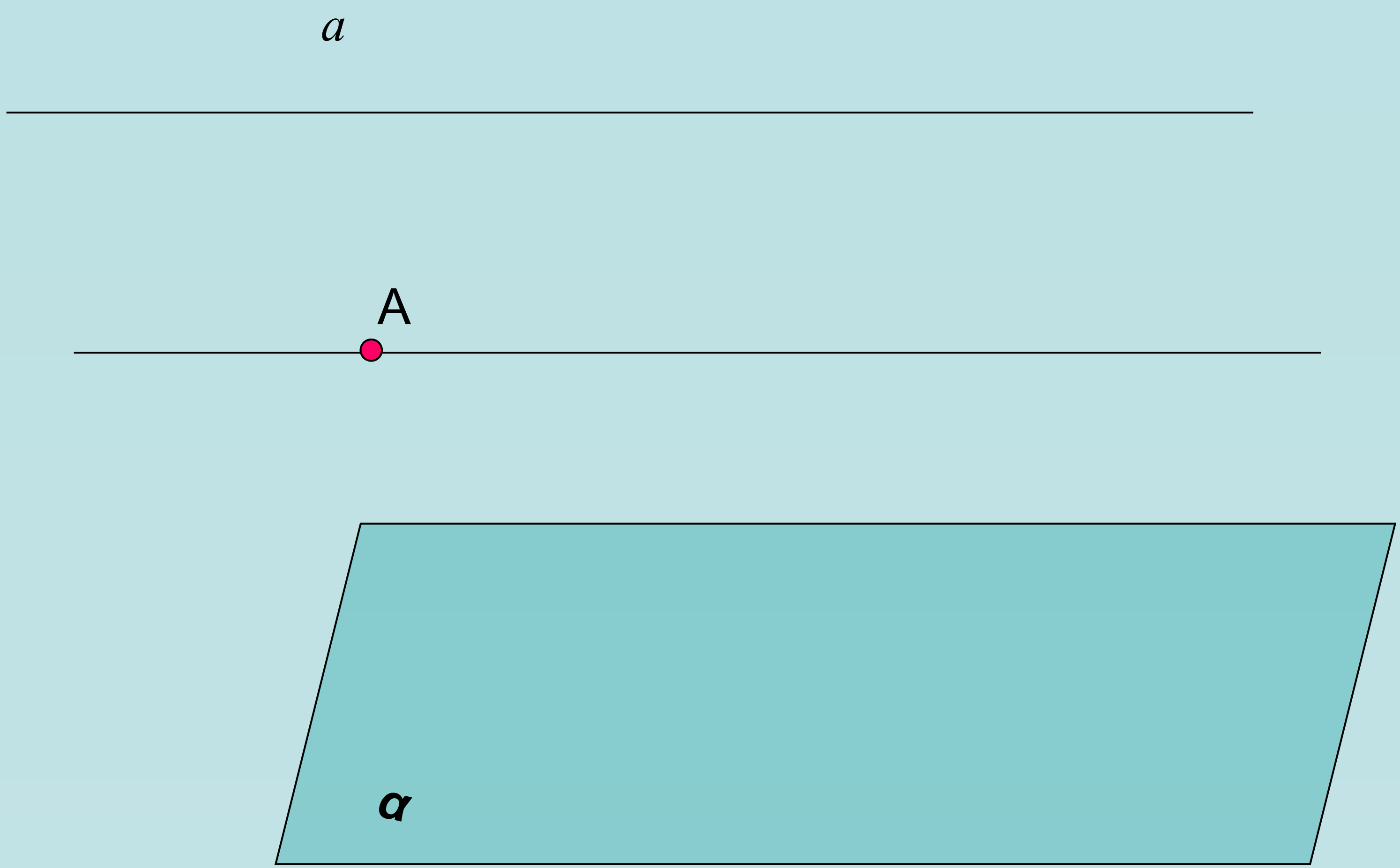


Розглянемо будь-яку геометричну фігуру як множину точок, можна побудувати в заданій площині проекцію даної фігури. Таким чином можна отримати зображення (або «проекцію») будь-якої площини або просторової фігури на площині (див. рис.).

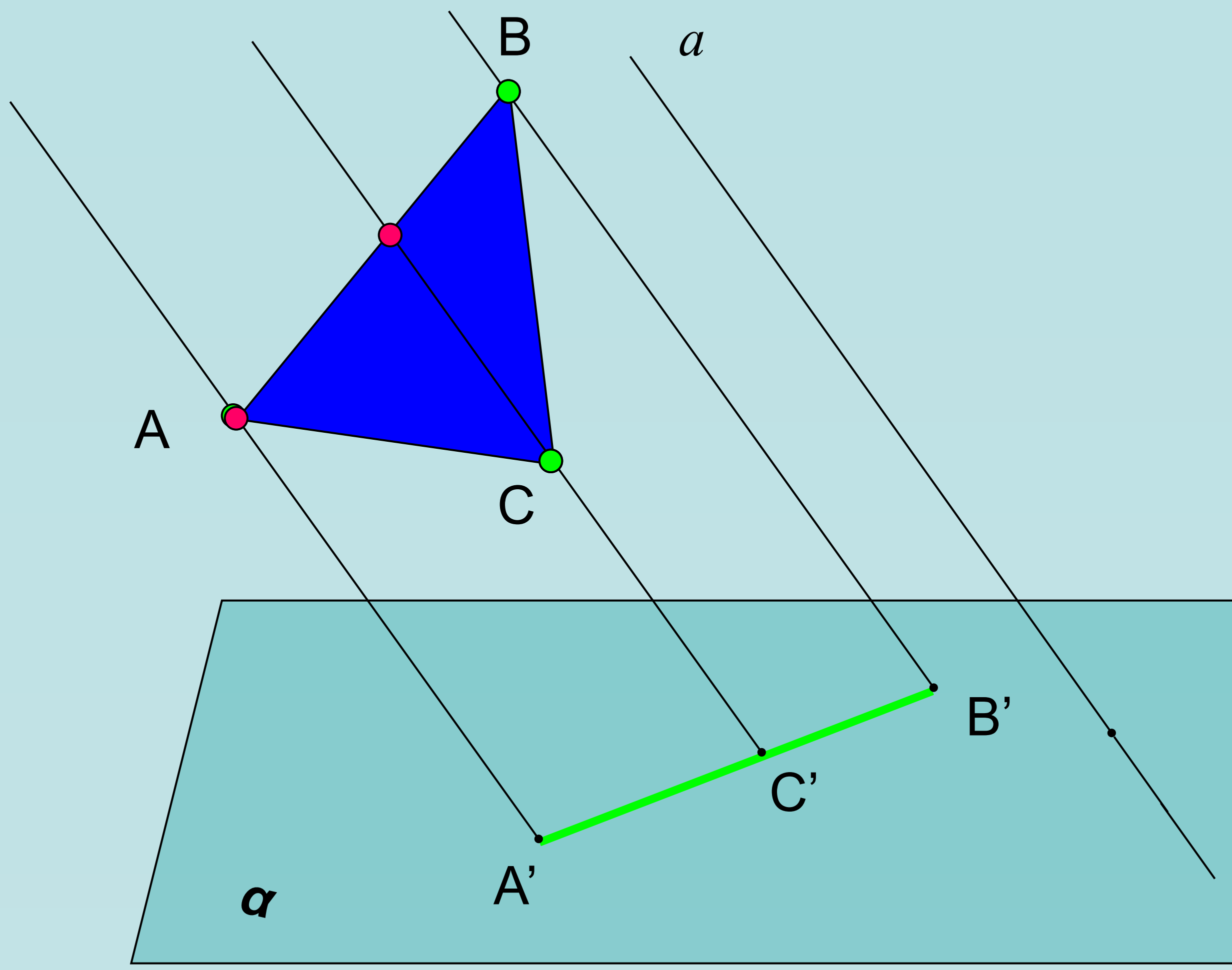


Наочним прикладом паралельного проектування є відкидання будь-яким об'єктом (*прообраз*) у просторі тінь(*образ*) від сонячних променів (*напрямок паралельного проектування*) на Землі (*площина проекцій*).

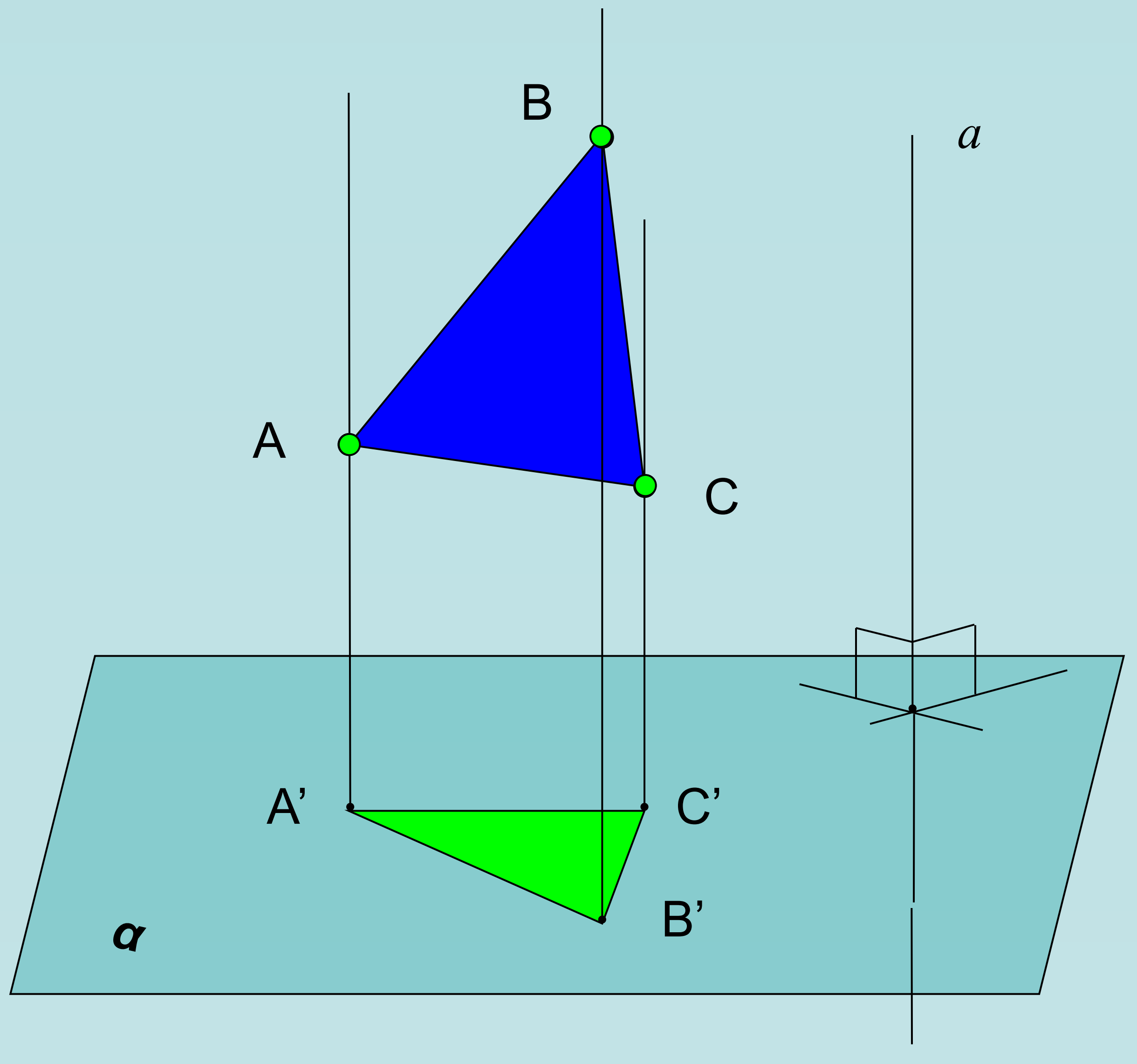
Зауваження 1. При паралельному проектуванні **не обирають напрямок** паралельного проектування паралельно до площини проекції (самостійно поясніть чому).



Зауваження 2. При паралельному проектуванні плоских фігур **не обирають** напрямок паралельного проектування паралельно до площини, яка належить ця плоска фігура, т.як. проекція, яка при цьому отримується не відображає властивості даної плоскої фигури.

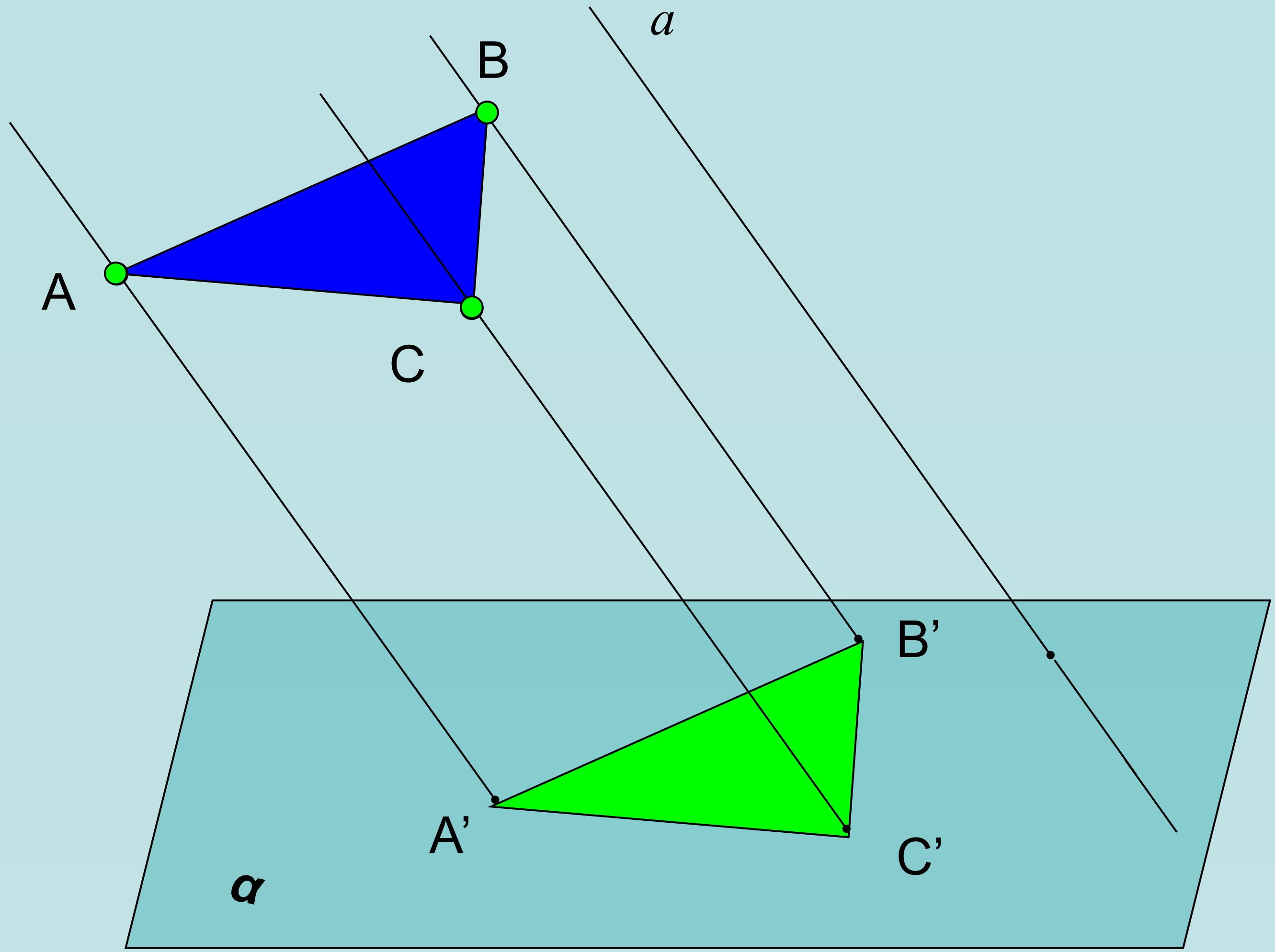


Зауваження 3. Якщо напрямок паралельного проектування перпендикулярний до площини проекцій, то таке паралельне проектування називається **ортогональним** *(прямокутним)* **проектуванням**.



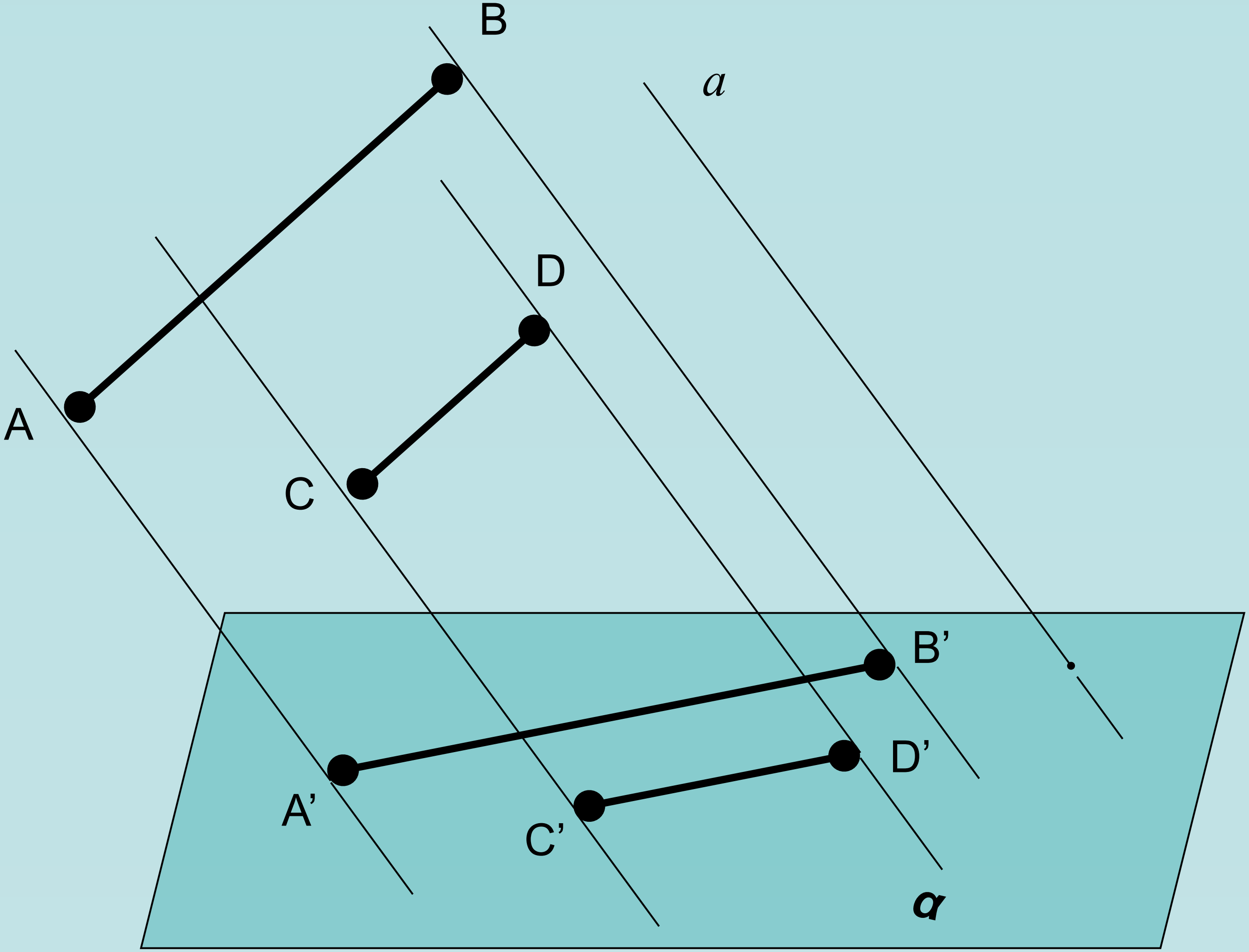
Зауваження 4. Якщо площина проекцій та площина, в якій лежить дана фігура паралельні (α||(ABC)), то зображення яке при цьому отримаємо…

…правильно – дорівнює прообразу!



Паралельне проектування володіє властивостями:

1) паралельність прямих (відрізків, променів) **зберігається**;

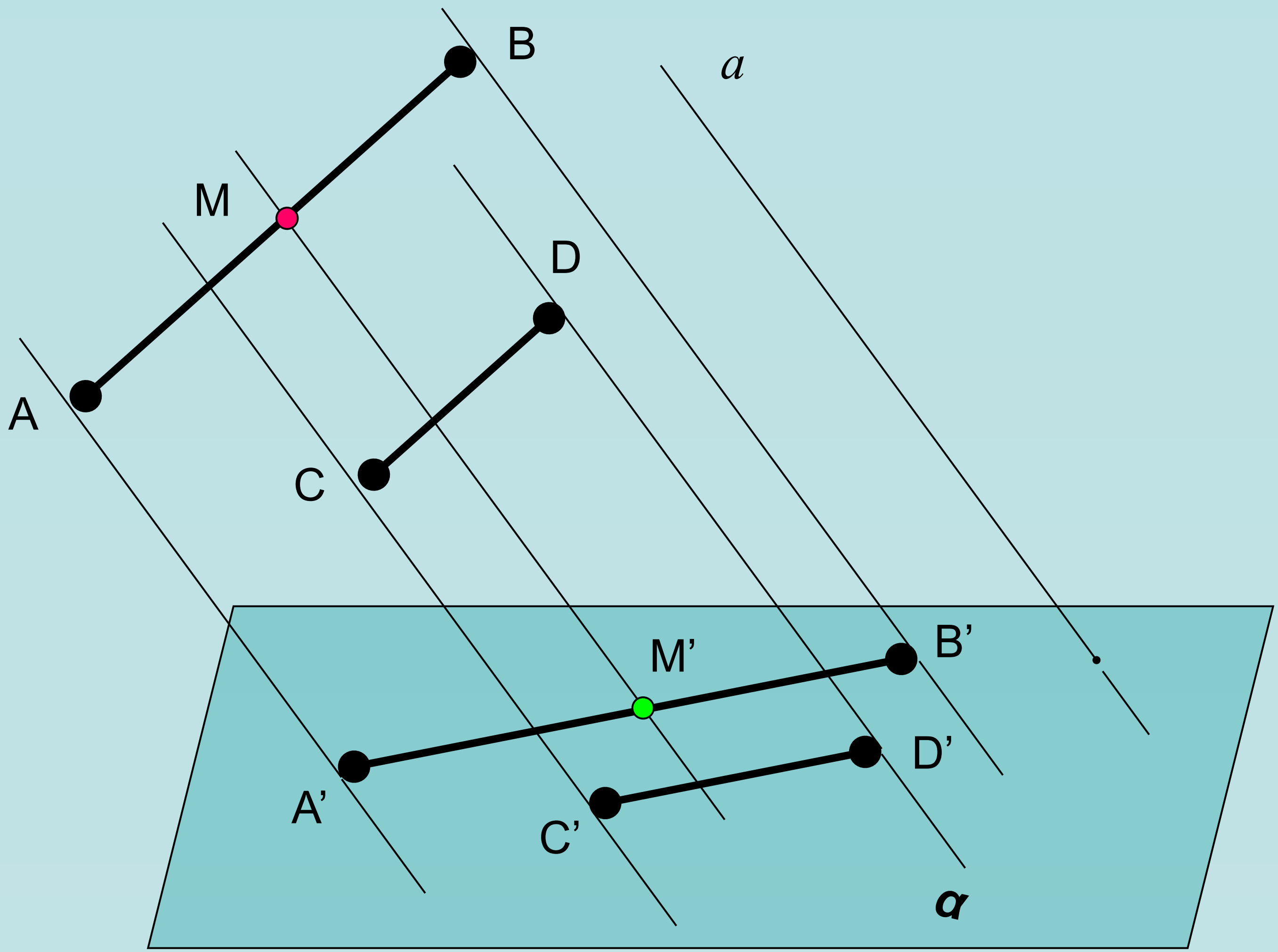


$$AB \parallel CD \Rightarrow A'B' \parallel C'D'$$

Паралельне проектування володіє властивостями:

1) паралельність прямих (відрізків, променів) **зберігається**;

2) відношення довжин відрізків, які лежать на паралельних або на одній прямій **зберігається**;



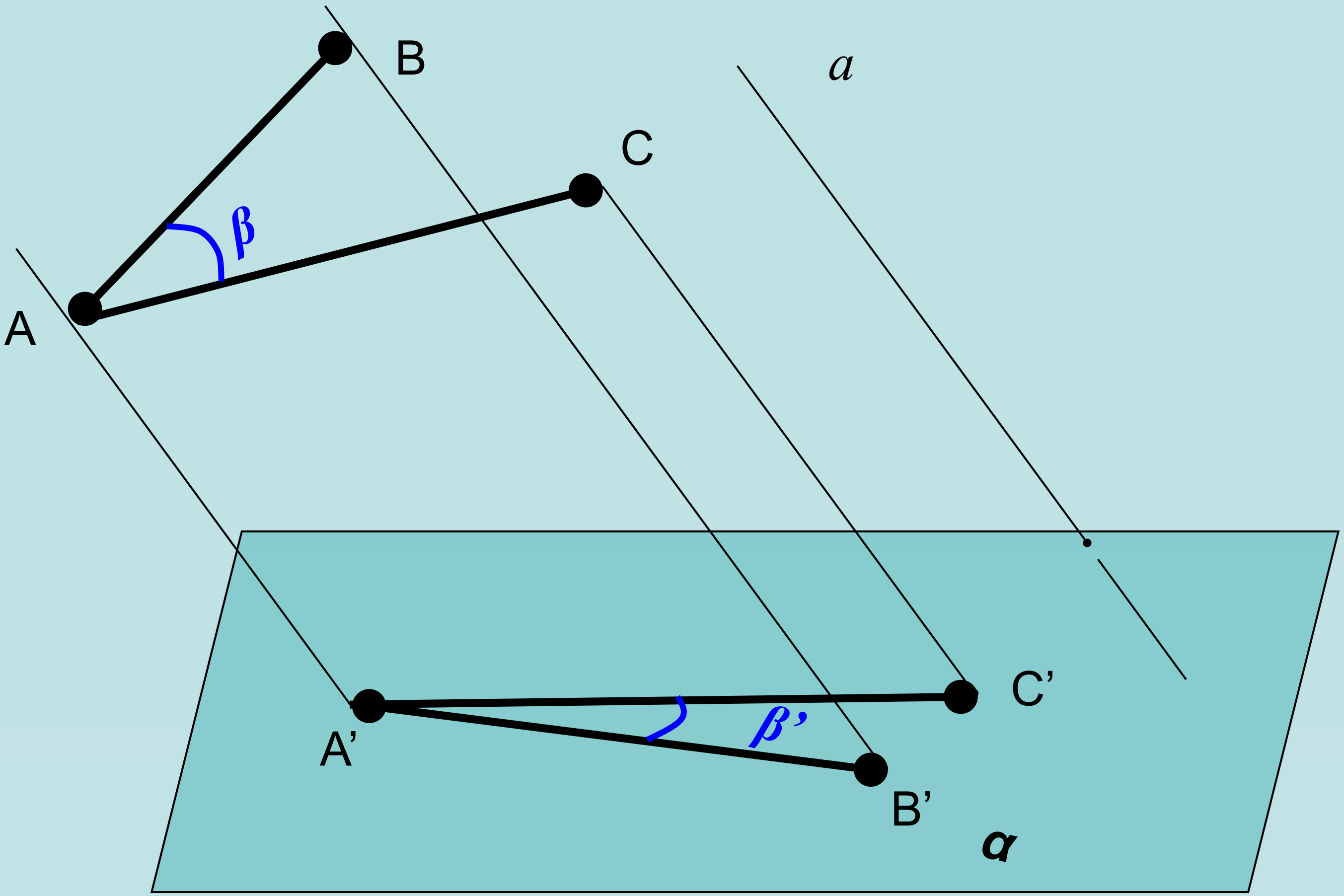
Якщо, наприклад, AB=2CD, то A'B'=2C'D' або $\frac{AM}{MB} = \frac{A'M'}{M'B'}$

Паралельне проектування володіє властивостями:

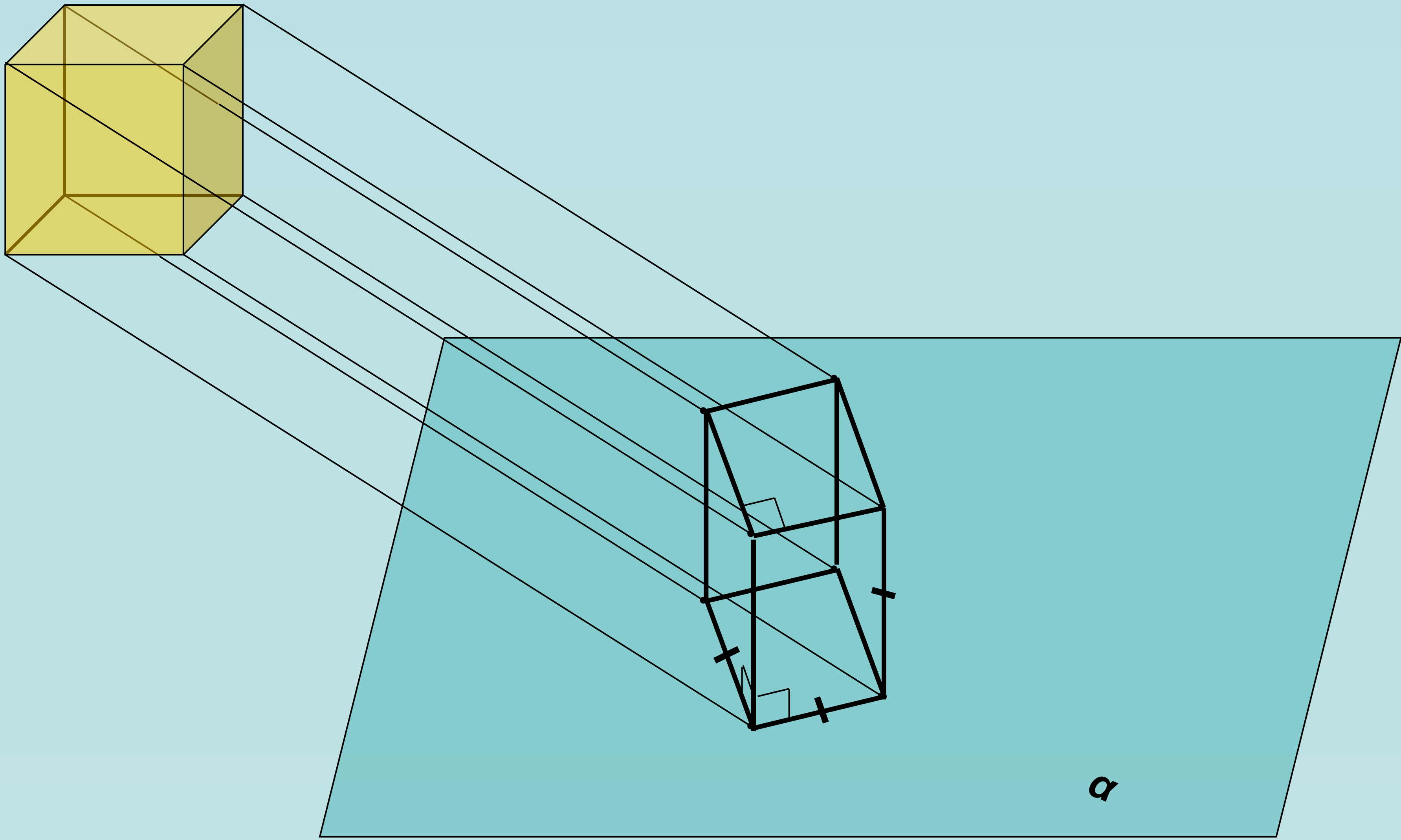
1) паралельність прямих (відрізків, променів) **зберігається**;

2) відношення довжин відрізків, які лежать на паралельних або на одній прямій **зберігається**;

3) Лінійні розміри плоских фігур (довжини відрізків, величини кутів) **не зберігаються** (виключення – див. зауваження 4).

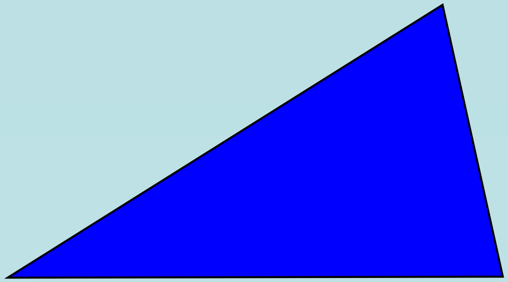


Побудуємо зображення куба:

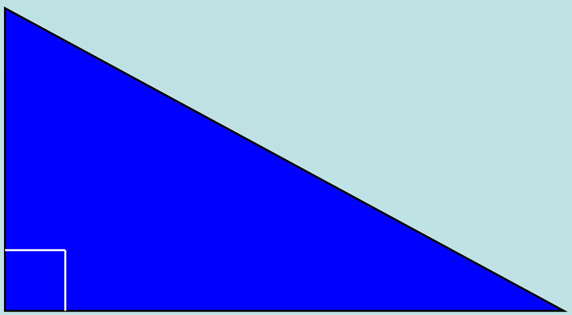


Далі розберемо приклади зображення деяких плоских фігур…

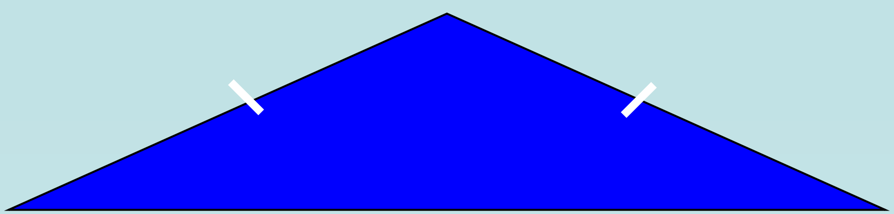
Фігура у просторі



Довільний трикутник

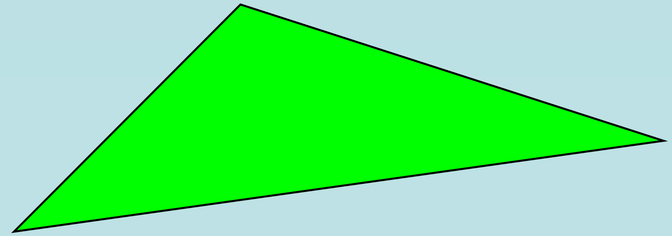


Прямокутний трикутник

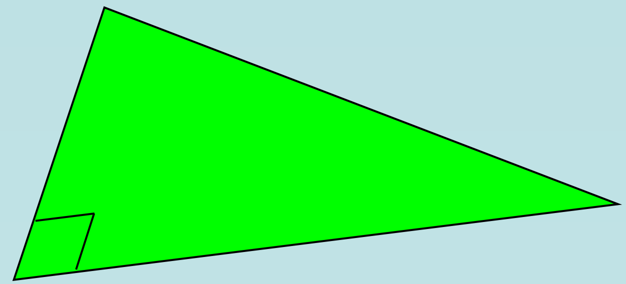


Рівнобічний трикутник

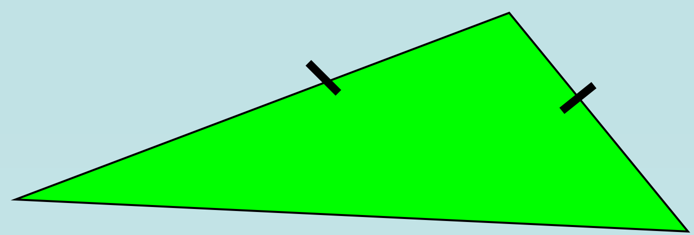
Її зображення на площині



Довільний трикутник

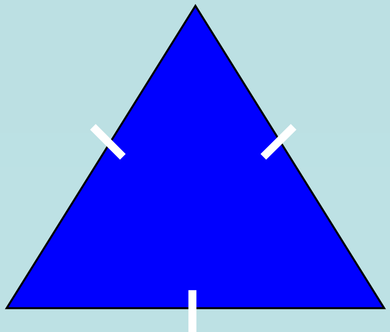


Довільний трикутник

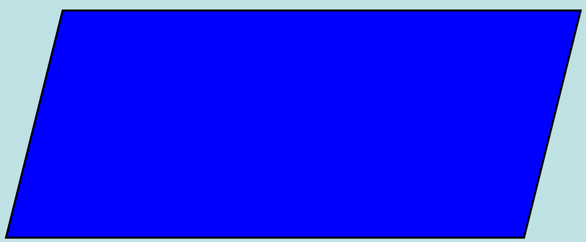


Довільний трикутник

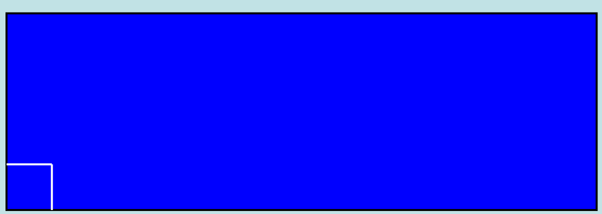
Фігура у просторі



Рівнобічний трикутник

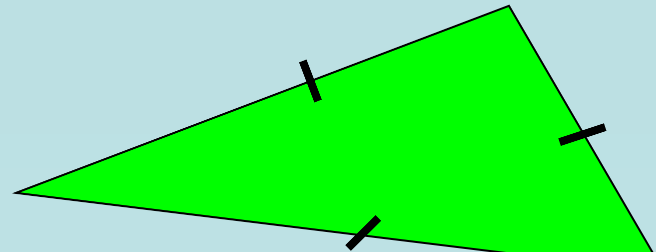


Паралелограм



Прямокутник

Її зображення на площині



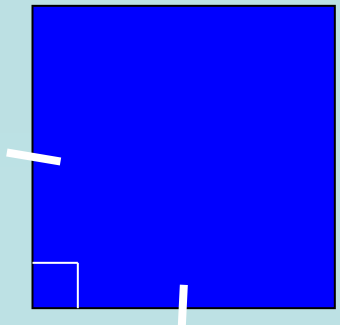
Довільний трикутник

Довільний паралелограм

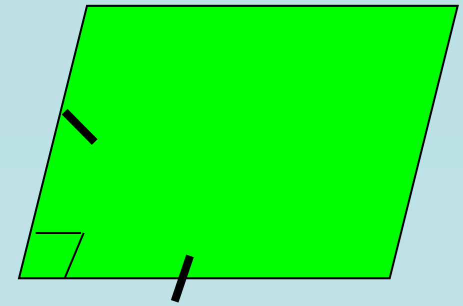
Довільний паралелограм

Фігура у просторі

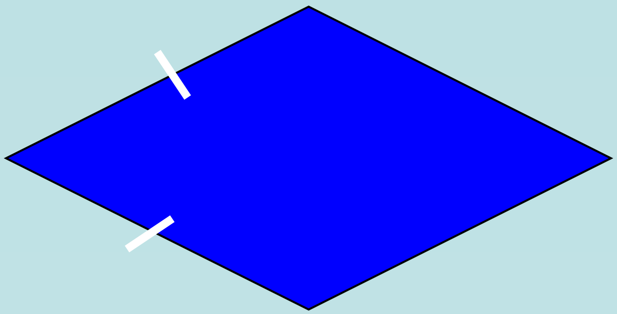
Її зображення на площині



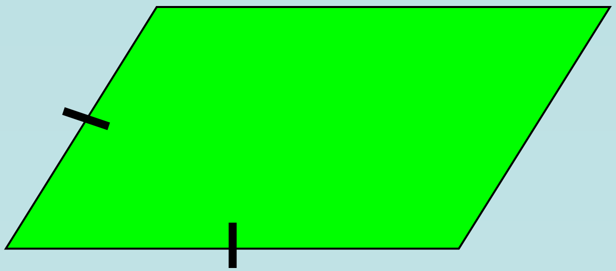
Квадрат



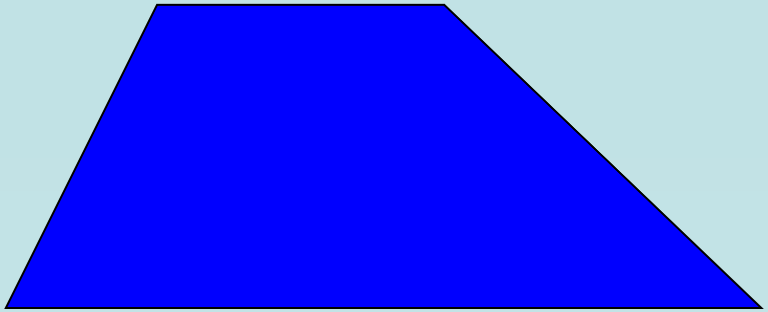
Довільний паралелограм



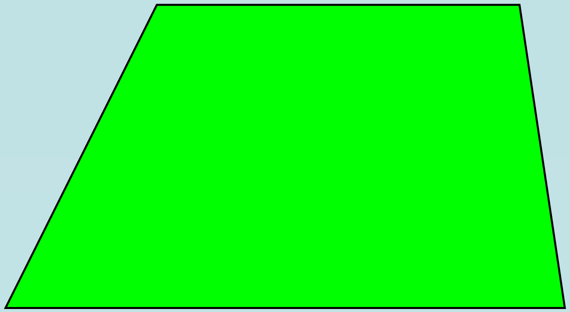
Ромб



Довільний паралелограм

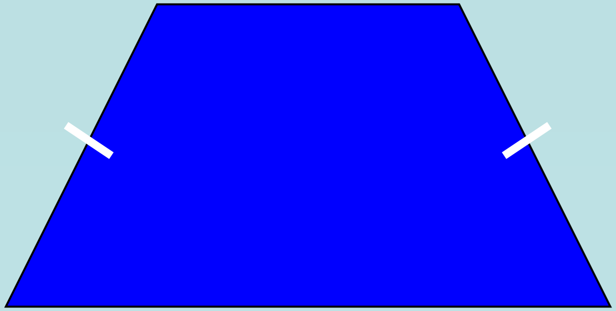


Трапеція

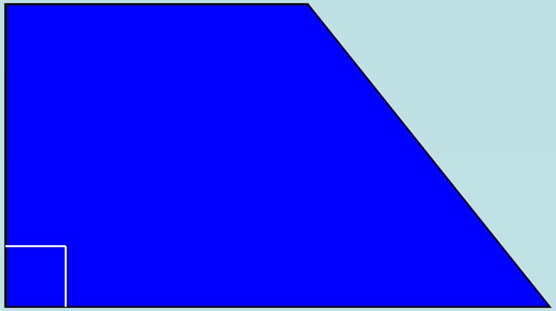


Довільна трапеція

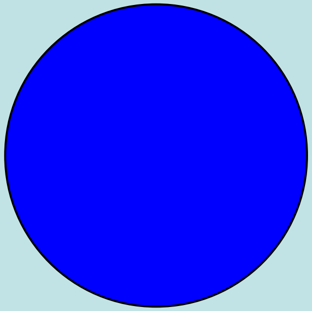
Фігура у просторі



Рівнобічна трапеція

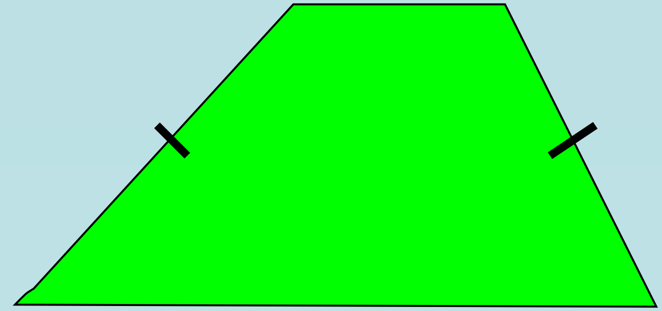


Прямокутна трапеція

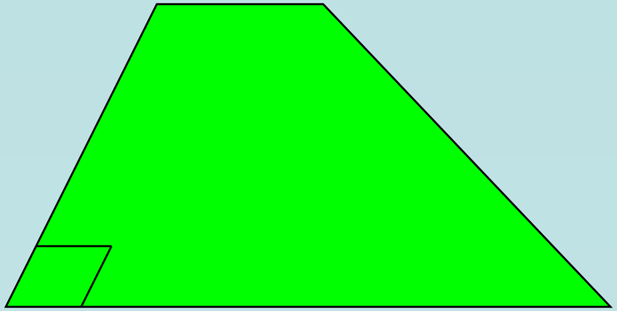


Круг (коло)

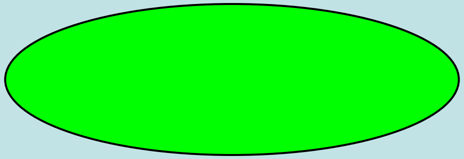
Її зображення на площині



Довільна трапеція

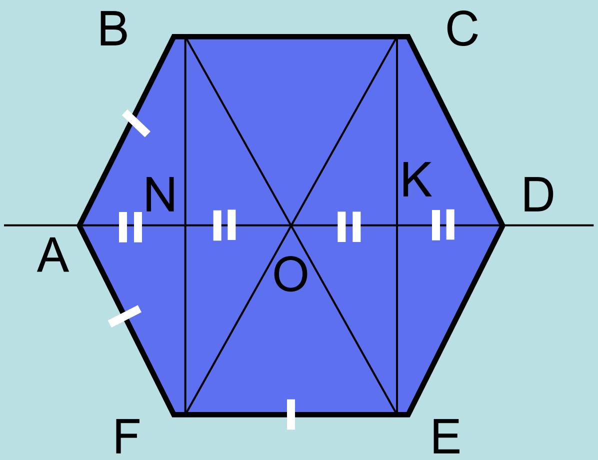


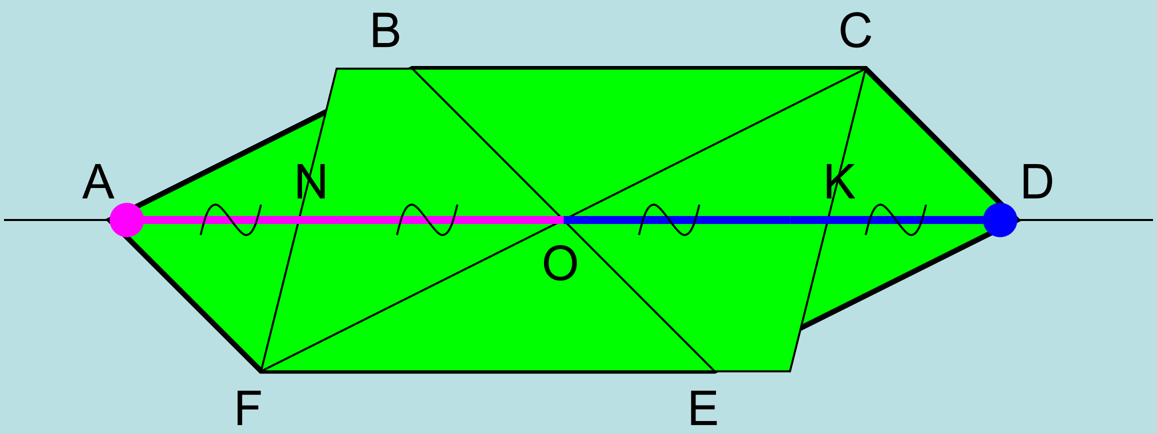
Довільна трапеція



Овал (еліпс)

Розберемося, як побудувати зображення правильного шестикутника.



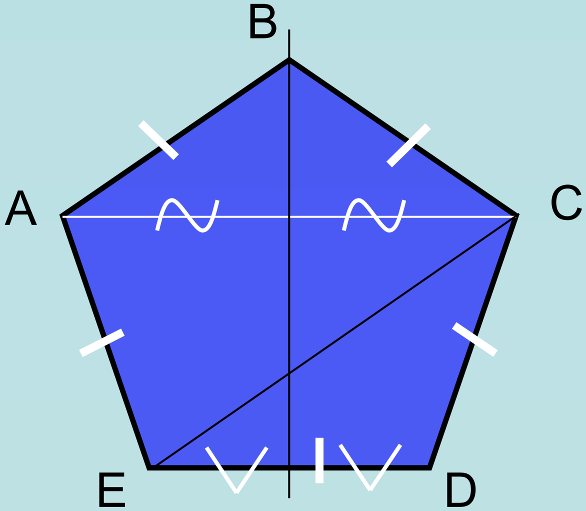


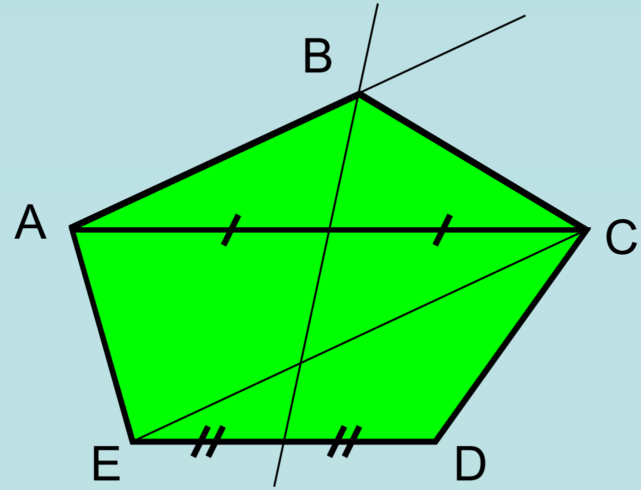
Розіб'ємо правильний шестикутник на три частини: прямокутник FBCE та два рівнобічні трикутники ΔFAB та ΔCDE. Побудуємо спочатку зображення прямокутника FBCE – довільний паралелограм FBCE. Залишилося знайти положення двох останніх вершин – точок A и D.

Згадаємо властивості правильного шестикутника, помітимо, що: 1) ці вершини лежать на прямій, яка проходить через центр прямокутника та параллельна сторонам BC та FE; 2) OK=KD та ON=NA.

Тобто, 1) знаходимо на зображенні точку O та проводимо через неї прямую, паралельну BC та FE, отримуючи при цьому точки N и K;

2) Відкладаємо від точок N та K від центра O на пряму такі ж відрізки – у результаті отримаємо дві останні вершини правильного шестикутника A та D.





Самостійно побуйте зображення *правильного п'ятикутника*.

Зауваження: розбийте фігуру на дві частини – рівнобоку трапецію та рівнобічний трикутник, а потім скористайтесь деякими властивостями цих фігур і, звичайно ж, властивості паралельного проектування.