Кодирование чисел. Системы счисления.

Ege16.

Что нужно знать:

- чтобы перевести число, скажем, 12345_N, из системы счисления с основанием N в десятичную систему, нужно умножить значение каждой цифры на N в степени, равной ее разряду:

  4 3 2 1 0 ← разряды

  $$\mathbf{1\,2\,3\,4\,5_N = 1\cdot N^4 + 2\cdot N^3 + 3\cdot N^2 + 4\cdot N^1 + 5\cdot N^0}$$

- числа вида 2^k записываются в двоичной системе как единица и *k* нулей;
- числа вида 2^k-1 записываются в двоичной системе *k* единиц;
- число вида $2^N – 2^K$ (при $K < N$) в двоичной системе записывается как $(N–K)$ единиц и K нулей:

  $$2^N - 2^K = \underbrace{1\ldots1}_{N-K}\underbrace{0\ldots0}_{K}$$

- $2^N + 2^N = 2\cdot 2^N = 2^{N+1}$ получаем $2^N = 2^{N+1} - 2^N$, отсюда следует, ч $-2^N = -2^{N+1} + 2^N$

Сколько единиц в двоичной записи числа

$4^{2015} - 2^{2014} + 3$?

Решение:

- Приведём все числа к степени двойки:

  $(2^2)^{2015} - 2^{2014} + 2^1 + 2^0 =$

  $2^{4030} - 2^{2014} + 2^1 + 2^0$

- число $2^N - 2^K$ при $K < N$ записывается как $N-K$ единиц и K нулей:

  $4030 - 2014 = 2016$

  2^1 и 2^0 дают еще две единицы.

  $2016 + 2 = 2018$

Ответ: 2018

Кодирование чисел. Системы счисления.

Сколько единиц в двоичной записи числа
$4^{2014} + 2^{2015} - 8$

<u>Решение:</u>

- приведём все числа к степеням двойки:

$$4^{2014} + 2^{2015} - 8 =$$
$$(2^2)^{2014} + 2^{2015} - 2^3 =$$
$$2^{4028} + 2^{2015} - 2^3$$

- первое слагаемое 2^{4028} дает одну старшую единицу;
- число $2^N - 2^K$ при $K < N$ записывается как $N-K$ единиц и K нулей: $2^N - 2^K = \underbrace{1\ldots1}_{N-K}\underbrace{0\ldots0}_{K}$ (*)
- согласно (*), чи… …ся как 2012 единиц и 3 нуля

$$\begin{array}{r} \overbrace{10\ldots..00000}^{2015} \\ -\quad 1000 \\ \hline 0\ 1\ldots.11000 = 2012 \text{ единиц} \end{array}$$

или $8_{10} \rightarrow 1000_2$, … и 3 нуля;

- 2^{4028} даст ещё одну единицу, всего получается 2012 + 1 = 2013 единиц

Ответ: 2013.

Сколько единиц в двоичной записи числа

$(2\cdot10_8)^{2010} - 4^{2011} + 2^{2012}$**?**

Решение:

Приведём все числа к степеням двойки:

$10_8 = 8_{10} = 2^3$

$(2^1\cdot2^3)^{2010} - (2^2)^{2011} + 2^{2012} = 2^{4\cdot2010} - 2^{2\cdot201}$

$2^{8040} \quad - \quad 2^{4022} \quad + 2^{2012}$

$$= \underbrace{\overset{\overset{8040}{\downarrow}}{1}0...0}_{8039}{}_2 - \underbrace{\overset{\overset{4022}{\downarrow}}{1}0...0}_{4021}{}_2 + \underbrace{\overset{\overset{2012}{\downarrow}}{1}0...0}_{2011}{}_2.$$

$$\begin{array}{r} \overset{8040}{\downarrow}\quad\ \overset{4022}{\downarrow}\quad\ \overset{2012}{\downarrow}\quad\quad \\ -\ 10...000...000...0_2 \\ 10...000...0_2 \\ \hline +\ 1...110...000...0_2 \\ 10...0_2 \\ \hline \underbrace{1...11}_{8040-4022=4018}0...010...0_2 \end{array}$$

Число $2^N–2^K$ при $K < N$ в двоичной системе записывается как $N–K$ единиц и K нулей:

- 8040 - 4022 = 4018 единиц;
- 2012 – дает одну единицу;
- 4018 + 1 = 4019

Ответ: 4019

Сколько единиц в двоичной записи числа
$4^{2016} + 2^{2018} – 8^{600} + 6$

Решение:

1. приведём все числа к степеням двойки, разложив 6 как 2^2+2^1

   $4^{2016} + 2^{2018} – 8^{600} + 6 =$

   $(2^2)^{2016} + 2^{2018} - (2^3)^{600} + 2^2 + 2^1 =$

   $2^{4032} + 2^{2018} – 2^{1800} + 2^2 + 2^1$
2. $2^{2018} – 2^{1800} \longrightarrow$ 218 единиц и 1800 нулей;
3. 2^{4032} дает ещё одну единицу,
4. $2^2 + 2^1$ – ещё две, всего получается 218 + 3 = 221 единица

Ответ: 221

Сколько единиц в двоичной записи числа

$4^{2016} - 2^{2018} + 8^{800} - 80$

Решение (способ 1):

$$4^{2016} - 2^{2018} + 8^{800} - 80 = (2^2)^{2016} - 2^{2018} + (2^3)^{800} - 80 =$$
$$2^{4032} - 2^{2018} + 2^{2400} - 80$$

1. переставим слагаемые в порядке уменьшения степеней двойки

$$2^{4032} + 2^{2400} - 2^{2018} - 80$$

2. $2^{4032} \to 1$ единица;

3. $2^{2400} - 2^{2018} \to 382$ единицы и 2018 нулей;

4. $2^{4032} + 2^{2400} - 2^{2018} \to 382 + 1 = 383$ единицы и 2018 нулей:

$$2^{4032} + 2^{2400} - 2^{2018} = 10\ldots0\underbrace{1\ldots1}_{382}\underbrace{0\ldots0}_{2018}$$

5. $80_{10} \to 1010000_2$

6.
$$
\begin{array}{r|l|l}
 & \overbrace{1 \;\ldots\; 1}^{382} & \overbrace{0 \ldots 00000000}^{2018} \\
10\ldots0 & 1 \;\ldots\; 1 & 0 \ldots 00000000 \\
- & & \quad 1010000 \\
\hline
10\ldots0 & 1 \;\ldots 10 & 1 \ldots 10110000 \\
1 & + \; 381 & + \; 2013 \; = \; \mathbf{2395}
\end{array}
$$

к-во единиц

Кодирование чисел. Системы счисления.

Сколько значащих *нулей* в двоичной записи числа $4^{512} + 8^{512} - 2^{128} - 250$?

Решение:

- *количество значащих нулей равно количеству всех знаков в двоичной записи числа (его длине!) минус количество единиц;*
- приведём все числа к степеням двойки:

  $250 = 256 - 4 - 2 = 2^8 - 2^2 - 2^1$

  $4^{512} + 8^{512} - 2^{128} - 250 =$

  $(2^2)^{512} + (2^3)^{512} - 2^{128} - 2^8 + 2^2 + 2^1 =$

  $2^{1536} + 2^{1024} - 2^{128} - 2^8 + 2^2 + 2^1$
- 2^{1536} – 1 единица и 1536 нулей, т.е., состоит из **1537** знаков;
- вспомним, что $2^N - 2^K = \underbrace{1\ldots1}_{N-K}\underbrace{0\ldots0}_{K}$
- в выражении $2^{1536} + 2^{1024} - 2^{128} - 2^8 + 2^2 + 2^1$ стоит два знака «минус» подряд, что не позволяет сразу использовать формулу;
- вспомним, что $-2^N = -2^{N+1} + 2^N$, тогда $-2^{128} = -2^{129} + 2^{128}$; получаем

  $2^{1536} + \underbrace{2^{1024} - 2^{129}} + \underbrace{2^{128} - 2^8} + 2^2 + 2^1$;
- общее число единиц равно 1 + (1024 – 129) + (128 – 8) + 1 + 1 = 1018;
- таким образом, количество значащих нулей равно 1537 – 1018 = **519**

Теория + задания для тренировки:

Сайт → «К урокам» →файл «ege16-1» №89-101, 113-117, 120-124, 138-141

Кодирование чисел. Системы счисления.

Сколько единиц в двоичной записи числа

$4^{2016} - 2^{2018} + 8^{800} - 80$

Решение (способ 2):

1. разложим 80 как 2^6+2^4

$$4^{2016} - 2^{2018} + 8^{800} - 80 = (2^2)^{2016} - 2^{2018} + (2^3)^{800} - (2^6 + 2^4) =$$
$$2^{4032} - 2^{2018} + 2^{2400} - 2^6 - 2^4$$

2. переставим слагаемые в порядке уменьшения степеней двойки

$$2^{4032} + 2^{2400} - 2^{2018} - 2^6 - 2^4$$

3. $2^{2400} - 2^{2018} \rightarrow$ 382 единицы и 2018 нулей;
4. $2^{4032} \rightarrow$ 1 единица;
5. $2^{4032} + 2^{240}$… единицы и 2018 нулей:

$$2^{4032} + 2^{2400} - 2^{2018} = 10\ldots0\underbrace{1\ldots1}_{382}\underbrace{0\ldots0}_{2018}$$

6. выделим из этого значения последнюю единицу со следующими 2018 нулями как отдельное слагаемое (число 2^{2018}):

$$2^{4032} + 2^{2400} - 2^{2018} = 10\ldots0\underbrace{1\ldots1}_{381}\underbrace{0\ldots0}_{2019} + 1\underbrace{0\ldots0}_{2018} = K + 2^{2018}$$

где число K содержит 382 единицы в старших разрядах;

Кодирование чисел. Системы счисления.

$2^{4032} + 2^{2400} - 2^{2018} - 2^{6} - 2^{4}$

$$2^{4032} + 2^{2400} - 2^{2018} = 10\ldots0\underbrace{1\ldots1}_{381}\underbrace{0\ldots0}_{2019} + 1\underbrace{0\ldots0}_{2018} = K + 2^{2018}$$

число K содержит 382 единицы в старших разрядах;

таки образом, интересующее нас число рав $K + 2^{2018} - 2^{6} - 2^{4}$

7. число $2^{2018} - 2^{6}$ запишется как 2012 единиц и 6 нулей;

также выделим последнюю единицу с последующими нулями как отдельное слагаемое:

$$2^{2018} - 2^{6} = \underbrace{1\ldots1}_{2012}\underbrace{0\ldots0}_{6} = \underbrace{1\ldots1}_{2011}\underbrace{0\ldots0}_{7} + 1\underbrace{0\ldots0}_{6} = L + 2^{6}$$

где число L содержит 2011 единиц;

8. двоичная запись числа $2^{6} - 2^{4}$ содержит 2 единицы;
9. общее число единиц равно 382 + 2011 + 2 = 2395

Ответ: 2395.

Кодирование чисел. Системы счисления.

Сколько единиц в двоичной записи числа

$\mathbf{4^{2016} - 2^{2018} + 8^{800} - 80}$

Способ 2.

1. приведём все числа к степеням двойки, разложив 80 как 2^6+2^4

$$(2^2)^{2016} - 2^{2018} + (2^3)^{800} - 2^6 - 2^4 =$$
$$2^{4032} - 2^{2018} + 2^{2400} - 2^6 - 2^4$$

2. перестроим слагаемые в порядке уменьшения степеней двойки

$$2^{4032} + 2^{2400} - 2^{2018} - 2^6 - 2^4$$

3. вспомним, что $2^N + 2^N = 2*2^N = 2^{N+1}$, получим $2^N = 2^{N+1} - 2^N$,

откуда следует, что $-2^N = -2^{N+1} + 2^N$

представим $(-2^{2018}) = -2^{2019} + 2^{2018}$

и $(-2^6) = -2^7 + 2^6$, получим:

$$2^{4032} + 2^{2400} - 2^{2019} + 2^{2018} - 2^7 + 2^6 - 2^4$$

4. 2^{4032} содержит **1** единицу;
5. $2^{2400} - 2^{2019}$ содержит **381** единицу ($2^N - 2^K = \underbrace{1\ldots1}_{N-K}\underbrace{0\ldots0}_{K}$);
6. $2^{2018} - 2^7$ содержит **2011** единиц,
7. $2^6 - 2^4$ содержит **2** единицы;

9. позиции единиц во всех этих слагаемых не совпадают, поэтому общее количество единиц равно **1 + 381 + 2011 + 2 = 2395**

Ответ: 2395