

Признаки равенства треугольников

Содержание



Теория

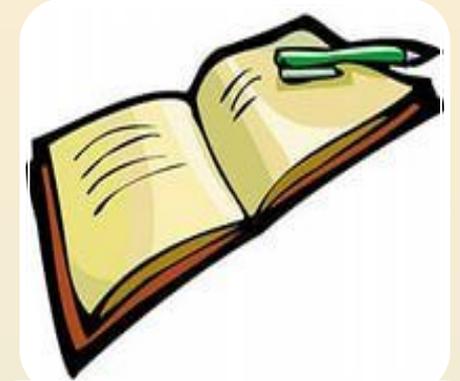
- Первый признак
- Второй признак
- Третий признак



Практика

*Примеры
решения задач*

- 1 уровня
- 2 Уровня



Контроль

- Тестовое задание

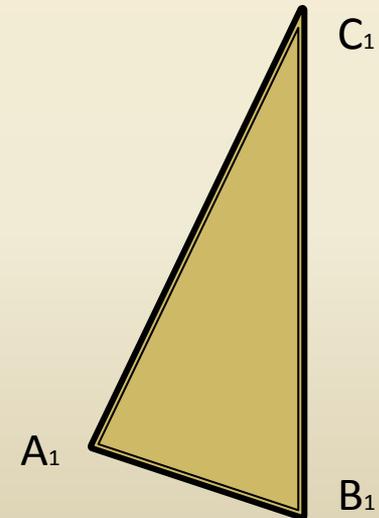
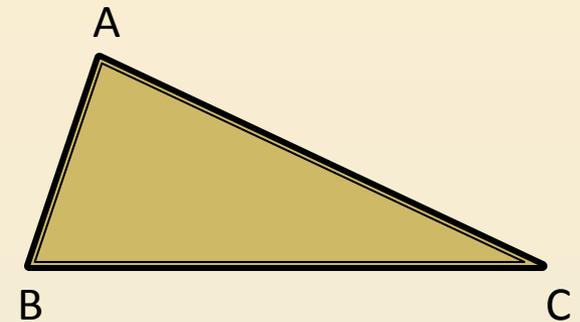
Первый признак равенства треугольников

- Если **две стороны** и **угол между ними** одного треугольника соответственно равны **двум сторонам** и **углу между ними** другого треугольника, то такие треугольники **равны**.

$$AB = A_1B_1$$

$$BC = B_1C_1$$

$$\text{Угол } B = \text{углу } B_1$$

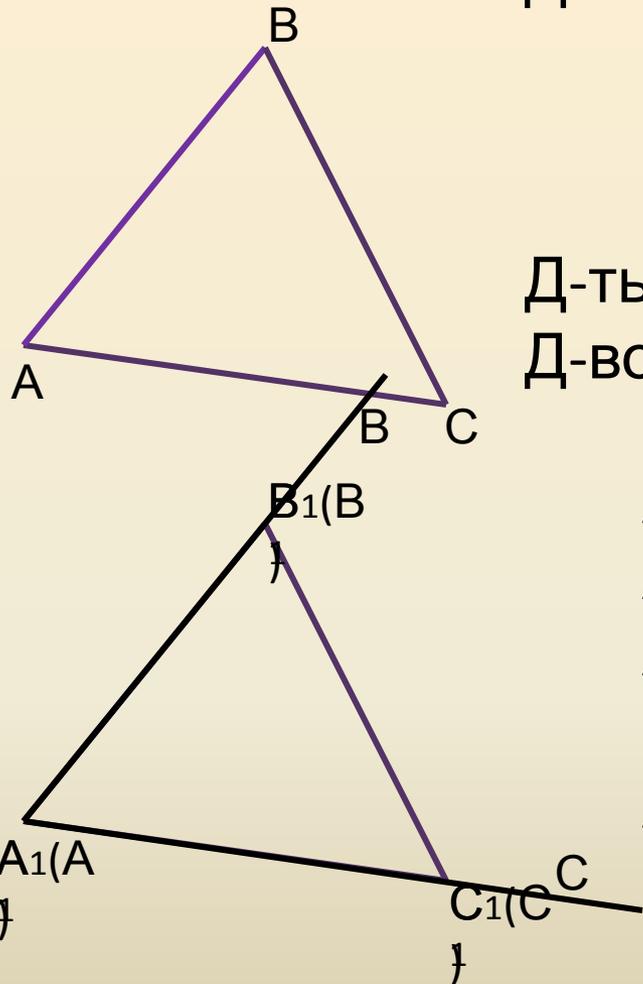


Содержание

Доказательств

0

Доказательство



Дано: $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$,
 $AB = A_1B_1$,
 $AC = A_1C_1$,
 угол $A =$ угол A_1 .
 Д-ть: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Д-во: Т.к. угол $A =$ углу A_1 ,
 то $\triangle ABC \rightarrow \triangle A_1B_1C_1$ так, что

$A \rightarrow A_1$

$AB \rightarrow$

A_1B_1

$AC \rightarrow$

A_1C_1



$B \rightarrow B$

1

$C \rightarrow C$

Следовательно, $BC \rightarrow B_1C_1$.

Итак, $\triangle ABC \rightarrow \triangle A_1B_1C_1$,

значит они равны.

Теорема доказана.

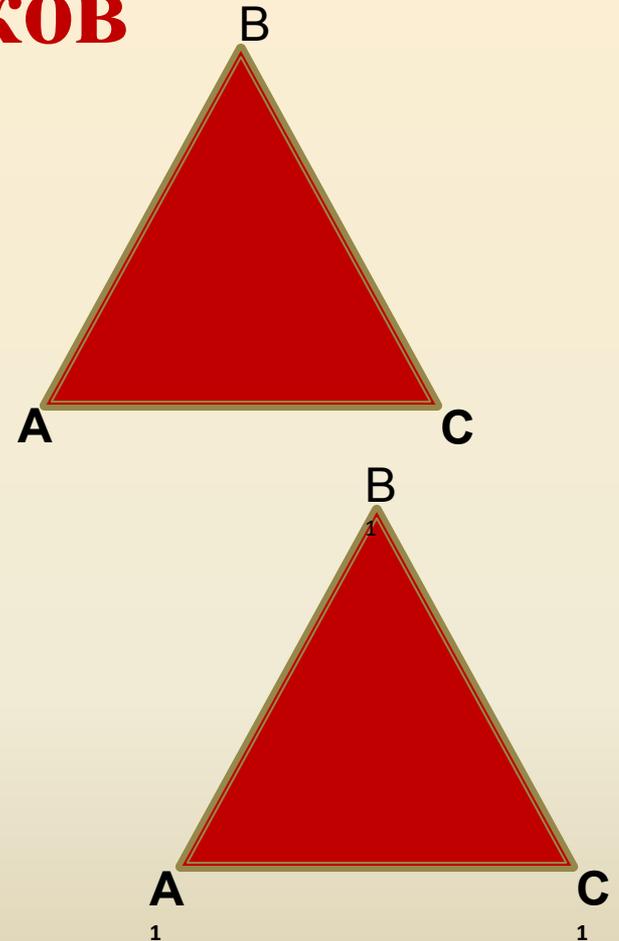
Второй признак равенства треугольников

Если **одна сторона** и **два прилежащих к ней угла** одного треугольника соответственно равны **стороне и двум прилежащим к ней углам** другого треугольника, то такие треугольники **равны**

$$AC = A_1 C_1$$

$$\text{угол } A = \text{углу } A_1$$

$$\text{угол } C = \text{углу } C_1$$



Доказательство

Дано: $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$,

$$AB = A_1B_1,$$

угол $A =$ углу A_1

угол $B =$ углу B_1 .

Д-ть: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

Д-во: Наложим $\triangle ABC$ на $\triangle A_1B_1C_1$ так,

чтобы $A \rightarrow A_1$,

$$AB \rightarrow A_1B_1$$

C и C_1 оказались по одну сторону от A_1B_1 .

Т к угол $A =$ углу A_1 \rightarrow $AC \rightarrow$ луч A_1C_1 ,

угол $B =$ углу B_1 \rightarrow $BC \rightarrow$ луч B_1C_1

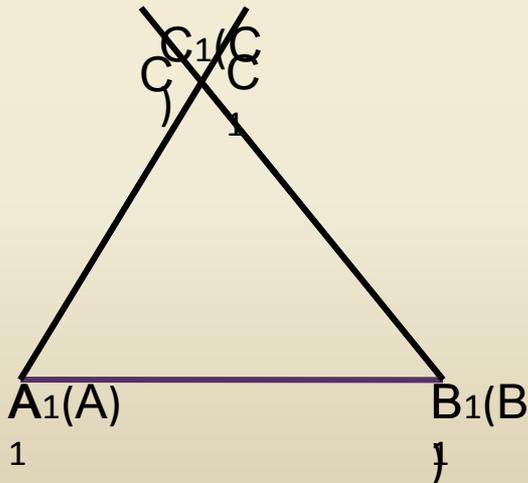
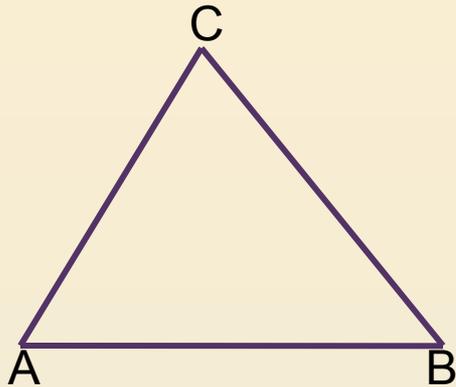
Поэтому C (общая точка AC и BC) окажется

на лучах A_1C_1 и $B_1C_1 \Rightarrow C \rightarrow C_1$.

Значит, $AC \rightarrow A_1C_1, BC \rightarrow B_1C_1$.

Итак, $\triangle ABC \rightarrow \triangle A_1B_1C_1$, поэтому они

равны. **Теорема доказана.**



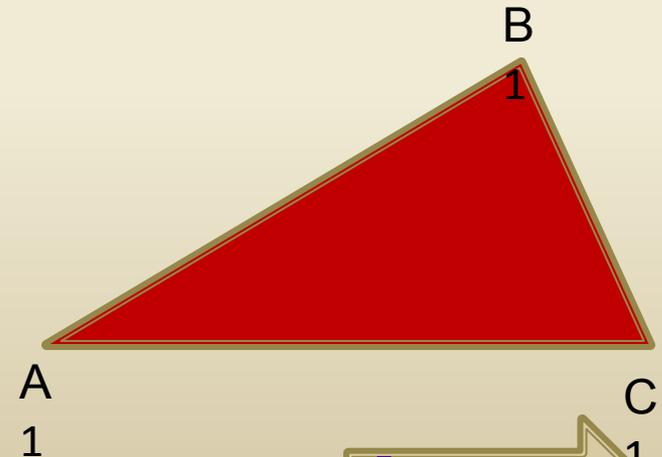
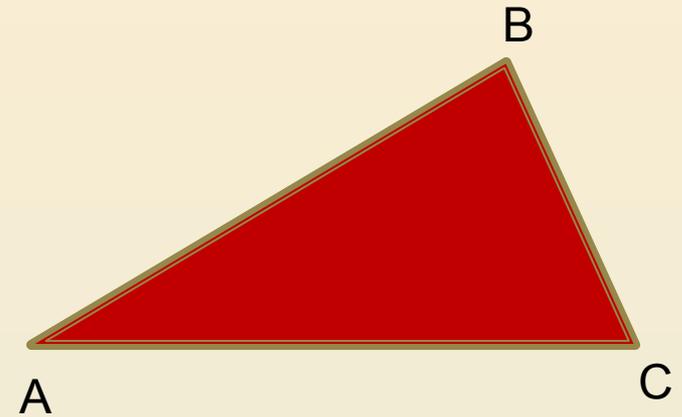
Третий признак равенства треугольников

Если **три стороны** одного треугольника соответственно **равны трем сторонам** другого треугольника, то такие треугольники **равны**.

$$AB = A_1B_1$$

$$BC = B_1C_1$$

$$AC = A_1C_1$$

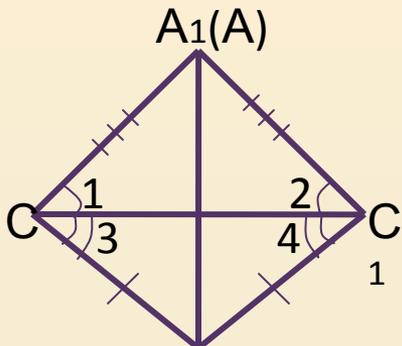


[Содержание](#)

[Доказательств](#)

0

Доказательство



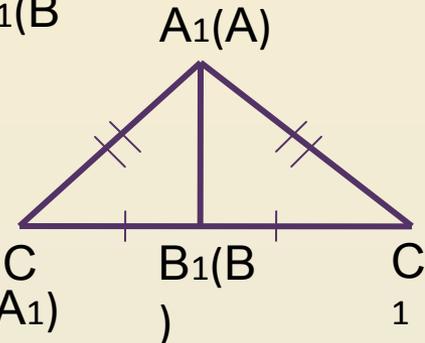
Дано: $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$
 $AB = A_1B_1$,
 $BC = B_1C_1$,
 $CA = C_1A_1$.

Д-ть, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

Д-во: Приложим $\triangle ABC$ к $\triangle A_1B_1C_1$ так, чтобы
 $A \rightarrow A_1$, $B \rightarrow B_1$, C и C_1 - по разные стороны от A_1B_1 .

Возможны три случая:

- 1) луч C_1C - внутри угла $A_1C_1B_1$;
- 2) луч C_1C совпадает с C_1A_1 или C_1B_1 ;
- 3) луч C_1C - вне угла $A_1C_1B_1$.



Т. к. $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, то $\triangle A_1C_1C$ и $\triangle B_1C_1C$ – рав/бед.
угол 1 = углу 2, угол 3 = углу 4,
поэтому, угол $A_1CB_1 =$ углу $A_1C_1B_1$.

Итак, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, угол $C =$ углу C_1 .

Следовательно, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (по первому признаку)

**Теорема
доказана.**

[Содержание](#)

[К
практике](#)

Примеры решения задач

Задачи первого уровня
сложности

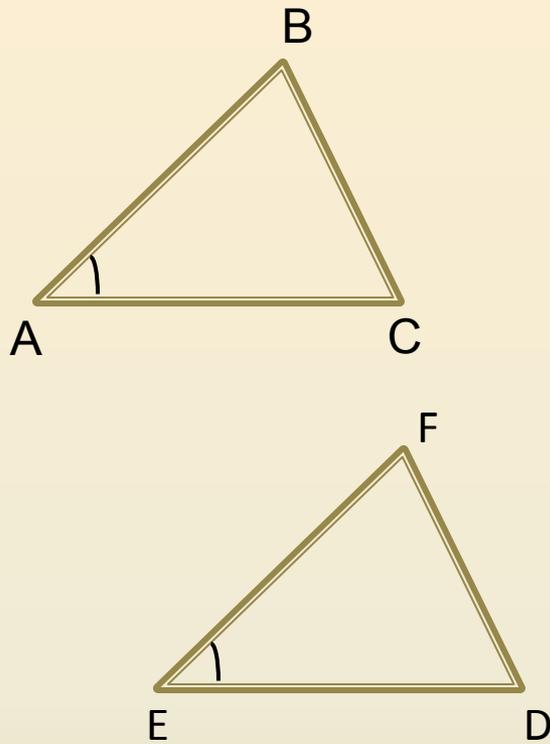
Задачи второго уровня
сложности

Задачи 1 уровня сложности

Задача 1.

Условие задачи:

В $\triangle ABC$ и $\triangle DEF$ угол А равен углу Е, $AB=20$ см, $AC=18$ см, $DE=18$ см, $EF=20$ см. Сравните $\triangle ABC$ и $\triangle DEF$. Какой угол в $\triangle DEF$ равен углу В?



Решение:

- 1). $AB=EF=20$
- 2). $AC=DE=18$
- 3). угол А равен углу Е

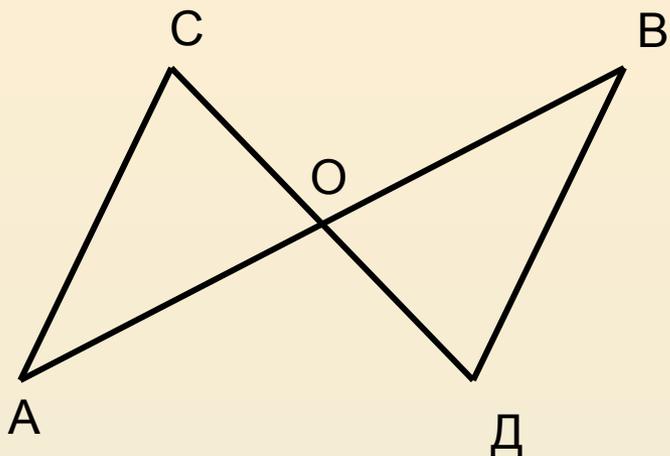
} $\triangle ABC = \triangle DEF$ (по
первому признаку
равенства
треугольников)

Угол F $\triangle DEF$ равен углу В $\triangle ABC$, так как
эти углы лежат против соответственно
равных сторон DE и AC.

Ответ:

$\triangle ABC = \triangle DEF$,
угол F равен углу В.

Задача 2.



Условие задачи:

Отрезки АВ и СД пересекаются в точке О, которая является серединой каждого из них. Чему равен отрезок ВД, если отрезок АС равен 6 м?

Дано:

АВ, СД, $CO=OD$ $AO=OB$, $AC=6$ м.

Решение:

- 1). угол АОС равен углу ВОД (вертикальные)
- 2). $AO=OB$ (по условию)
- 3). $CO=OD$ (по условию)

$\Delta AOC = \Delta BOD$ (по
первому признаку
равенства
треугольников)

Из того что $\Delta AOC = \Delta BOD$ следует равенство их сторон, т е
 $AC = BD$.

Ответ: По условию $AC = 6$ м, то и $BD = 6$ м.

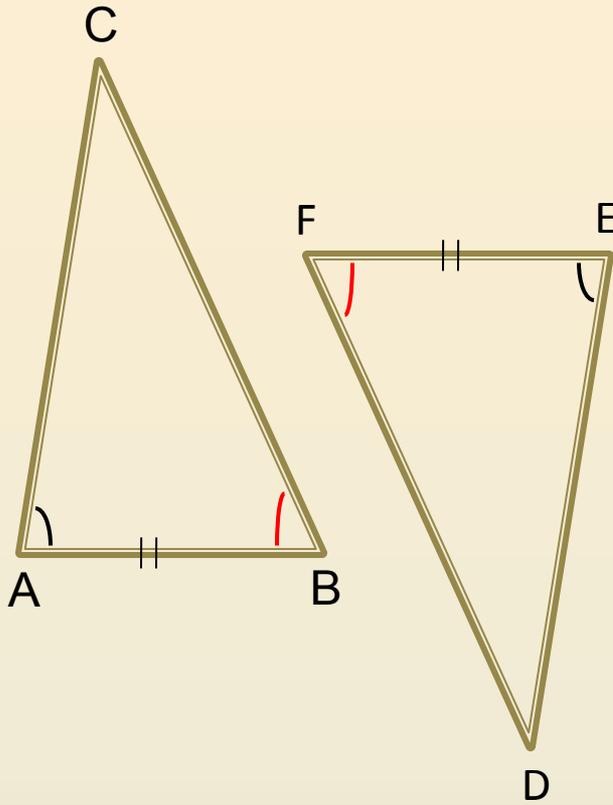
$BD = 6$ м.

[Содержани](#)

[е](#)

[Далее](#)

Задача 3.



Условие задачи:

В $\triangle ABC$ и $\triangle DEF$ угол А равен углу Е, угол В равен углу F , $AB=EF$. Сравнить эти треугольники. Какие стороны $\triangle DEF$ соответственно равны сторонам BC и CA $\triangle ABC$?

Дано:

Угол А равен углу Е, угол В равен углу F , $AB=EF$.

Решение:

- 1). угол В равен углу F
- 2). угол А равен углу Е
- 3). $AB=EF$

} $\triangle ABC = \triangle DEF$ (по второму признаку рав-ва треуг.)

Стороны DF и DE $\triangle DEF$ равны соответственно сторонам BC и CA $\triangle ABC$, т к стороны DF и BC (DE и CA) лежат против равных углов Е и А (F и В).

Ответ:

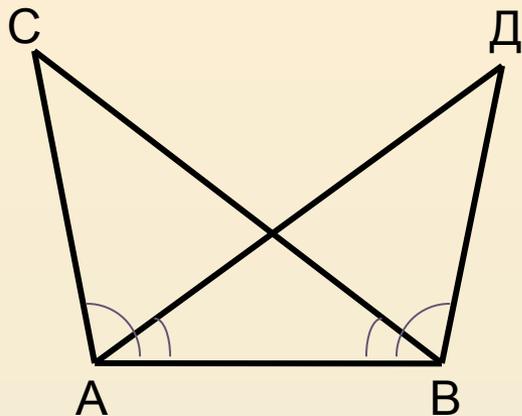
$$\triangle ABC = \triangle DEF,$$
$$DF = BC, DE = CA.$$

[Содержани](#)

[е](#)

[Далее](#)

Задача 4.



Условие задачи:

В двух треугольниках ($\triangle ABC$ и $\triangle ABD$) углы $\angle DAB$ и $\angle CBA$,

Дано: углы $\angle CAB$ и $\angle DBA$ равны, $CA = 13$ см. Найти DB .

Угол $\angle DAB$ равен углу $\angle CBA$, угол $\angle CAB$ равен углу $\angle DBA$,

$CA = 13$ см.

Решение:

- 1). AB – общая сторона $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$
- 2). угол $\angle DAB$ равен углу $\angle CBA$
- 3). угол $\angle CAB$ равен углу $\angle DBA$

} $\triangle ABC = \triangle ABD$ (по
второму признаку
равенства
треугольников)

Т.к. $\triangle ABC = \triangle ABD$, то $BD = AC$. Отсюда получаем, что

Ответ: $BD = AC = 13$ см.

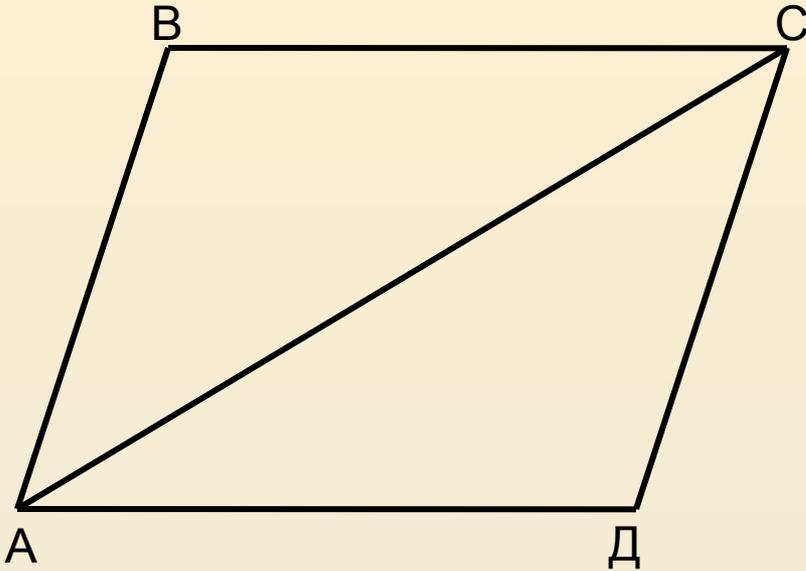
$BD = 13$ см

[Содержани](#)

[е](#)

[Далее](#)

Задача 5.



Условие задачи:

В четырехугольнике ABCD: $AB=DC$, $BC=AD$, угол В равен 100° . Найти угол Д.

Дано:

$BC=AD$, $AB=DC$, Угол В равен 100°

Решение:

Рассмотрим треугольники $\triangle ABC$ и $\triangle ADC$:

1). $AB=DC$	}	$\triangle ABC =$
2). $BC=AD$		$\triangle ADC$ (по
3). AC - общая		третьему

Из равенства треугольников следует, что угол В равен углу Д, но угол В равен 100° ,
Значит и угол Д равен 100° .

Ответ:

угол Д равен 100° .

Задачи второго уровня

СЛОЖНОСТИ

Задача 1.

Условие задачи:

Доказать, что каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от его концов.

Дано:

AP , $AO=OP$, OM перпендикулярен к AP .

Доказательство:

Пусть a – серединный перпендикуляр к отрезку AP и O – середина отрезка AP .

Рассмотрим произвольную точку m , лежащую на прямой a .

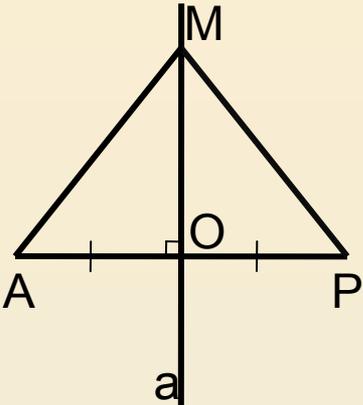
Проведём отрезки AM и BM .

Треугольники $\triangle AOM$ и $\triangle POM$ равны, так как

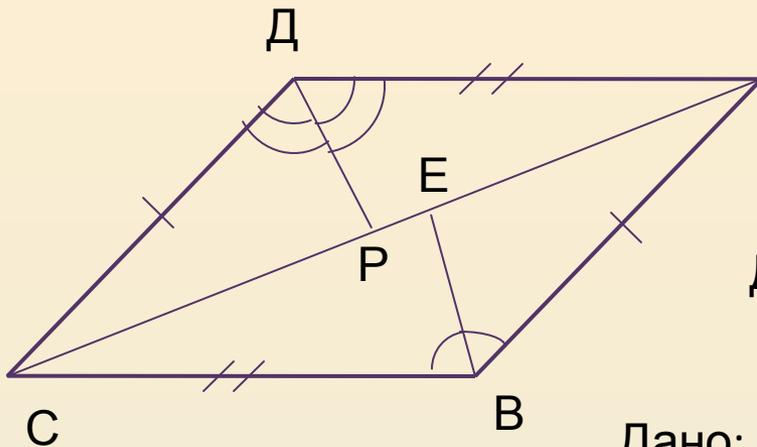
- 1). Угол AOM равен углу POM и равен 90°
- 2). OM – общая сторона
- 3). $AO=OP$ (по условию)

Из равенства треугольников следует, что $AM=BM$

ЧТО И ТРЕБОВАЛОСЬ ДОКАЗАТЬ!!!



Задача 2.



Условие задачи:

На рисунке $AB=CD$, $AD=BC$, BE – биссектриса угла ABC , а DP – биссектриса угла ADC .

Докажите, что

А). Угол $ABE =$ углу ADP ;

Б). $\triangle ABE = \triangle CDP$

Дано: $AB=CD$, $AD=BC$, BE , DP – биссектрисы

Решение:

Рассмотрим $\triangle CDA$ и $\triangle CBA$: 1). $CD=BA$

2). $AD=BC$

3). AC –

$\triangle CDA = \triangle CBA$ (по третьему признаку равенства треугол.)

откуда $\triangle CDA = \triangle CBA$, то угол $CDA =$ углу CBA , BE и DP – биссектрисы равных углов,

отсюда угол

$ABE =$ углу CDP

Угол $DCA =$ углу CAB (т.к. $DA \parallel CB$), откуда $\triangle ABE = \triangle CDP$ (по второму признаку равенства треугол.)

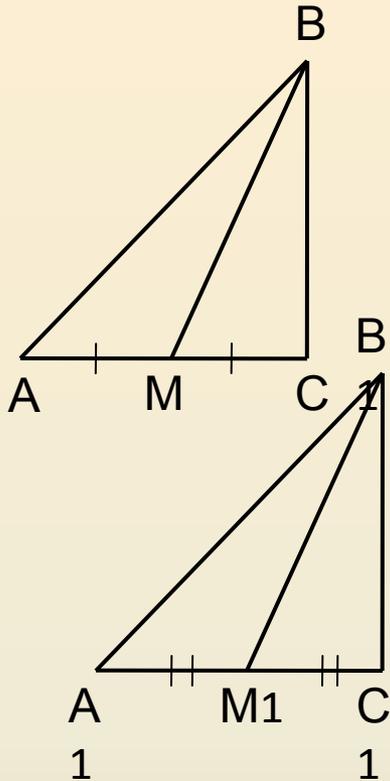
Ч.Т.Д.

[Содержани](#)

е

[Далее](#)

Задача 3.



Условие задачи:

В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ медианы BM и B_1M_1 равны, $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$. Докажите, что $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$.
Дано:

$BM=B_1M_1$, $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$.

Решение:

Т к $AC=A_1C_1$ и BM и B_1M_1 медианы к этим сторонам, то $AM=A_1M_1$ (как половины равных углов).

1). $AB=A_1B_1$ (по усл)

2). $BM=B_1M_1$ (по усл)

3). $AM=A_1M_1$ (см выше)

$\triangle ABM=\triangle A_1B_1M_1$ (по 3 признаку)

4). Угол $CMB = C_1M_1B_1$ (как смежные с соответствующими равными углами AMB и $A_1M_1B_1$)

5). $MC=M_1C_1$ (как половины равных сторон)

$\triangle BMC=\triangle B_1M_1C_1$
по 1 признаку.

Из того, что $\triangle BMC=\triangle B_1M_1C_1$ следует, что

$BC=B_1C_1$

Итак, $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $BC=B_1C_1$, вывод: $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$ (по 3

признаку). ЧТД

[Содержани](#)

е

[Далее](#)

Тестовое задание

Вариант №1

Вариант №2

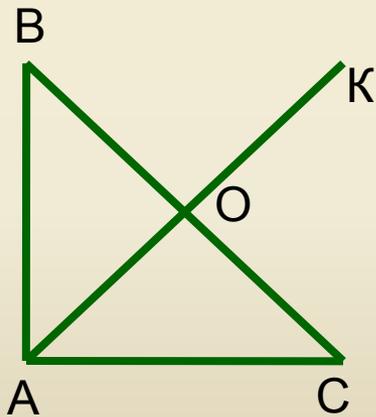
[Содержани](#)

е

Вариант №1

Вопрос 1.

Известно, что AO медиана треугольника ABC , $AO=OK$, $AB=6,3\text{см}$, $BC=6,5\text{см}$, $AC=6,7\text{см}$. Найдите CK ?



6,4 СМ	6,7 СМ
6,5 СМ	6,3 СМ

[Содержани](#)

е

**Это правильный
ответ!!!**

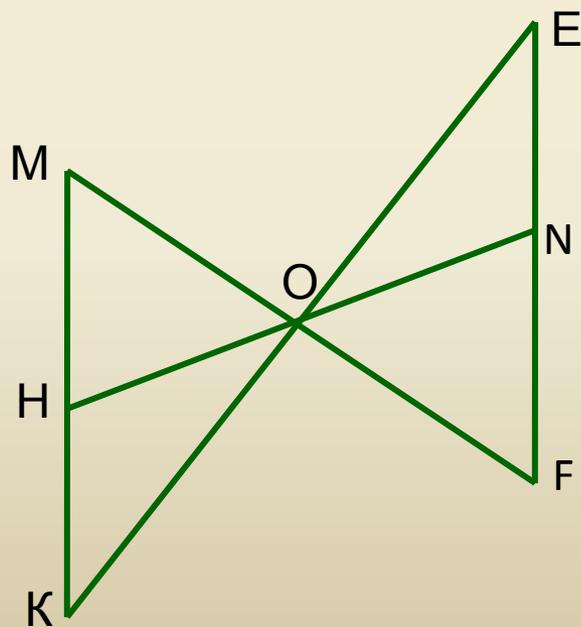


Неверный ответ!!!

[Следующий](#)

Вопрос 2.

ОН и ON – высоты углов треугольников МОК и ЕОF, причем $ОН=ON$. Найдите длину отрезка МК, если $EN=7,8$ см, $OE=8,6$ см, $HM=6,3$ см.



13,9
СМ

14,1
СМ

14,9
СМ

16,4
СМ

Правильный ответ!!!

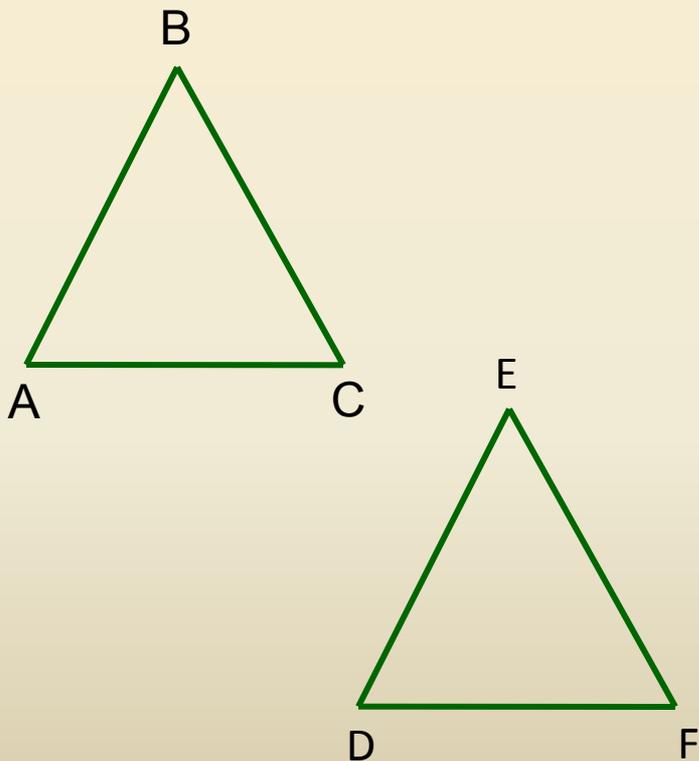
[Следующий](#)

Неверно!!!

[Следующий](#)

Вопрос 3.

$\triangle ABC = \triangle DEF$, угол $B = 73^\circ$; $BC = 6,9$ см, $DF = 7,6$ см. Какое из высказываний верно?



$DE = 6,9$ см;
 $AC = 7,6$ см

Угол $E = 73^\circ$
; $BC = 6,9$
см

$DF = 6,9$ см;
Угол
 $E = 73^\circ$

$AC = 7,6$
см;
Угол
 $D = 73^\circ$

Верно!!!

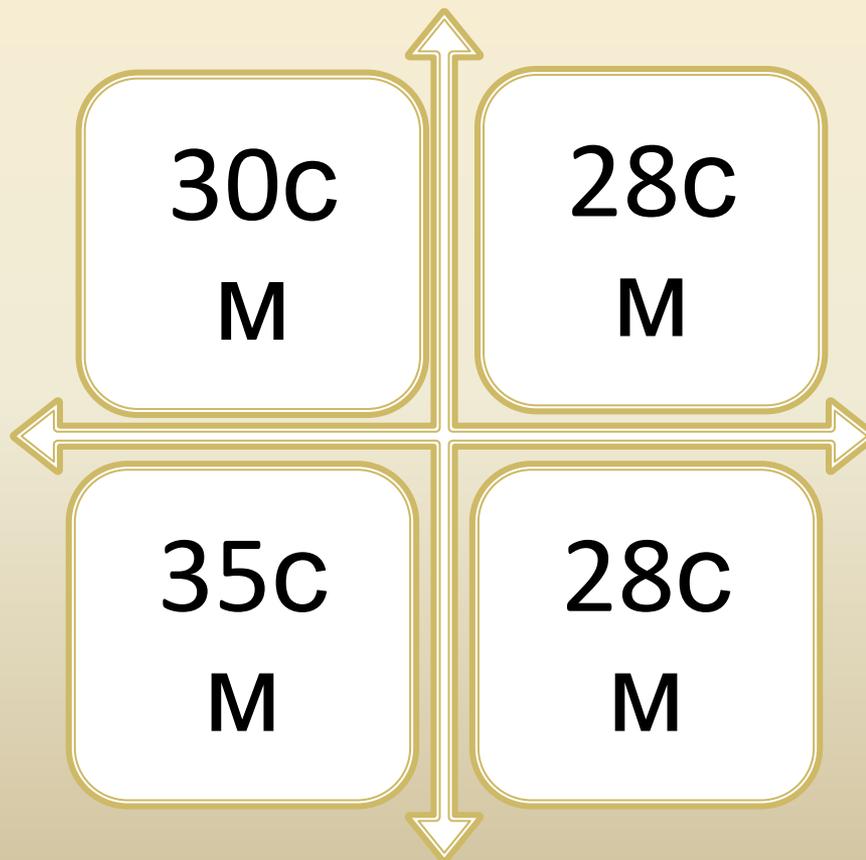
[Следующий](#)

Неверно!!!



Вопрос 4.

Треугольник CDE равен треугольнику $C_1D_1E_1$. периметр треугольника CDE равен 76 см. Сторона C_1D_1 в 2,5 раза меньше D_1E_1 , а C_1E_1 на 8 см меньше стороны D_1E_1 .
Найдите большую сторону треугольника CDE .



Верно!!!

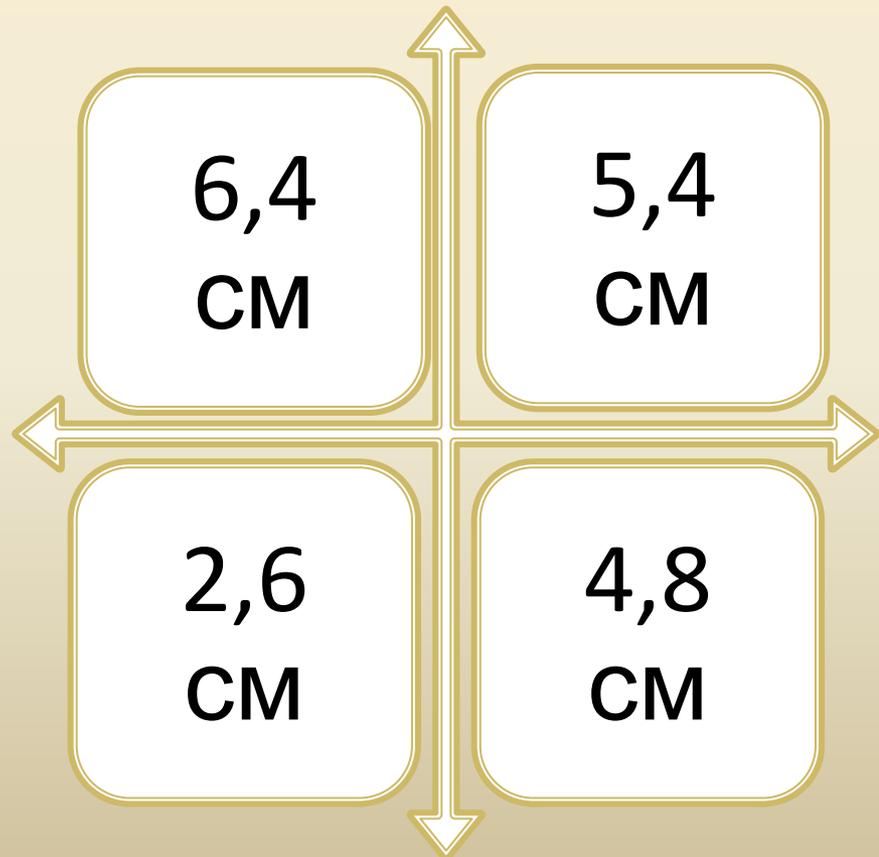


Неверно!!!



Вопрос 5.

В треугольниках ABC и KPM проведены биссектрисы BO и PE , причем $\triangle ABO = \triangle KPE$.
Найдите отрезок EM , если $AC = 9$ см, а $EM > KE$ на 3,8 см.



Верно!!!



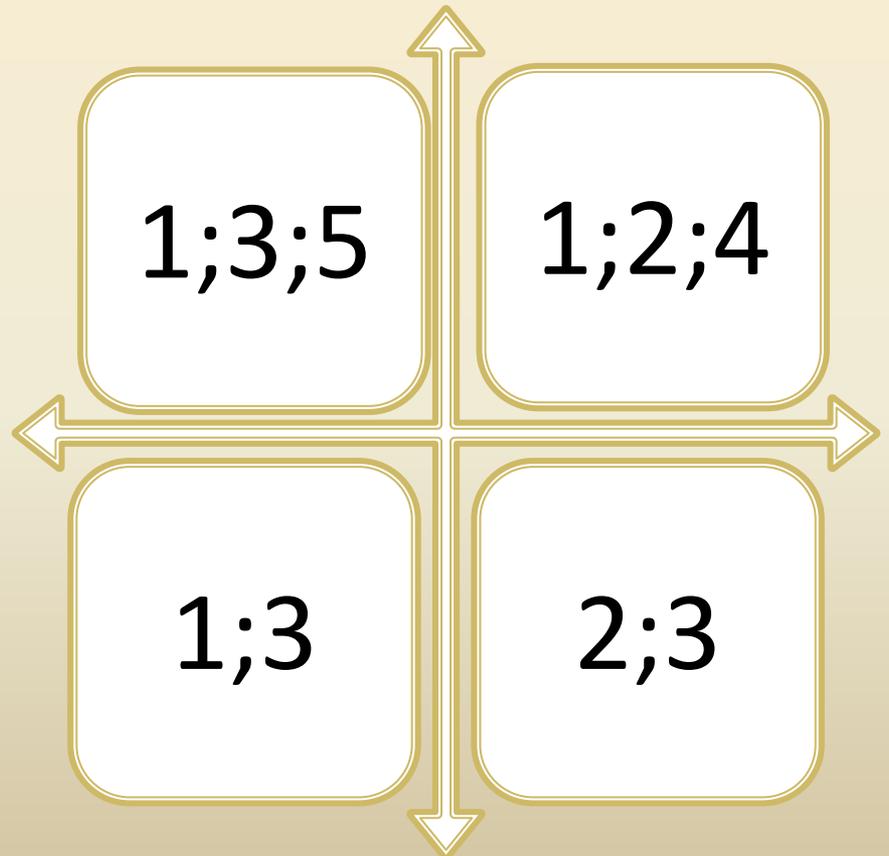
Неверно!!!



Вопрос 6.

Прямая МК разбивает плоскость на две полуплоскости. Из точек М и К в разные полуплоскости проведены равные отрезки МА и КВ, причем угол АМК = углу ВКМ. Какие из высказываний верные?

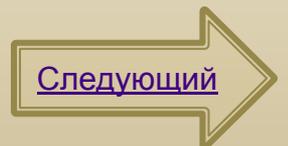
- 1). $\triangle AMB = \triangle KVB$;
- 2). Угол АКМ = углу ВКМ
- 3). $\triangle MKA = \triangle KMB$;
- 4). угол АМВ = углу КВМ



Верно!!!

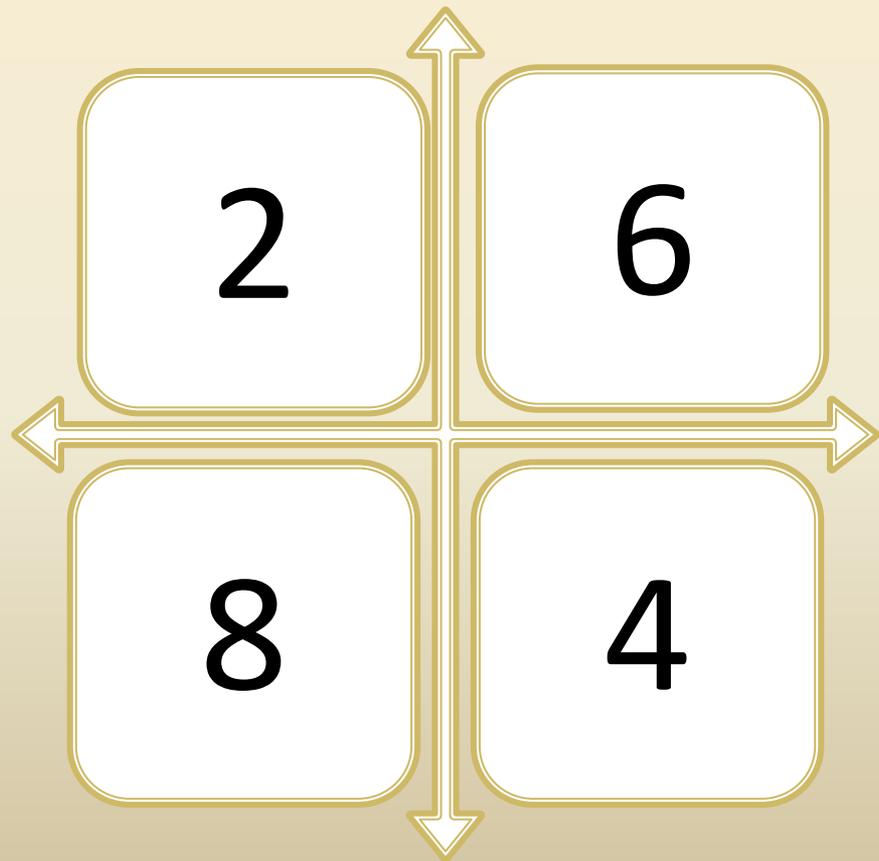
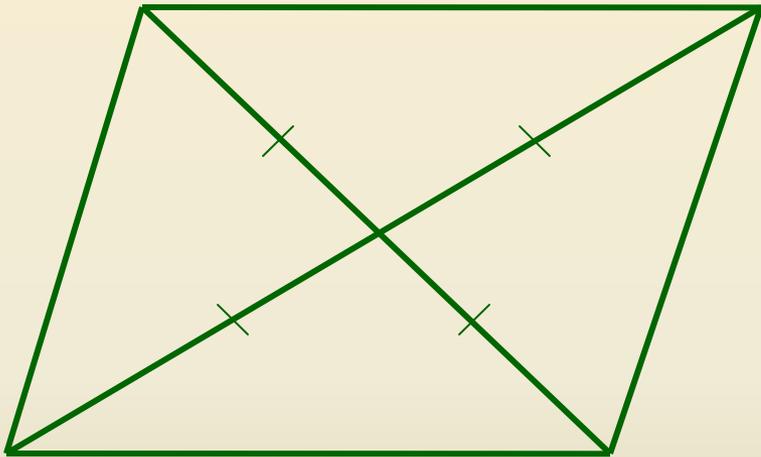


Неверно!!



Вопрос 7.

Сколько пар равных треугольников на рисунке?



Верно!!!

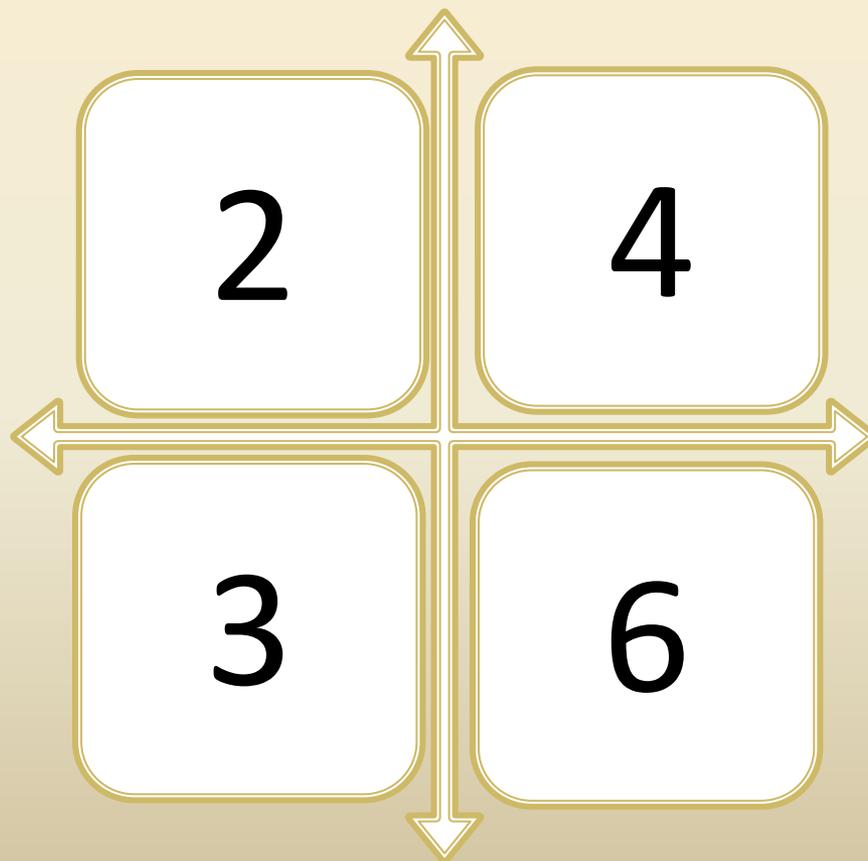


Неверно!!!



Вопрос 8.

На какое наибольшее число равных треугольников может разделить треугольник ломаная, состоящая из трех звеньев?



Верно!!!



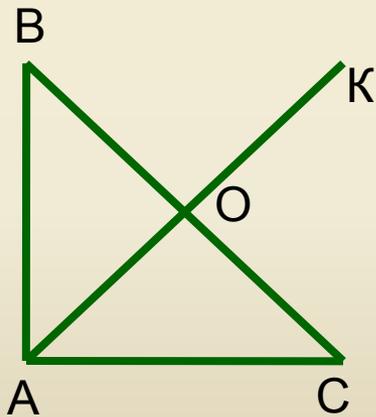
Неверно!!!

[Содержани
е](#)

Вариант

Вопрос 1. №2.

Известно, что AO медиана треугольника ABC , $AO=OK$, $AB=6,3$ см, $BC=6,5$ см, $AC=6,7$ см. Найдите CK ?



6,4 СМ	6,7 СМ
6,5 СМ	6,3 СМ

Верно!!!



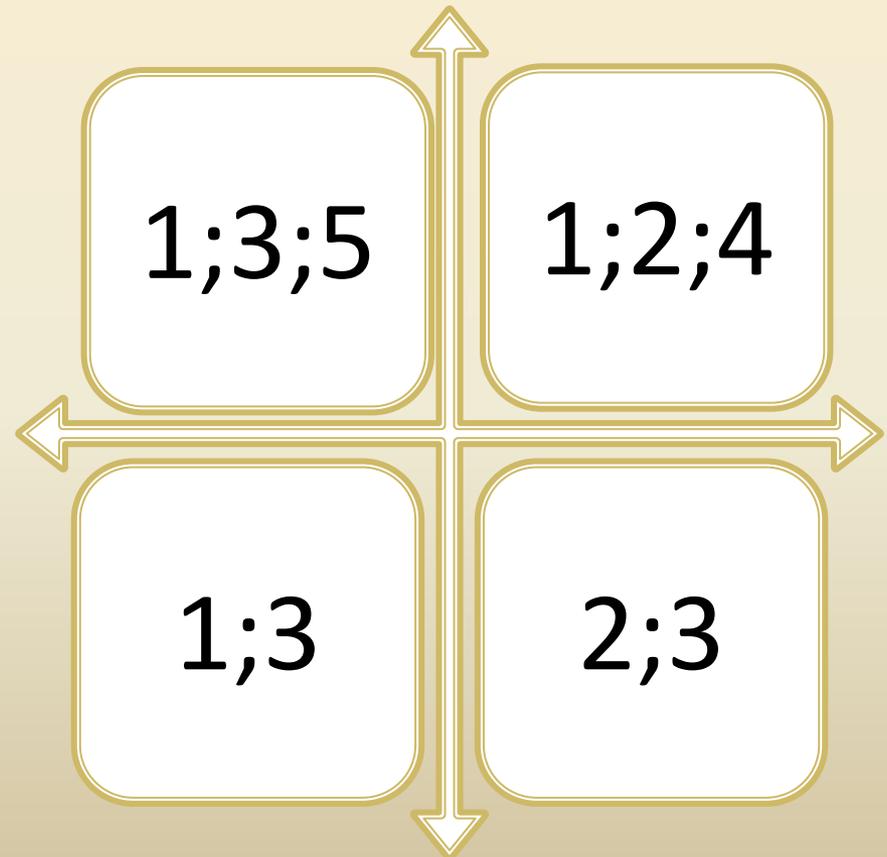
Неверно!!!



Вопрос 2.

Прямая МК разбивает плоскость на две полуплоскости. Из точек М и К в разные полуплоскости проведены равные отрезки МА и КВ, причем угол АМК = углу ВКМ. Какие из высказываний верные?

- 1). $\triangle AMB = \triangle KVB$;
- 2). Угол АКМ = углу ВКМ
- 3). $\triangle MKA = \triangle KMB$;
- 4). угол АМВ = углу КВМ



Верно!!!

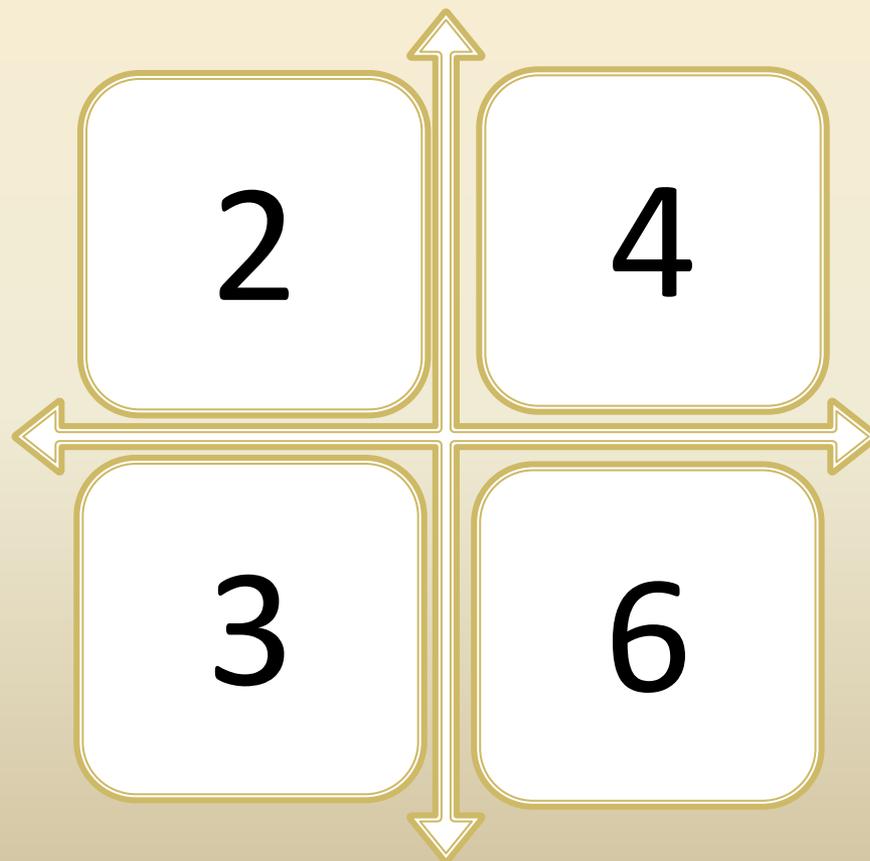


Неверно!!!



Вопрос 3.

На какое наибольшее число равных треугольников может разделить треугольник ломаная, состоящая из трех звеньев?



Верно!!!

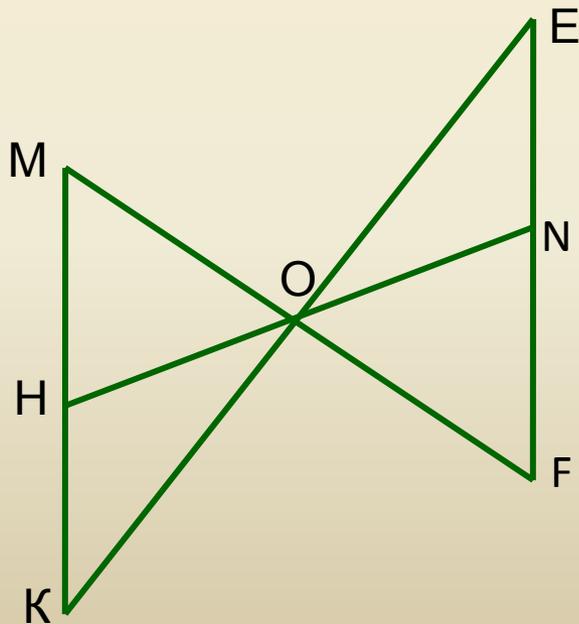


Неверно!!!



Вопрос 4.

ОН и ON – высоты углов треугольников МОК и ЕОF, причем $ОН=ON$. Найдите длину отрезка МК, если $EN=7,8$ см, $OE=8,6$ см, $HM=6,3$ см.



13,9 CM	14,1 CM
14,9 CM	16,4 CM

Верно!!!

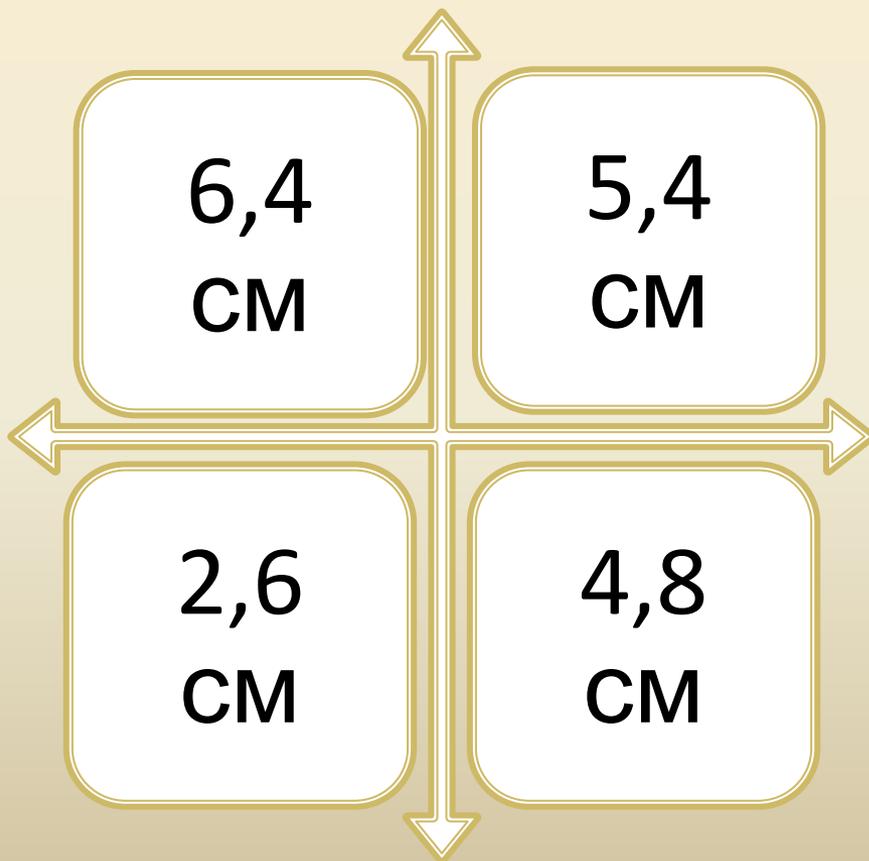


Неверно!!!



Вопрос 5.

В треугольниках ABC и KPM проведены биссектрисы BO и PE , причем $\triangle ABO = \triangle KPE$.
Найдите отрезок EM , если $AC = 9$ см, а $EM > KE$ на 3,8 см.



Верно!!!

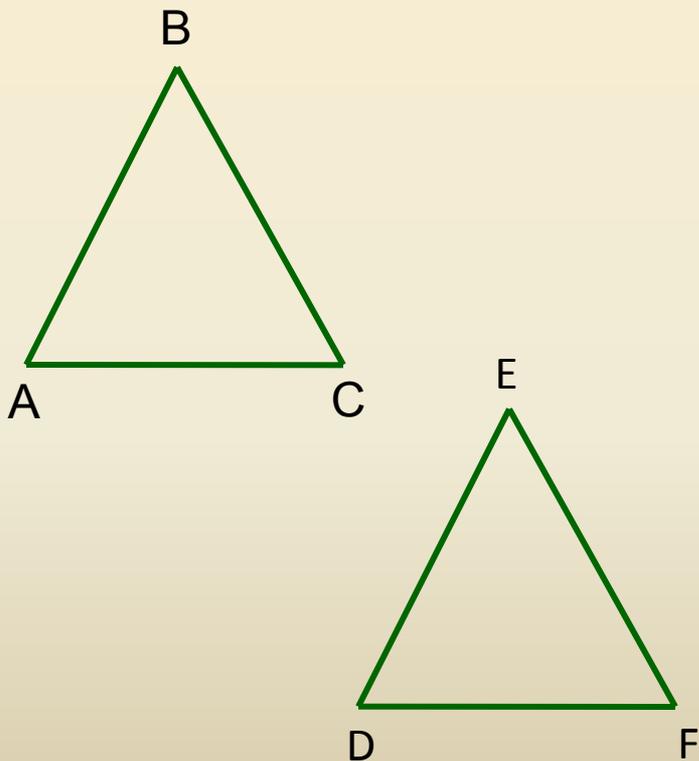


Неверно!!!



Вопрос 6.

$\triangle ABC = \triangle DEF$, угол $B = 73^\circ$; $BC = 6,9$ см, $DF = 7,6$ см. Какое из высказываний верно?



$DE = 6,9$ см;
 $AC = 7,6$ см

Угол $E = 73^\circ$
; $AC = 7,6$
см

$DF = 6,9$ см;
Угол
 $E = 73^\circ$

$AC = 7,6$
см;
Угол
 $D = 73^\circ$

Верно!!!

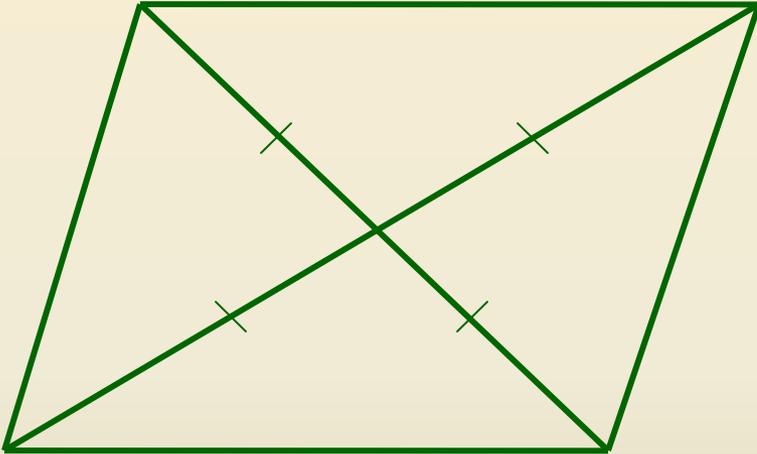


Неверно!!!



Вопрос 7.

Сколько пар равных треугольников на рисунке?



- 2
- 6
- 8
- 4

Верно!!!



Неверно!!!



Вопрос 8.

Треугольник CDE равен треугольнику $C_1D_1E_1$. периметр треугольника CDE равен 76 см. Сторона C_1D_1 в 2,5 раза меньше D_1E_1 , а C_1E_1 на 8 см меньше стороны D_1E_1 .
Найдите большую сторону треугольника CDE .

- 30см
- 28см
- 35см
- 25см

Верно!!!

[Содержани
е](#)

Неверно!!!

[Содержани
е](#)

**СПАСИБО ЗА
ВНИМАНИЕ!**

Учитель математики и информатики МБОУ «Гимназия» г. Суворова
Обрядина Александра Александровна

Список литературы

- Учебник «Геометрия 7-9 класс»: (авт. Л. С.Атанасян, В. Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др.) – М.: Просвещение, 2009.
- Опорные конспекты учителя.