

# **Признаки равенства треугольников**

# Содержание



## Теория

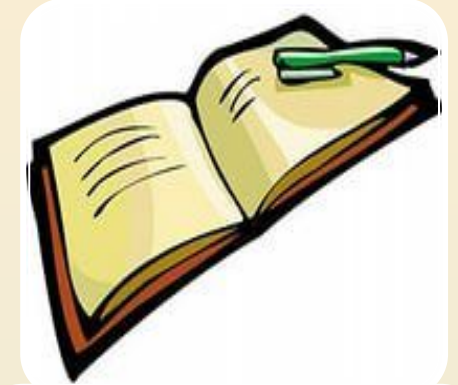
- Первый признак
- Второй признак
- Третий признак



## Практика

*Примеры  
решения задач*

- 1 уровня
- 2 Уровня



## Контроль

- Тестовое задание

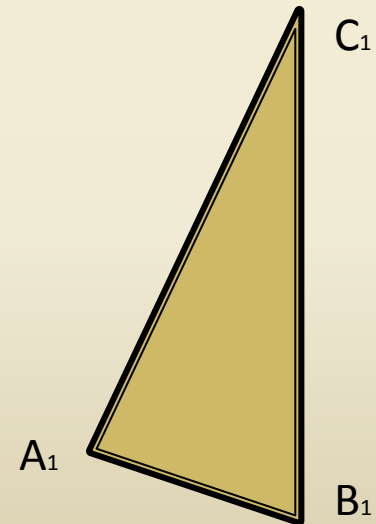
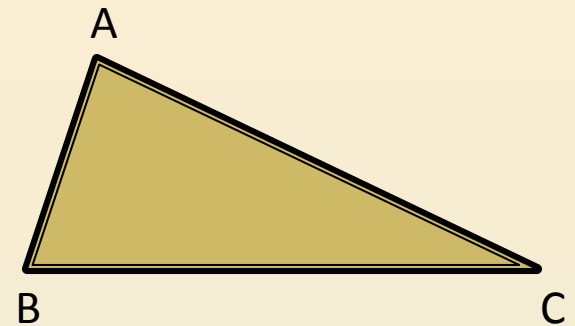
# Первый признак равенства треугольников

- Если **две стороны** и **угол между ними** одного треугольника соответственно равны **двум сторонам** и **углу между ними** другого треугольника, то такие треугольники **равны**.

$$AB = A_1B_1$$

$$BC = B_1C_1$$

$$\text{Угол } B = \text{углу } B_1$$



Содержание

Доказательств

0

# Доказательство

Дано:  $\triangle ABC$  и  $\triangle A_1B_1C_1$ ,  
 $AB = A_1B_1$ ,  
 $AC = A_1C_1$ ,  
 угол  $A =$  угол  $A_1$ .  
 Д-ть:  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ .

Д-во: Т.к. угол  $A =$  углу  $A_1$ ,  
 то  $\triangle ABC \rightarrow \triangle A_1B_1C_1$  так, что

$A \rightarrow A_1$

$AB \rightarrow$

$A_1B_1$

$AC \rightarrow$

$A_1C_1$



$B \rightarrow B$

$1$

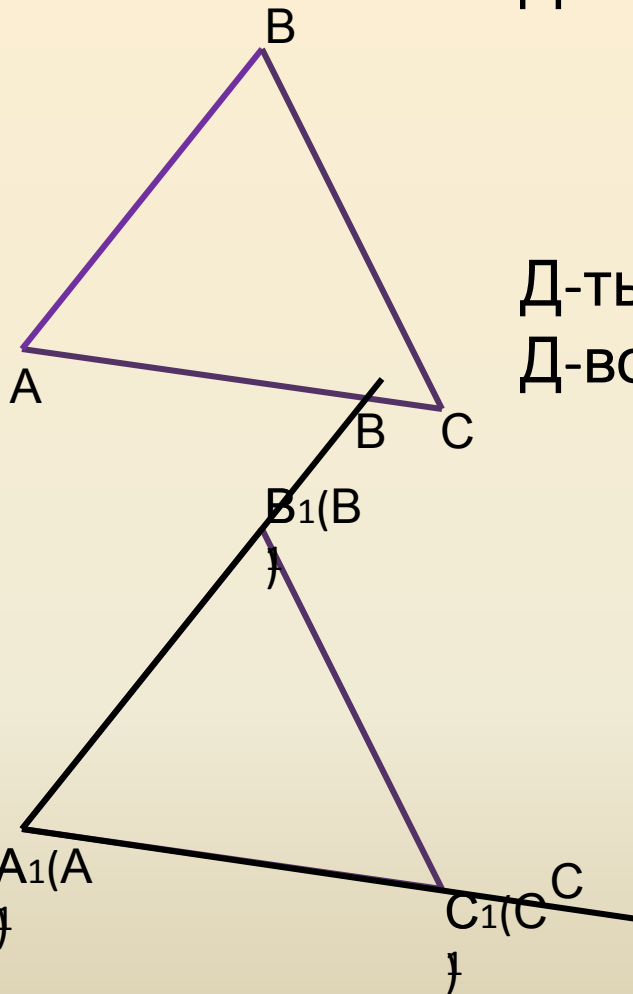
$C \rightarrow C$

Следовательно,  $BC \rightarrow B_1C_1$ .

Итак,  $\triangle ABC \rightarrow \triangle A_1B_1C_1$ ,

значит они равны.

**Теорема доказана.**



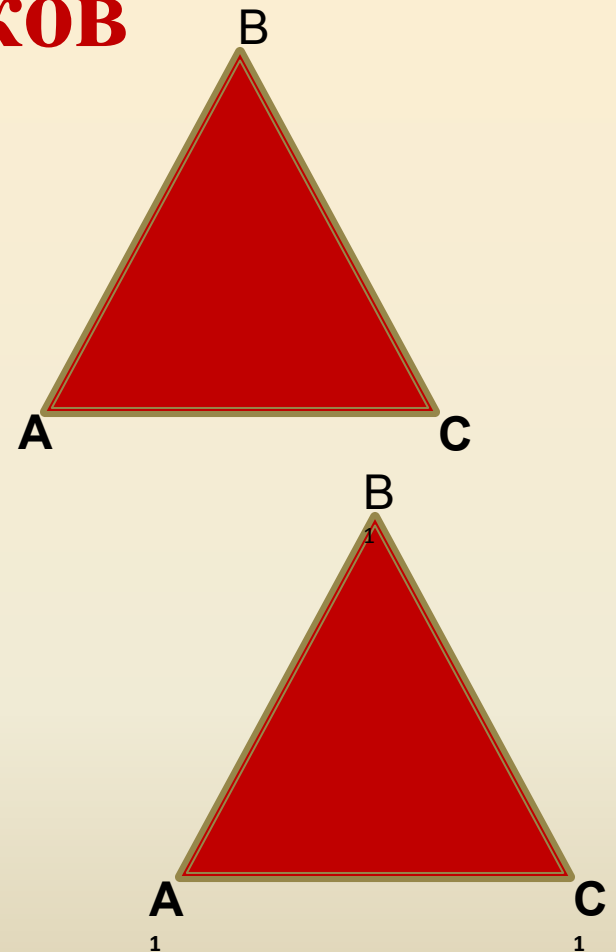
# Второй признак равенства треугольников

Если **одна сторона** и **два прилежащих к ней угла** одного треугольника соответственно равны **стороне и двум прилежащим к ней углам** другого треугольника, то такие треугольники **равны**

$$AC = A_1 C_1$$

$$\text{угол } A = \text{углу } A_1$$

$$\text{угол } C = \text{углу } C_1$$



# Доказательство

Дано:  $\triangle ABC$  и  $\triangle A_1B_1C_1$ ,

$$AB = A_1B_1,$$

угол  $A =$  углу  $A_1$

угол  $B =$  углу  $B_1$ .

Д-ть:  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

Д-во: Наложим  $\triangle ABC$  на  $\triangle A_1B_1C_1$  так,

чтобы  $A \rightarrow A_1$ ,

$$AB \rightarrow A_1B_1$$

$C$  и  $C_1$  оказались по одну сторону от  $A_1B_1$ .

Т к угол  $A =$  углу  $A_1$   $\rightarrow$   $AC \rightarrow$  луч  $A_1C_1$ ,

угол  $B =$  углу  $B_1$   $\rightarrow$   $BC \rightarrow$  луч  $B_1C_1$

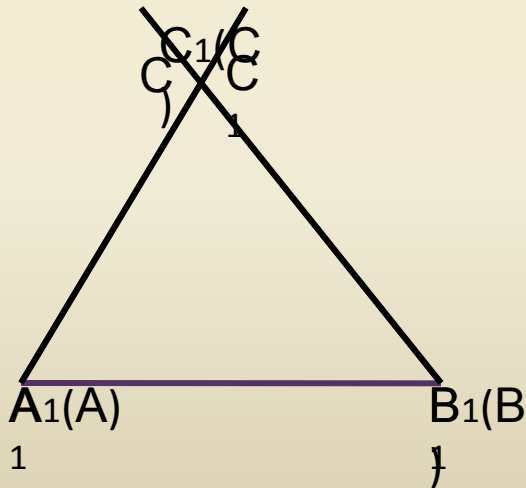
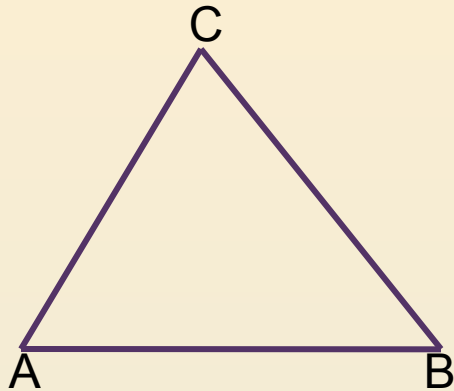
Поэтому  $C$  (общая точка  $AC$  и  $BC$ ) окажется

на лучах  $A_1C_1$  и  $B_1C_1 \Rightarrow C \rightarrow C_1$ .

Значит,  $AC \rightarrow A_1C_1, BC \rightarrow B_1C_1$ .

Итак,  $\triangle ABC \rightarrow \triangle A_1B_1C_1$ , поэтому они

равны. **Теорема доказана.**



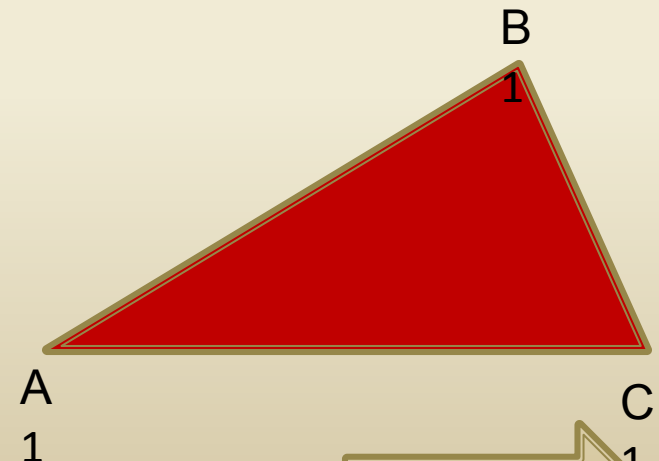
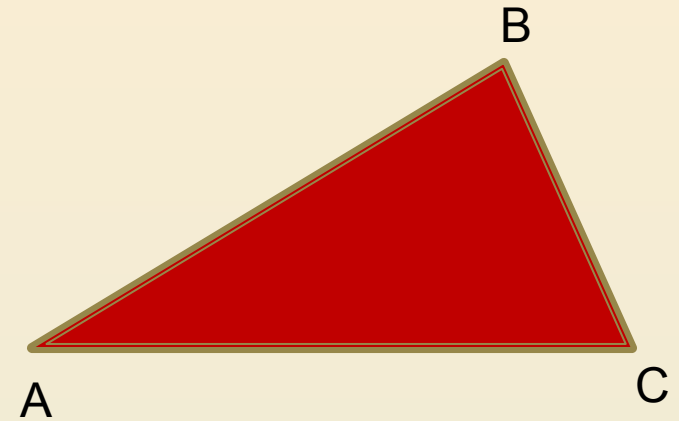
# Третий признак равенства треугольников

Если **три стороны** одного треугольника соответственно **равны трем сторонам** другого треугольника, то такие треугольники **равны**.

$$AB = A_1B_1$$

$$BC = B_1C_1$$

$$AC = A_1C_1$$

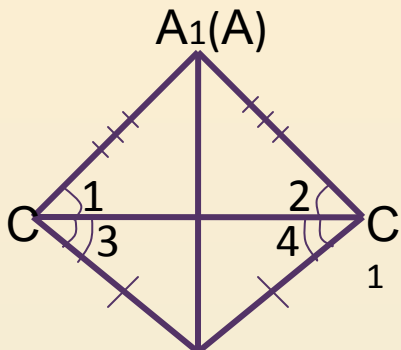


[Содержание](#)

[Доказательств](#)

0

# Доказательство



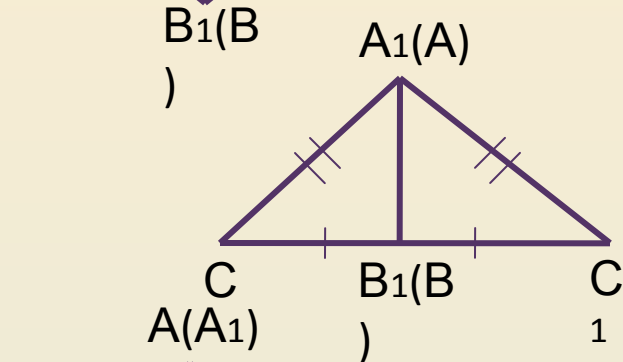
Дано:  $\triangle ABC$  и  $\triangle A_1B_1C_1$   
 $AB = A_1B_1$ ,  
 $BC = B_1C_1$ ,  
 $CA = C_1A_1$ .

Д-ть, что  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

Д-во: Приложим  $\triangle ABC$  к  $\triangle A_1B_1C_1$  так, чтобы  
 $A \rightarrow A_1$ ,  $B \rightarrow B_1$ ,  $C$  и  $C_1$  - по разные стороны от  $A_1B_1$ .

Возможны три случая:

- 1) луч  $C_1C$  - внутри угла  $A_1C_1B_1$ ;
- 2) луч  $C_1C$  совпадает с  $C_1A_1$  или  $C_1B_1$ ;
- 3) луч  $C_1C$  - вне угла  $A_1C_1B_1$ .



Т. к.  $AC = A_1C_1$ ,  $BC = B_1C_1$ , то  $\triangle A_1C_1C$  и  $\triangle B_1C_1C$  – рав/бед.  
угол 1 = углу 2, угол 3 = углу 4,  
поэтому, угол  $A_1CB_1$  = углу  $A_1C_1B_1$ .

Итак,  $AC = A_1C_1$ ,  $BC = B_1C_1$ , угол  $C$  = углу  $C_1$ .

Следовательно,  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$  (по первому признаку)

**Теорема  
доказана.**

[Содержание](#)

[К  
практике](#)



# Примеры решения задач

Задачи первого уровня  
сложности

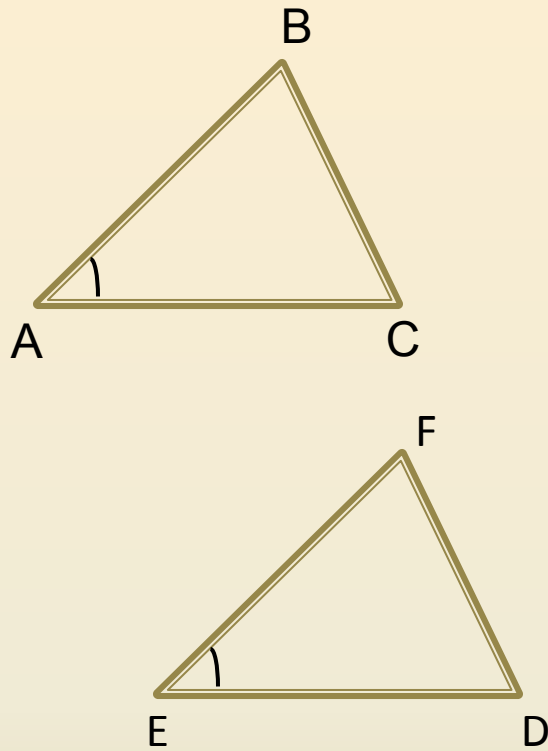
Задачи второго уровня  
сложности

# Задачи 1 уровня сложности

## Задача 1.

Условие задачи:

В  $\triangle ABC$  и  $\triangle DEF$  угол А равен углу Е,  $AB=20$  см,  $AC=18$  см,  $DE=18$  см,  $EF=20$  см. Сравните  $\triangle ABC$  и  $\triangle DEF$ . Какой угол в  $\triangle DEF$  равен углу В?



Решение:

- 1).  $AB=EF=20$
- 2).  $AC=DE=18$
- 3). угол А равен углу Е

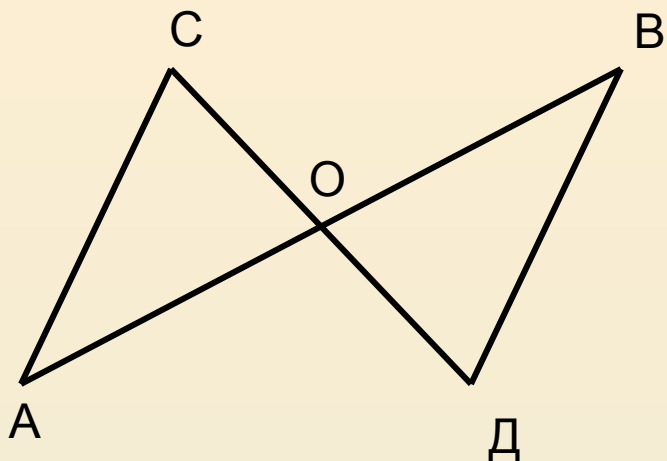
}  $\triangle ABC = \triangle DEF$  (по  
первому признаку  
равенства  
треугольников)

Угол F  $\triangle DEF$  равен углу В  $\triangle ABC$ , так как  
эти углы лежат против соответственно  
равных сторон DE и AC.

Ответ:

$\triangle ABC = \triangle DEF$ ,  
угол F равен углу В.

## Задача 2.



Условие задачи:

Отрезки АВ и СД пересекаются в точке О, которая является серединой каждого из них. Чему равен отрезок ВД, если отрезок АС равен 6 м?

Дано:

АВ, СД,  $CO=OD$   $AO=OB$ ,  $AC=6$  м.

Решение:

- 1). угол АОС равен углу ВОД (вертикальные)
- 2).  $AO=OB$  (по условию)
- 3).  $CO=OD$  (по условию)

$\Delta AOC = \Delta BOD$  (по первому признаку равенства треугольников)

Из того что  $\Delta AOC = \Delta BOD$  следует равенство их сторон, т е  $AC=BD$ .

Ответ: По условию  $AC=6$  м, то и  $BD=6$  м.

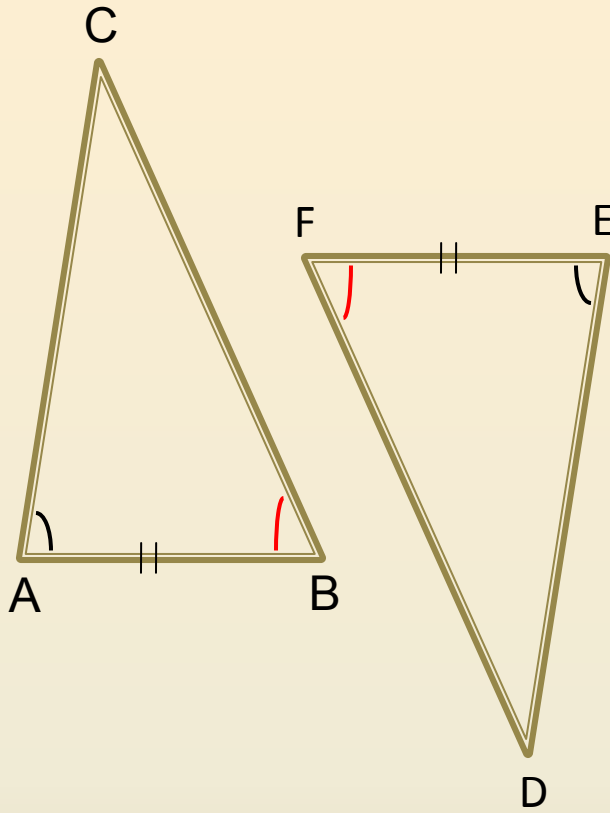
$BD=6$  м.

[Содержани](#)

[е](#)

[Далее](#)

# Задача 3.



Условие задачи:

В  $\triangle ABC$  и  $\triangle DEF$  угол А равен углу Е, угол В равен углу F ,  $AB=EF$ . Сравнить эти треугольники. Какие стороны  $\triangle DEF$  соответственно равны сторонам  $BC$  и  $CA$   $\triangle ABC$  ?

Дано:

Угол А равен углу Е, угол В равен углу F ,  $AB=EF$ .

Решение:

- 1). угол В равен углу F
- 2). угол А равен углу Е
- 3).  $AB=EF$

}  $\triangle ABC = \triangle DEF$  (по второму признаку рав-ва треуг.)

Стороны  $DF$  и  $DE$   $\triangle DEF$  равны соответственно сторонам  $BC$  и  $CA$   $\triangle ABC$ , т к стороны  $DF$  и  $BC$  ( $DE$  и  $CA$ ) лежат против равных углов  $E$  и  $A$  ( $F$  и  $B$ ).

Ответ:

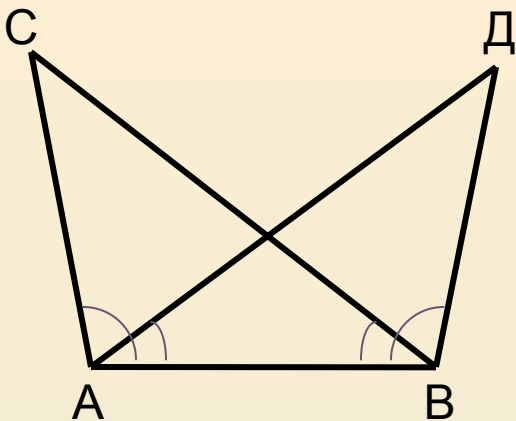
$$\triangle ABC = \triangle DEF,$$
$$DF = BC, DE = CA.$$

[Содержани](#)

[е](#)

[Далее](#)

# Задача 4.



Условие задачи:

В двух треугольниках ( $\triangle ABC$  и  $\triangle ABD$ ) углы  $\angle DAB$  и  $\angle CBA$ ,

Дано: углы  $\angle CAB$  и  $\angle DBA$  равны,  $CA=13$  см. Найти  $DB$ .

Угол  $\angle DAB$  равен углу  $\angle CBA$ , угол  $\angle CAB$  равен углу  $\angle DBA$ ,

$CA=13$  см.

Решение:

- 1).  $AB$  – общая сторона  $\triangle ABC$  и  $\triangle ABD$
- 2). угол  $\angle DAB$  равен углу  $\angle CBA$
- 3). угол  $\angle CAB$  равен углу  $\angle DBA$

}  $\triangle ABC = \triangle ABD$  (по  
второму признаку  
равенства  
треугольников)

Т к  $\triangle ABC = \triangle ABD$ , то  $BD=AC$ . Отсюда получаем, что

Ответ:  $BD=AC=13$  см.

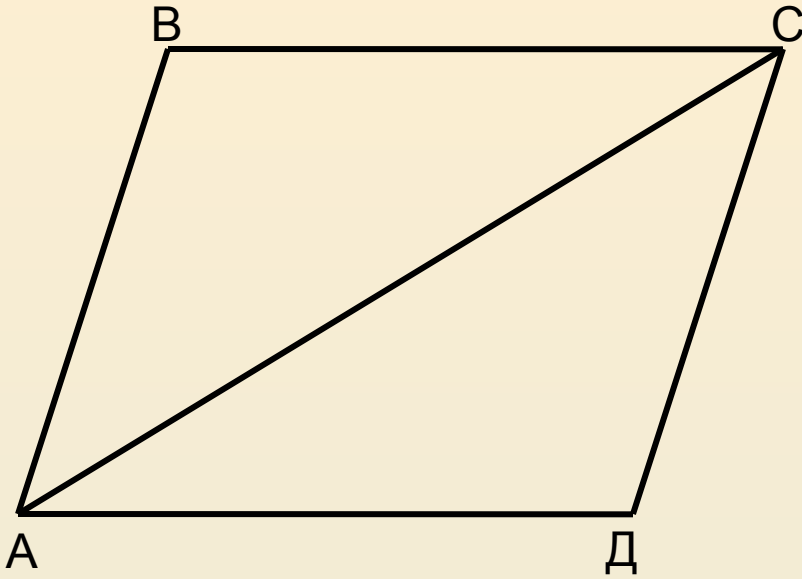
$BD=13$  см

[Содержани](#)

[е](#)

[Далее](#)

## Задача 5.



Условие задачи:

В четырехугольнике ABCD:  $AB=DC$ ,  $BC=AD$ , угол В равен  $100^\circ$ . Найти угол Д.

Дано:

$BC=AD$ ,  $AB=DC$ , Угол В равен  $100^\circ$

Решение:

Рассмотрим треугольники  $\triangle ABC$  и  $\triangle ADC$ :

- |                  |   |                     |
|------------------|---|---------------------|
| 1). $AB=DC$      | } | $\triangle ABC =$   |
| 2). $BC=AD$      |   | $\triangle ADC$ (по |
| 3). $AC$ - общая |   | третьему            |

Из равенства треугольников следует, что угол В равен углу Д, но угол В равен  $100^\circ$ ,  
Значит и угол Д равен  $100^\circ$ .

Ответ:

угол Д равен  $100^\circ$ .

# Задачи второго уровня

## СЛОЖНОСТИ

### Задача 1.

Условие задачи:

Доказать, что каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от его концов.

Дано:

$AP$ ,  $AO=OP$ ,  $OM$  перпендикулярен к  $AP$ .

Доказательство:

Пусть  $a$  – серединный перпендикуляр к отрезку  $AP$  и  $O$  – середина отрезка  $AP$ .

Рассмотрим произвольную точку  $m$ , лежащую на прямой  $a$ .

Проведём отрезки  $AM$  и  $BM$ .

Треугольники  $\triangle AOM$  и  $\triangle BOM$  равны, так как

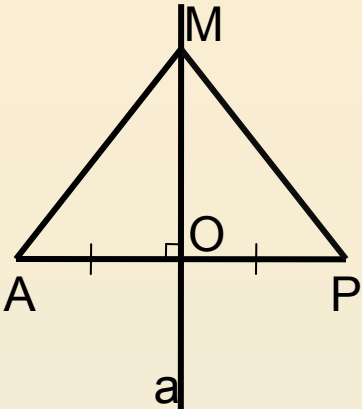
1). Угол  $AOM$  равен углу  $POM$  и равен  $90^\circ$

2).  $OM$  – общая сторона

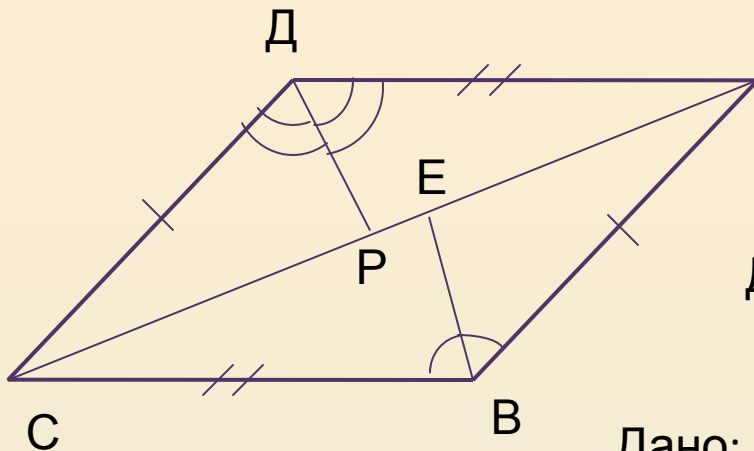
3).  $AO=OP$  (по условию)

Из равенства треугольников следует, что  $AM=BM$

ЧТО И ТРЕБОВАЛОСЬ ДОКАЗАТЬ!!!



## Задача 2.



Условие задачи:

На рисунке  $AB=CD$ ,  $AD=BC$ ,  $BE$  – биссектриса угла  $ABC$ , а  $DP$  – биссектриса угла  $ADC$ .

Докажите, что

А). Угол  $ABE =$  углу  $ADP$ ;

Б).  $\triangle ABE = \triangle CDP$

Дано:  $AB=CD$ ,  $AD=BC$ ,  $BE$ ,  $DP$  – биссектрисы

Решение:

Рассмотрим  $\triangle CDA$  и  $\triangle CBA$ : 1).  $CD=BA$

2).  $AD=BC$

3).  $AC$  –

$\triangle CDA = \triangle CBA$  (по третьему признаку равенства треугол.)

откуда  $\angle CDA = \angle CBA$ ,  $BE$  и  $DP$  – биссектрисы равных углов,

отсюда угол

$\angle ABE =$  углу  $\angle CDP$

Угол  $\angle DCA =$  углу  $\angle CAB$  (т.к.  $DA \parallel CB$ ), откуда  $\triangle ABE = \triangle CDP$  (по второму признаку равенства треугол.)

Ч.Т.Д.

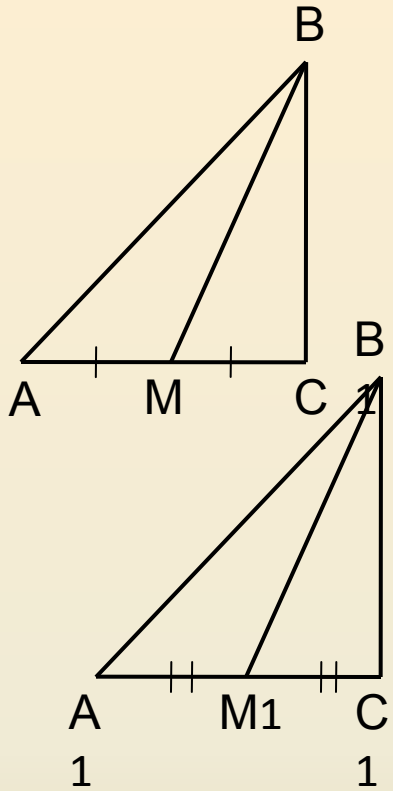
[Содержани](#)

е

[Далее](#)



# Задача 3.



Условие задачи:

В треугольниках  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  медианы  $BM$  и  $B_1M_1$  равны,  $AB=A_1B_1$ ,  $AC=A_1C_1$ . Докажите, что  $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$ .  
Дано:

$BM=B_1M_1$ ,  $AB=A_1B_1$ ,  $AC=A_1C_1$ .

Решение:

Т к  $AC=A_1C_1$  и  $BM$  и  $B_1M_1$  медианы к этим сторонам, то  $AM=A_1M_1$  (как половины равных отрезков).

- 1).  $AB=A_1B_1$  (по усл)
- 2).  $BM=B_1M_1$  (по усл)
- 3).  $AM=A_1M_1$  (см выше)

$\triangle ABM=\triangle A_1B_1M_1$  (по 3 признаку)

- 4). Угол  $\angle CMB = \angle C_1M_1B_1$  (как смежные с соответствующими равными углами  $\angle AMB$  и  $\angle A_1M_1B_1$ )

$\triangle BMC=\triangle B_1M_1C_1$   
по 1 признаку.

- 5).  $MC=M_1C_1$  (как половины равных отрезков)

- 6).  $BM=B_1M_1$

Из того, что  $\triangle BMC=\triangle B_1M_1C_1$  следует, что

$BC=B_1C_1$

Итак,  $AB=A_1B_1$ ,  $AC=A_1C_1$ ,  $BC=B_1C_1$ , вывод:  $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$  (по 3

признаку). ЧТД

[Содержани](#)

е

[Далее](#)

# Тестовое задание

Вариант №1

Вариант №2

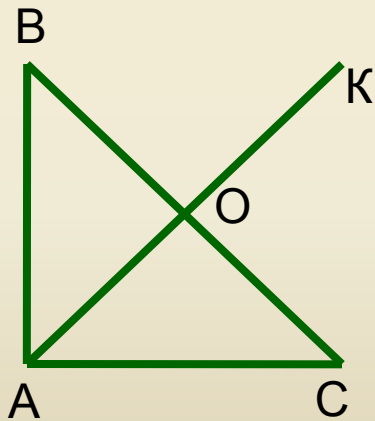
[Содержани](#)

е

# Вариант №1

## Вопрос 1.

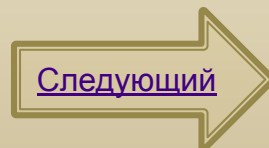
Известно, что  $AO$  медиана треугольника  $ABC$ ,  $AO=OK$ ,  $AB=6,3\text{см}$ ,  $BC=6,5\text{см}$ ,  $AC=6,7\text{см}$ . Найдите  $CK$ ?



<b>6,4 СМ</b>	<b>6,7 СМ</b>
<b>6,5 СМ</b>	<b>6,3 СМ</b>



**Это правильный  
ответ!!!**

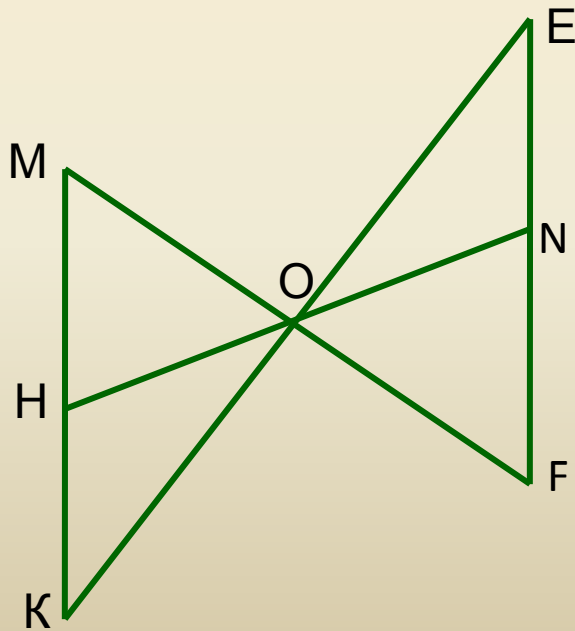


**Неверный ответ!!!**

[Следующий](#)

## Вопрос 2.

ОН и ON – высоты углов треугольников МОК и ЕОF, причем  $ОН=ON$ . Найдите длину отрезка МК, если  $EN=7,8$  см,  $OE=8,6$  см,  $HM=6,3$  см.



13,9  
СМ

14,1  
СМ

14,9  
СМ

16,4  
СМ

**Правильный ответ!!!**

[Следующий](#)

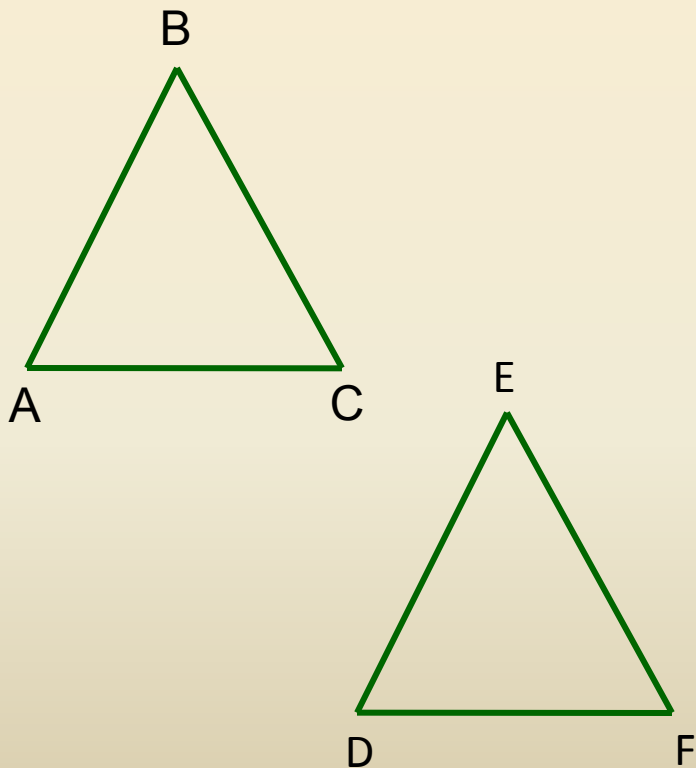
**Неверно!!!**

[Следующий](#)



## Вопрос 3.

$\triangle ABC = \triangle DEF$ , угол  $B = 73^\circ$ ;  $BC = 6,9$  см,  $DF = 7,6$  см. Какое из высказываний верно?



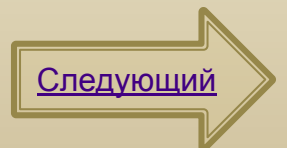
$DE = 6,9$  см;  
 $AC = 7,6$  см

Угол  $E = 73^\circ$   
;  $BC = 6,9$   
см

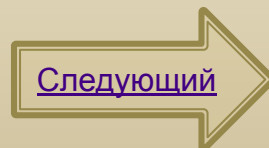
$DF = 6,9$  см;  
Угол  
 $E = 73^\circ$

$AC = 7,6$   
см;  
Угол  
 $D = 73^\circ$

**Верно!!!**

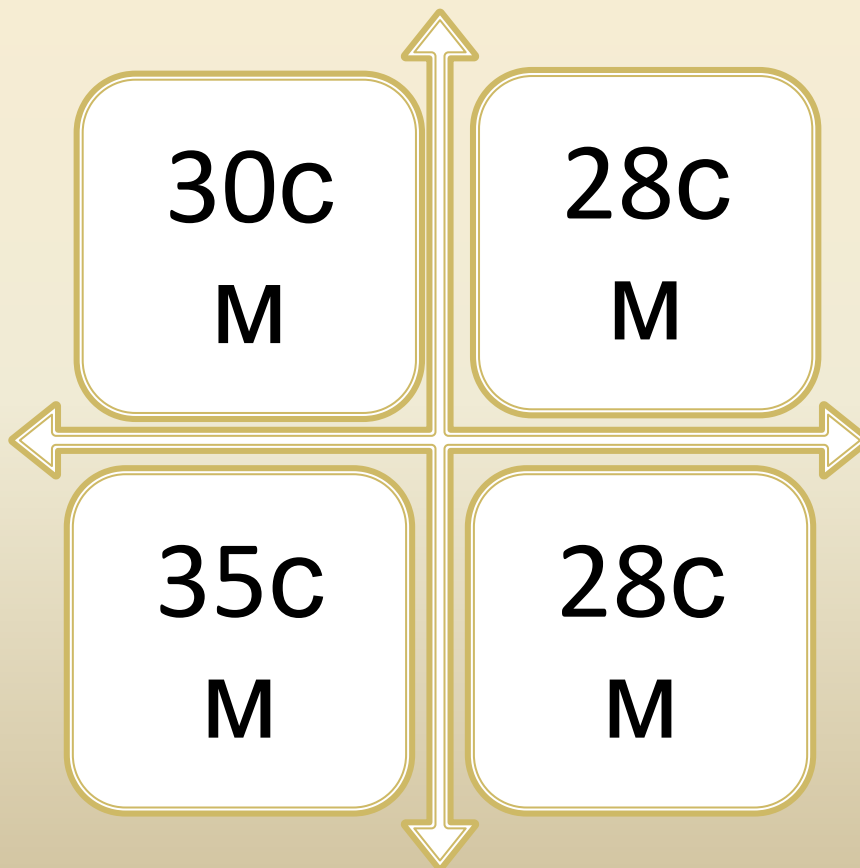


**Неверно!!!**

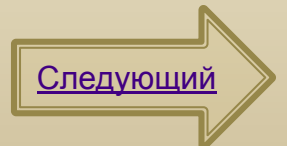


## Вопрос 4.

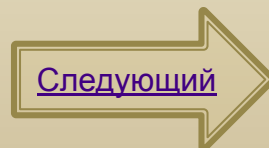
Треугольник  $CDE$  равен треугольнику  $C_1D_1E_1$ . периметр треугольника  $CDE$  равен 76 см. Сторона  $C_1D_1$  в 2,5 раза меньше  $D_1E_1$ , а  $C_1E_1$  на 8 см меньше стороны  $D_1E_1$ .  
Найдите большую сторону треугольника  $CDE$ .



Верно!!!

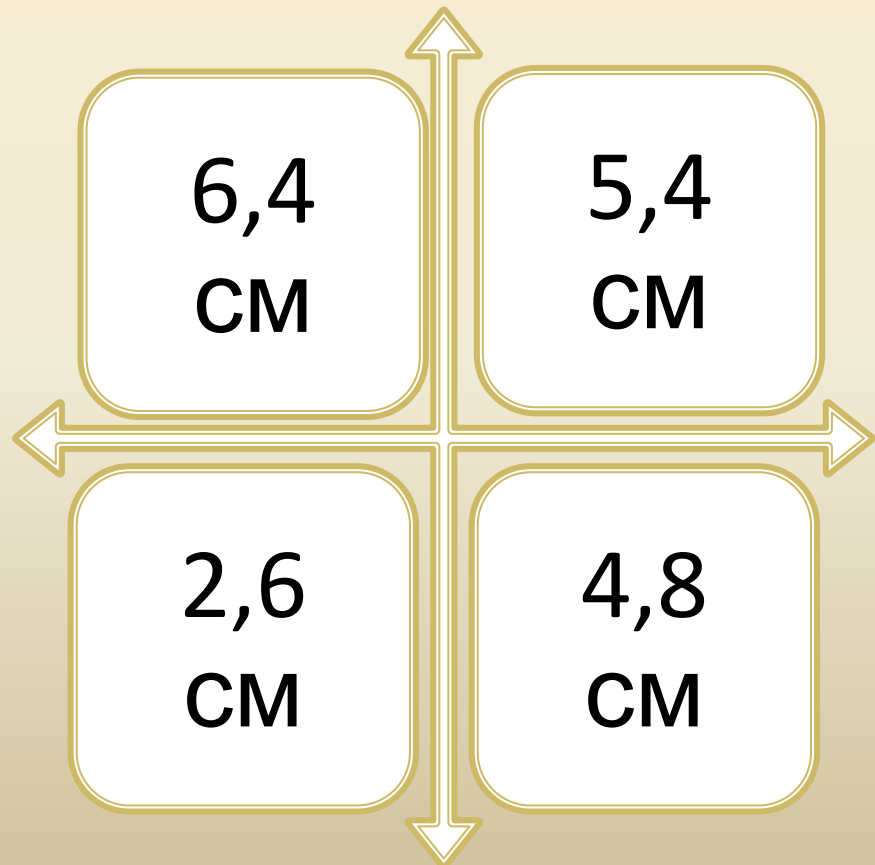


**Неверно!!!**

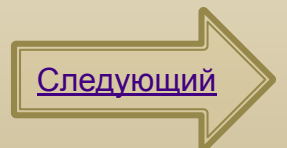


## Вопрос 5.

В треугольниках  $ABC$  и  $KPM$  проведены биссектрисы  $BO$  и  $PE$ , причем  $\triangle ABO = \triangle KPE$ .  
Найдите отрезок  $EM$ , если  $AC = 9$  см, а  $EM > KE$  на 3,8 см.

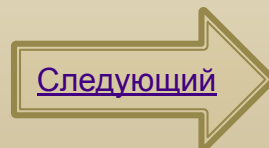


**Верно!!!**





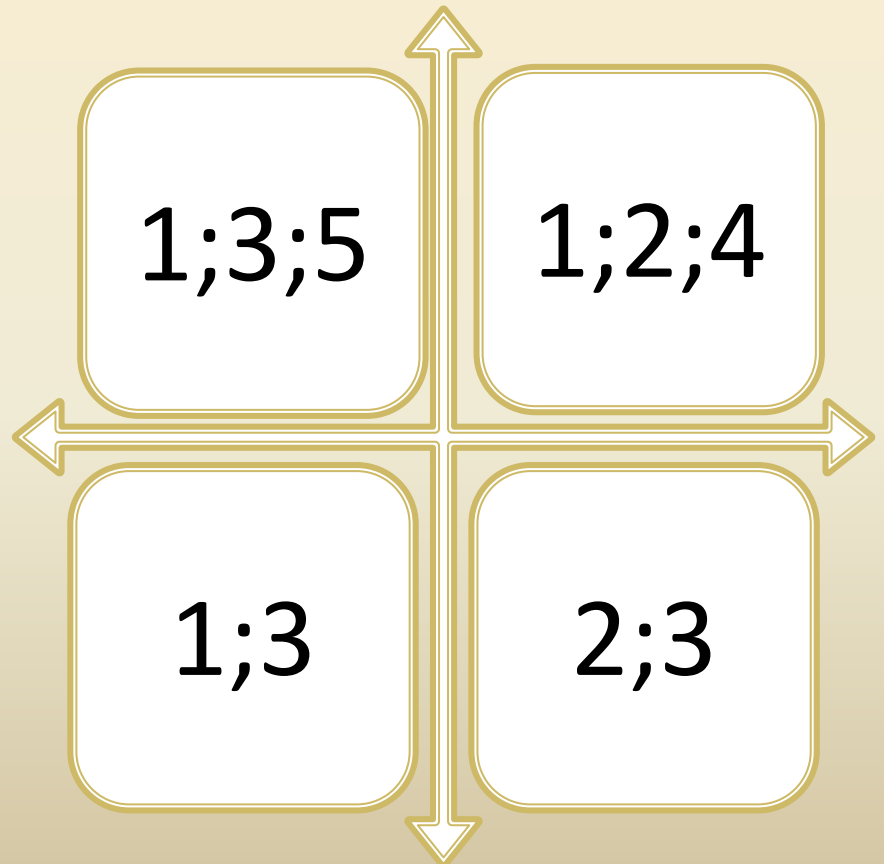
**Неверно!!!**



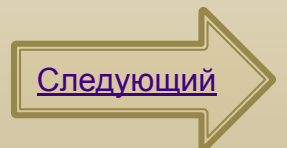
## Вопрос 6.

Прямая МК разбивает плоскость на две полуплоскости. Из точек М и К в разные полуплоскости проведены равные отрезки МА и КВ, причем угол АМК = углу ВКМ. Какие из высказываний верные?

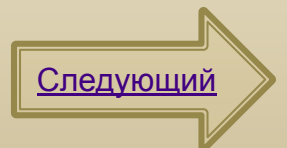
- 1).  $\triangle AMB = \triangle KVB$ ;
- 2). Угол АКМ = углу ВКМ
- 3).  $\triangle MKA = \triangle KMB$ ;
- 4). угол АМВ = углу КВМ



**Верно!!!**

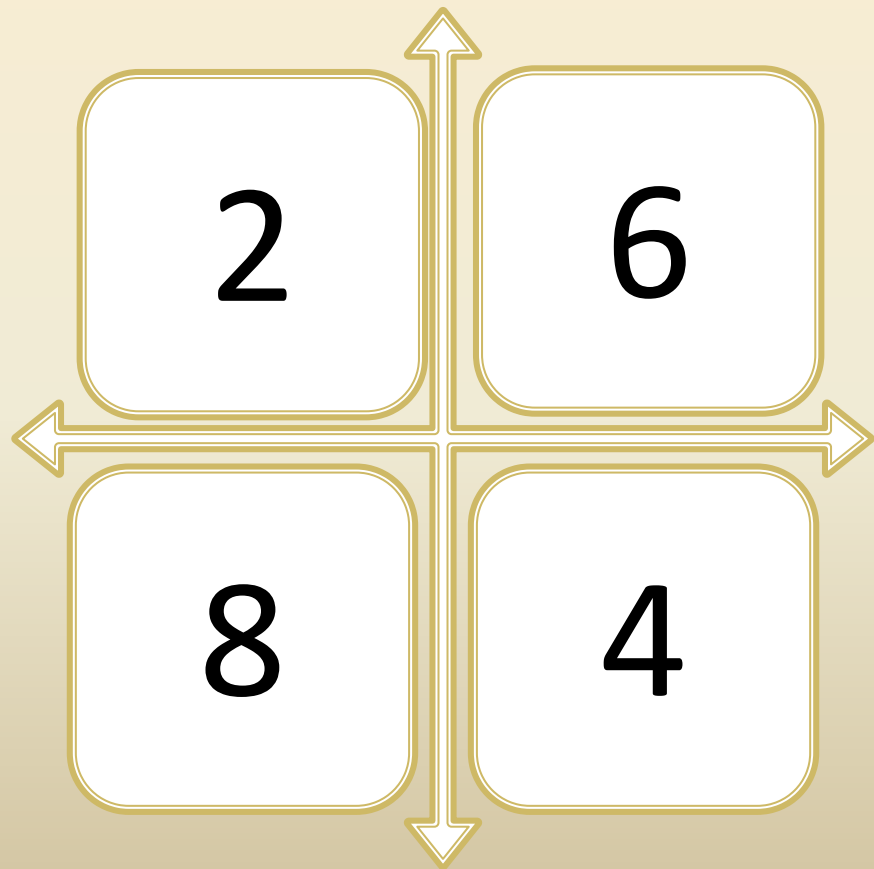
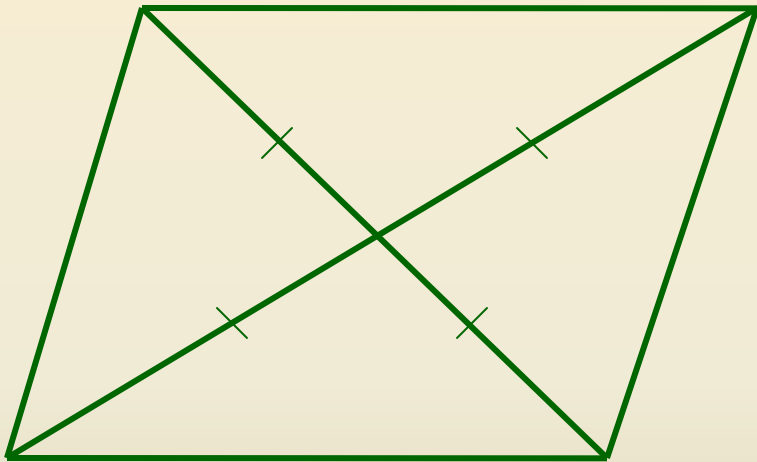


**Неверно!!**

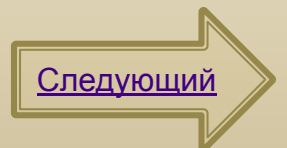


## Вопрос 7.

Сколько пар равных треугольников на рисунке?



**Верно!!!**

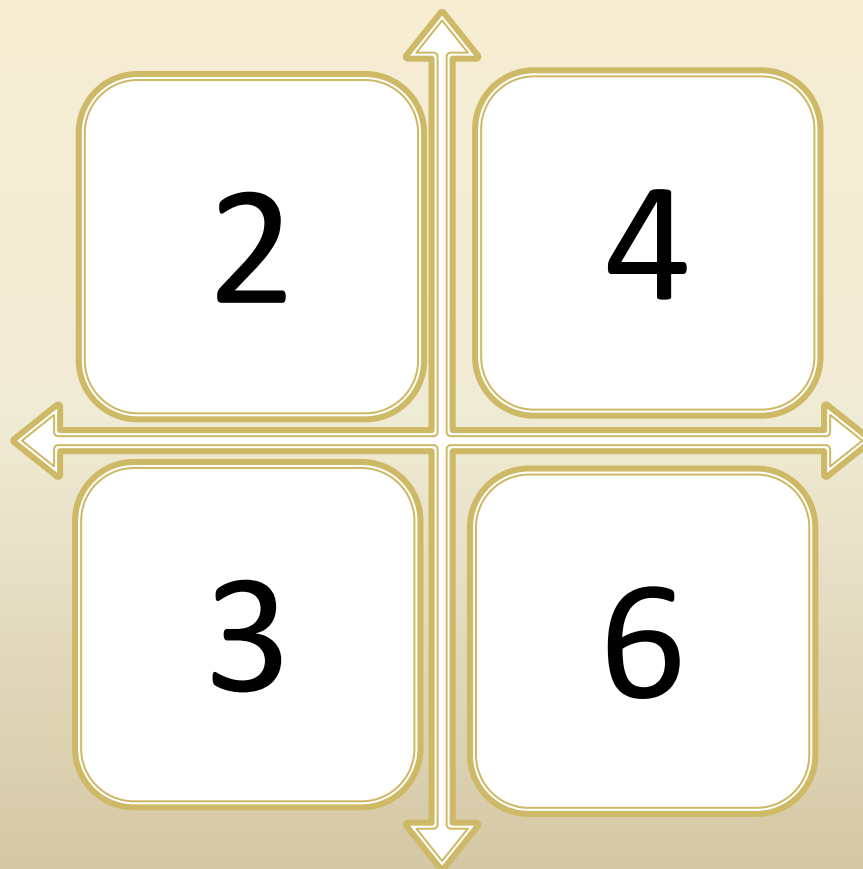


**Неверно!!!**



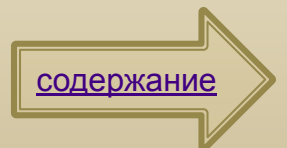
## Вопрос 8.

На какое наибольшее число равных треугольников может разделить треугольник ломаная, состоящая из трех звеньев?





**Верно!!!**



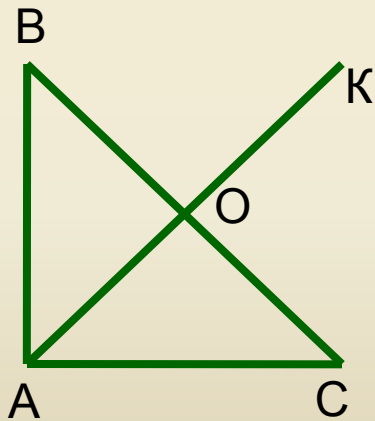
**Неверно!!!**

[Содержани  
е](#)

# Вариант

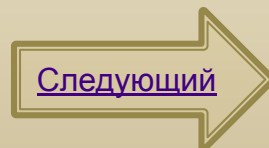
## Вопрос 1. №2.

Известно, что  $AO$  медиана треугольника  $ABC$ ,  $AO=OK$ ,  $AB=6,3\text{см}$ ,  $BC=6,5\text{см}$ ,  $AC=6,7\text{см}$ . Найдите  $CK$ ?

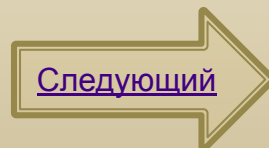


6,4 СМ	6,7 СМ
6,5 СМ	6,3 СМ

**Верно!!!**



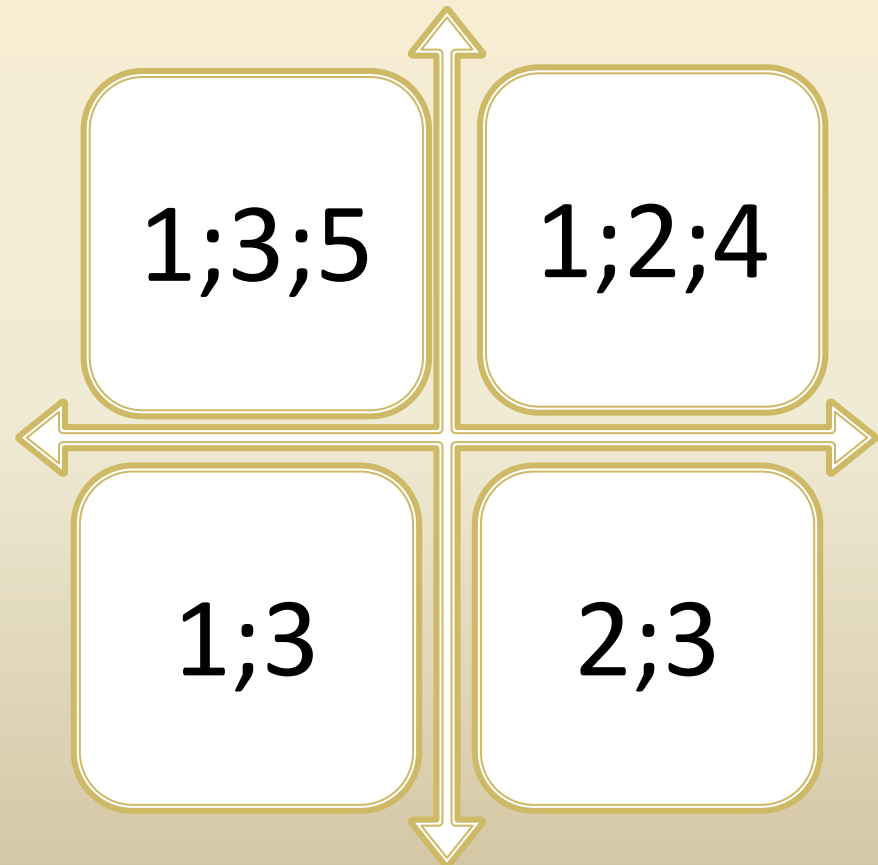
**Неверно!!!**



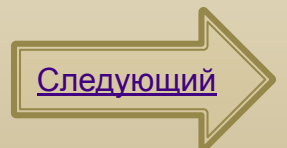
## Вопрос 2.

Прямая МК разбивает плоскость на две полуплоскости. Из точек М и К в разные полуплоскости проведены равные отрезки МА и КВ, причем угол АМК = углу ВКМ. Какие из высказываний верные?

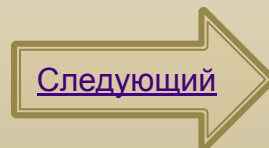
- 1).  $\triangle AMB = \triangle KVB$ ;
- 2). Угол АКМ = углу ВКМ
- 3).  $\triangle MKA = \triangle KMB$ ;
- 4). угол АМВ = углу КВМ



**Верно!!!**



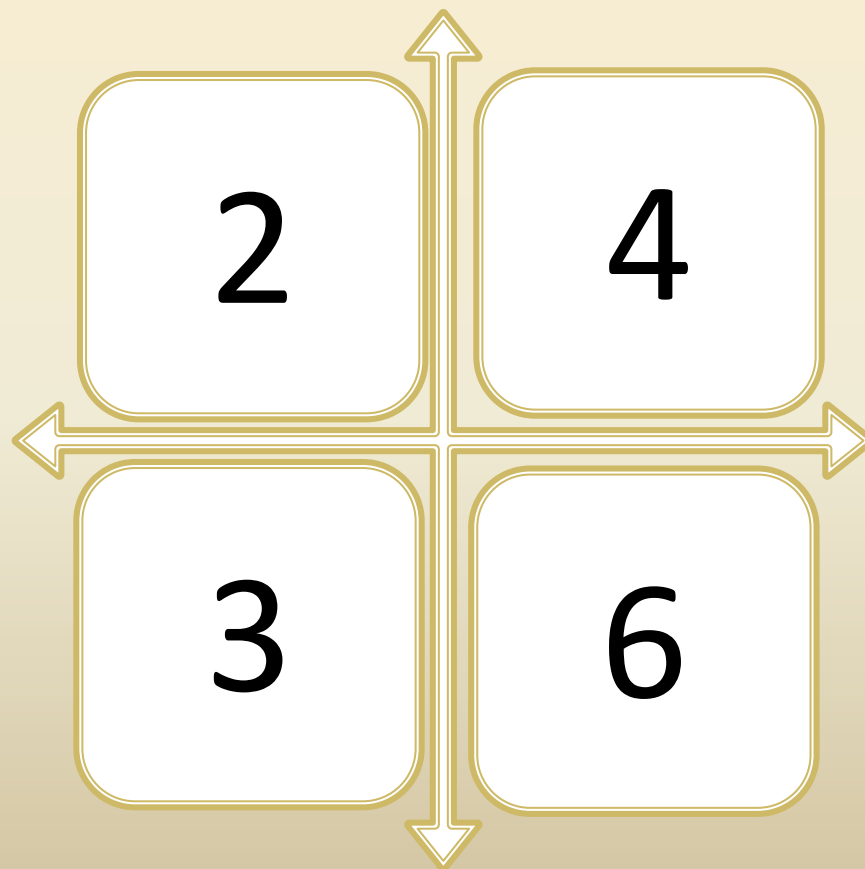
**Неверно!!!**



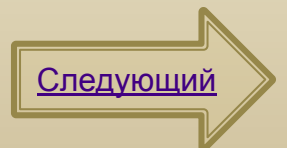


### Вопрос 3.

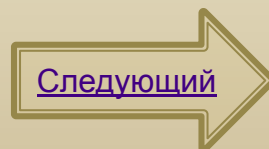
На какое наибольшее число равных треугольников может разделить треугольник ломаная, состоящая из трех звеньев?



**Верно!!!**

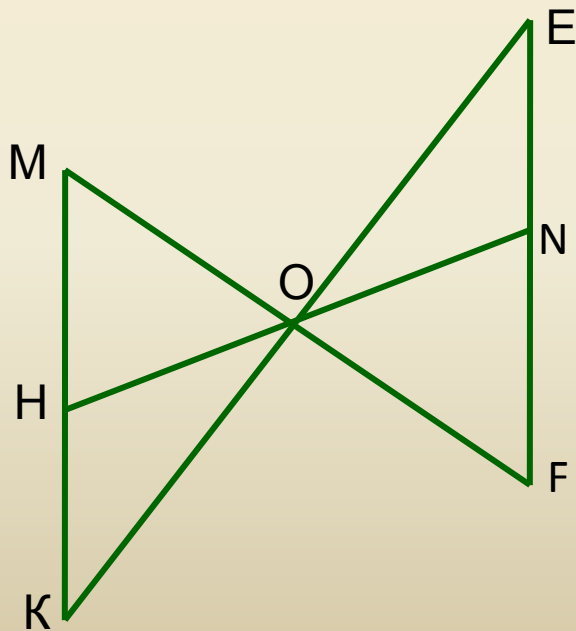


**Неверно!!!**



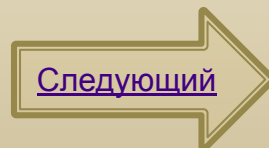
## Вопрос 4.

ОН и ON – высоты углов треугольников МОК и ЕОF, причем  $ОН=ON$ . Найдите длину отрезка МК, если  $EN=7,8$  см,  $OE=8,6$  см,  $HM=6,3$  см.

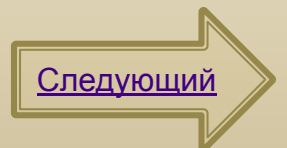


13,9 CM	14,1 CM
14,9 CM	16,4 CM

**Верно!!!**

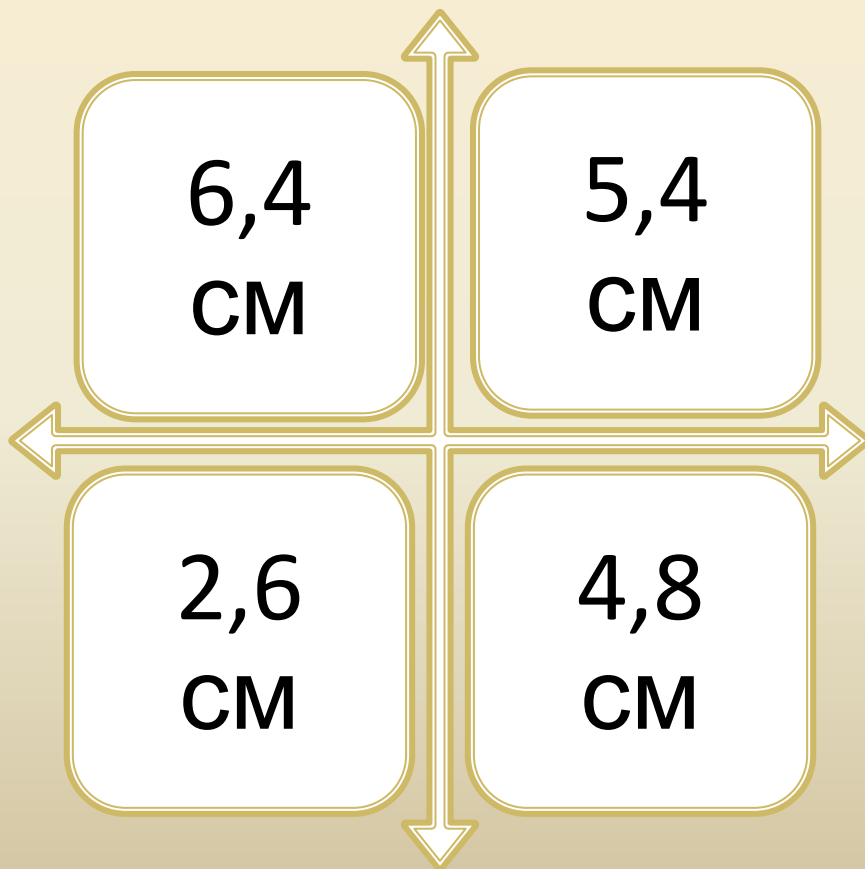


**Неверно!!!**

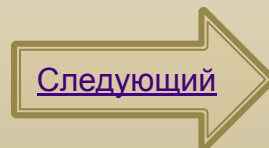


## Вопрос 5.

В треугольниках  $ABC$  и  $KPM$  проведены биссектрисы  $BO$  и  $PE$ , причем  $\triangle ABO = \triangle KPE$ .  
Найдите отрезок  $EM$ , если  $AC = 9$  см, а  $EM > KE$  на 3,8 см.

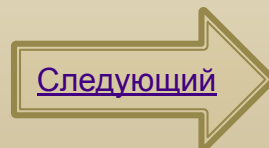


**Верно!!!**



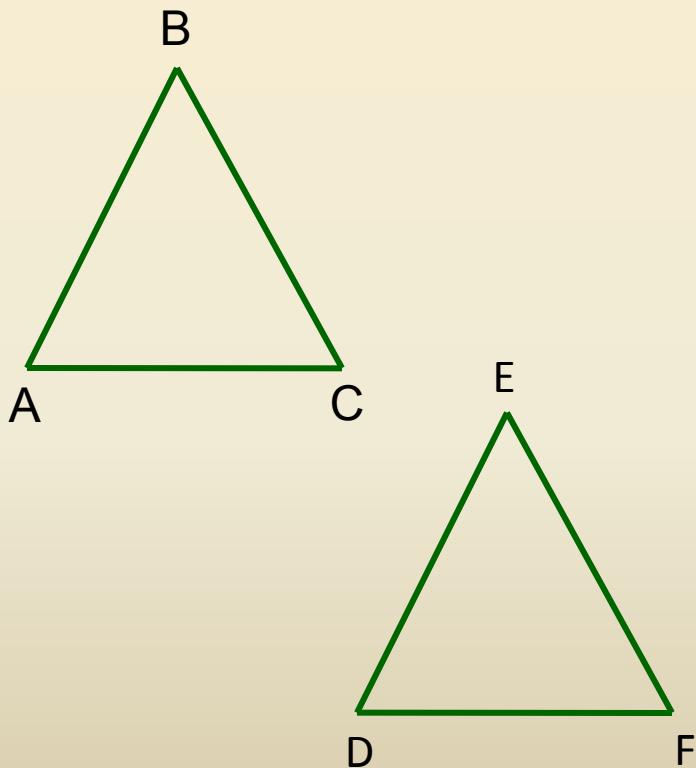


**Неверно!!!**



## Вопрос 6.

$\triangle ABC = \triangle DEF$ , угол  $B = 73^\circ$ ;  $BC = 6,9$  см,  $DF = 7,6$  см. Какое из высказываний верно?



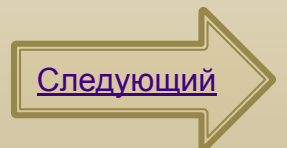
$DE = 6,9$  см;  
 $AC = 7,6$  см

Угол  $E = 73^\circ$ ;  
 $AC = 7,6$   
см

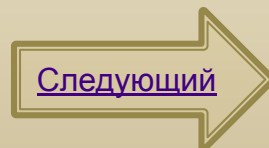
$DF = 6,9$  см;  
Угол  
 $E = 73^\circ$

$AC = 7,6$   
см;  
Угол  
 $D = 73^\circ$

**Верно!!!**

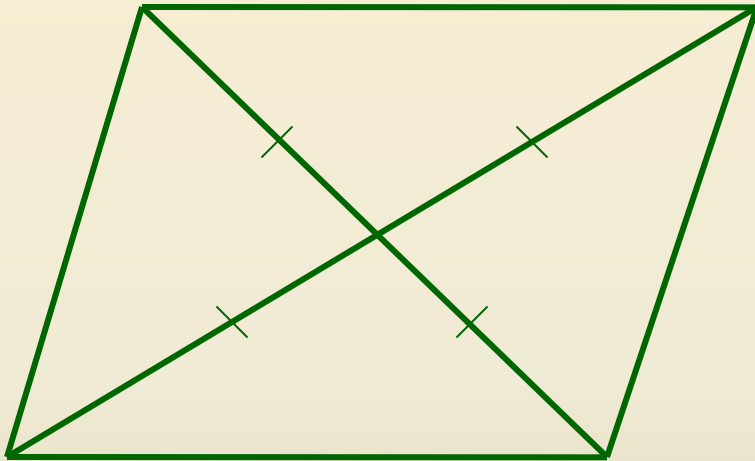


**Неверно!!!**



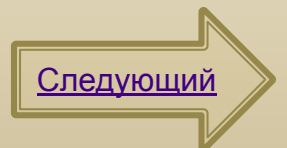
## Вопрос 7.

Сколько пар равных треугольников на рисунке?



- 2
- 6
- 8
- 4

**Верно!!!**



**Неверно!!!**



## Вопрос 8.

Треугольник  $CDE$  равен треугольнику  $C_1D_1E_1$ . периметр треугольника  $CDE$  равен 76 см. Сторона  $C_1D_1$  в 2,5 раза меньше  $D_1E_1$ , а  $C_1E_1$  на 8 см меньше стороны  $D_1E_1$ .  
Найдите большую сторону треугольника  $CDE$ .

- 30см
- 28см
- 35см
- 25см



**Верно!!!**

[Содержани  
е](#)

**Неверно!!!**

[Содержани  
е](#)

**СПАСИБО ЗА  
ВНИМАНИЕ!**

Учитель математики и информатики МБОУ «Гимназия» г. Суворова  
Обрядина Александра Александровна

# Список литературы

- Учебник «Геометрия 7-9 класс»: (авт. Л. С.Атанасян, В. Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др.) – М.: Просвещение, 2009.
- Опорные конспекты учителя.