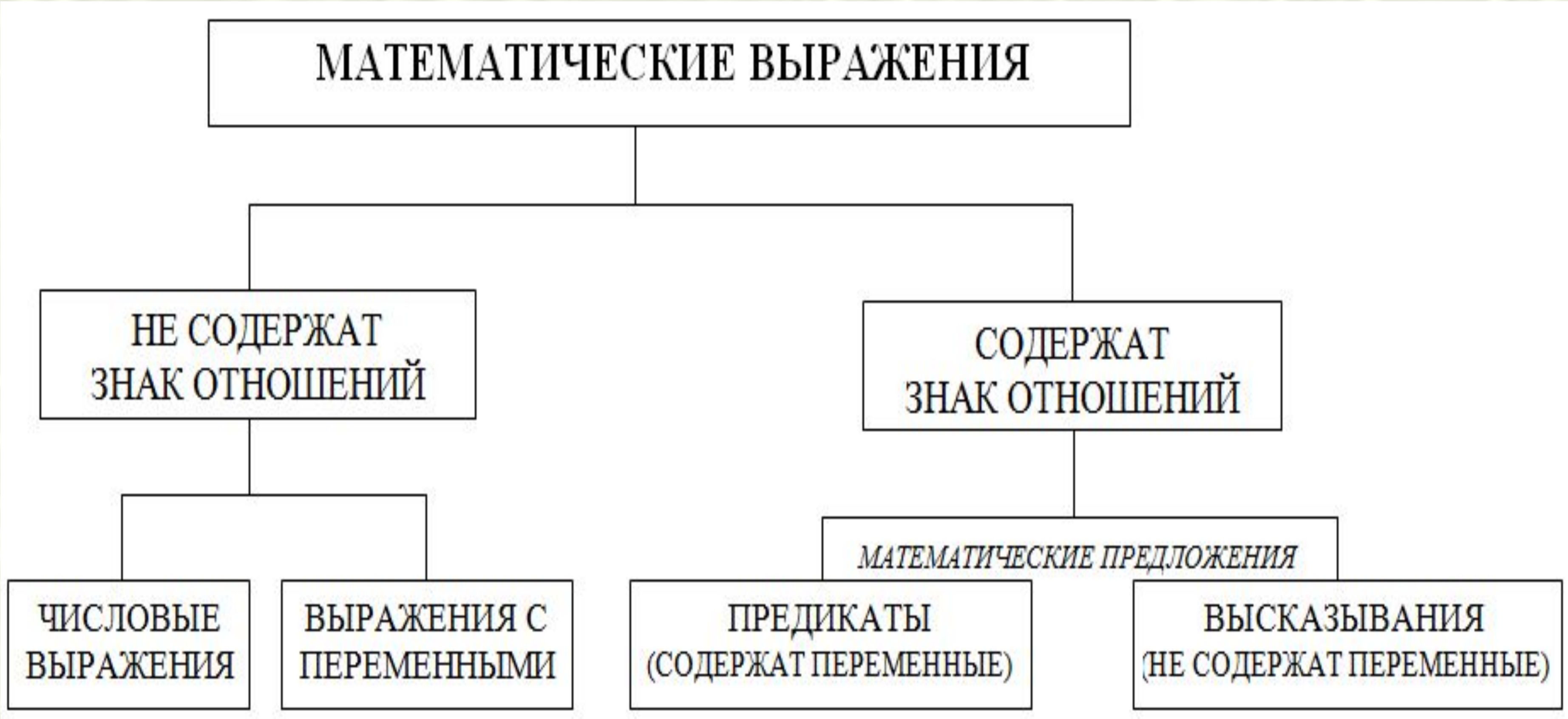
Математические выражения

Классификация математических выражений



Числовые выражения

строятся с помощью цифр, знаков бинарных операций («+», «-», «$\cdot$», «:») и, может быть, скобок по следующим правилам:

- каждое число является числовым выражением;
- если А и В – числовые выражения, то А+В, А-В, А$\cdot$В, А: В тоже являются числовыми выражениями.

Например, $3 + 45$, 56, $\dfrac{12-4}{5}$, $(99-87)\cdot 17$.

Числовые выражения

- Число, получаемое в результате последовательного выполнения всех операций, входящих в числовое выражение, называется его **значением**.

- **Например,** $(99-87) \cdot 17 = 12 \cdot 17 = 204.$

  204 – значение выражения.

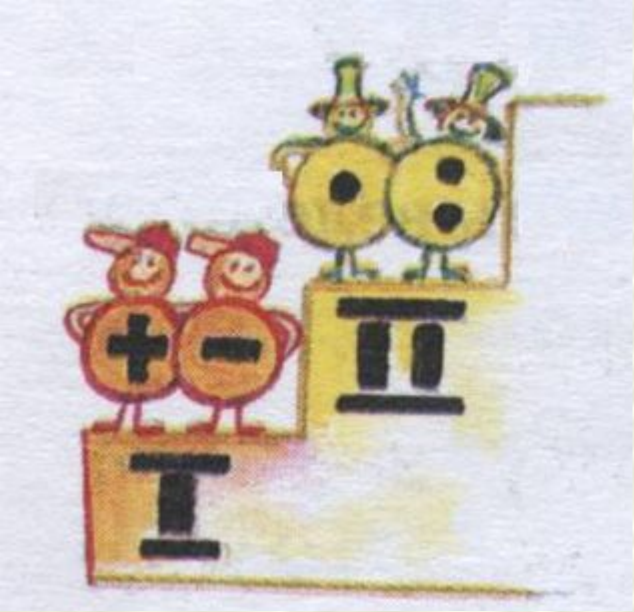
Числовые выражения

Существуют числовые выражения, которые не имеют значения.

О них говорят, что они не имеют смысла.

Например, $\dfrac{12+3}{4-2\cdot 2}, \sqrt{-3}, \log_2(-4).$

Числовые выражения



СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ чисел называют действиями **первой ступени**.

УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ - действия **второй ступени.**

Порядок выполнения действий при нахождении значений выражений определяется правилами.

Числовые выражения

Порядок действий

1. Если в выражении нет скобок и оно содержит действия только одной ступени, то их выполняют по порядку слева направо.
2. Если выражение содержит действия первой и второй ступени и в нем нет скобок, то сначала выполняют действия второй ступени, потом – действия первой ступени.
3. Если в выражении есть скобки, то сначала выполняют действия в скобках (учитывая при этом правила 1 и 2).

Числовые выражения

2 1 5 4 3

(814 + 36 · 27) : (101 – 2052 : 38) = **38**

1) перемножить числа 36 и 27; (972)
2) сложить 814 с результатом действия 1; (1786)
3) разделить 2052 на 38; (54)
4) вычесть из 101 результат действия 3; (47)
5) разделить результат действия 2 на результат действия 4. (38)

Чтение числовых выражений

Начинается с результата последней операции.

Примеры:

$(20 \overset{1}{–} 10) \overset{2}{:} 5$ - частное разности чисел 20 и 10 и числа 5.

$20 \overset{2}{–} 10 \overset{1}{:} 5$ - разность числа 20 и частного чисел 10 и 5.

$20 \overset{1}{:} 10 \overset{2}{–} 5$ - разность частного чисел 20 и 10 и числа 5.

Выражения с переменной

строятся с помощью букв, цифр, знаков бинарных операций и, может быть, скобок по следующим правилам:

- **каждая буква является выражением с переменной;**
- **если A(x) и B(x) – выражения с переменной, то A(x)+B(x), A(x)-B(x), $A(x)\cdot B(x)$, A(x):B(x) тоже являются выражениями с переменной.**

Например, 2+x, x^2, (2x -5):45, $\sqrt{x-3}$.

Выражения с переменной

- **Если в выражение с переменной подставить вместо переменной конкретное число, то получится числовое выражение.
  Можно найти его значение.**

Например, подставим в выражение 2+x вместо переменной x число 3. Получится числовое выражение 2+3. Можно найти его значение: 2+3=5.

Число 5 - значение выражения 2+x при x=3.

Выражения с переменной

- **Областью определения выражения с переменной называется множество таких чисел, при подстановке которых вместо переменной данное выражение обращается в числовое выражение, имеющее смысл.**

Например, выражение с переменной $\sqrt{x-3}$ определено (имеет смысл) на множестве $[3; +\infty)$ и не имеет смысла на множестве $(-\infty; 3)$.

Числовые равенства

Это высказывания вида A=B, где A и B – числовые выражения.

Так как числовые равенства – это высказывания, они бывают истинными (верными) и ложными (неверными).

Например, $2 = 4 - 2$, $\frac{15:3}{2-1} = 5$ **– верные числовые равенства;**
$9 = 8$, $(45-34) \cdot 4 = 19$ **– неверные числовые равенства.**

Свойства числовых равенств

- Если к обеим частям верного числового равенства прибавить (или вычесть из них) одно и то же число, то получится верное числовое равенство.

$$a=b \Rightarrow a + c = b + c$$

$$a=b \Rightarrow a - c = b - c$$

- Если обе части верного числового равенства умножить или разделить на одно и тоже число, отличное от нуля, то получится верное числовое равенство.

$$(a=b \wedge c\neq 0) \Rightarrow (a \cdot c = b \cdot c)$$

$$(a=b \wedge c\neq 0) \Rightarrow (a : c = b : c)$$

Числовые неравенства

Это высказывания вида $A<B$, $A>B$, $A\leq B$, $A\geq B$, где А и В – числовые выражения.

Так как числовые неравенства – это высказывания, они бывают истинными (верными) и ложными (неверными).

Например, $3 < 23+ 4$, $9>4$ – верные числовые неравенства;

$67<1$, $45+(67+34)>1000$ - неверные числовые неравенства.

Свойства числовых неравенств

- Если к обеим частям верного числового неравенства прибавить одно и то же число, то получится верное числовое неравенство.

  $a>b \Rightarrow a + c > b + c$

- Если из обеих частей верного числового неравенства вычесть одно и то же число, то получится верное числовое неравенство.

  $a>b \Rightarrow a – c > b - c$.

Свойства числовых неравенств

- Если обе части верного числового неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится верное числовое неравенство.

  $(a>b \wedge m>0) \Rightarrow (am > bm)$
  $(a>b \wedge m>0) \Rightarrow (a:m > b:m)$

- Если обе части верного числового неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число и изменить знак неравенства на противоположный, то получится верное числовое неравенство.

  $(a>b \wedge m<0) \Rightarrow (am < bm)$
  $(a>b \wedge m<0) \Rightarrow (a:m < b:m)$

Уравнения

Уравнением с переменной x на множестве M называется равенство вида A(x)=B(x) либо A(x) = b,
где A(x) и B(x) – выражения с переменной x, определенные на множестве M, b – некоторое число.

Множество M называют областью **определения уравнения** (его задают вместе с уравнением либо отыскивают).

Например, $6x + 45 = 23$, $34x + 5 = 2 - 4x$ – уравнения.

Уравнения

Решить уравнение - значит найти множество значений переменной x, при подстановке которых в уравнение, оно обращается в верное числовое равенство.

Каждое решение уравнения называют **корнем** уравнения.

Например, решим уравнение (2-x)(x+6) = 0, определенное на множестве R.

Множество его решений - {2; -6}.

2 и -6 – корни данного уравнения на множестве R.

Неравенства

Неравенством с переменной x на множестве М называется неравенство вида $A(x)<B(x)$, $A(x)>B(x)$, $A(x)<b$, $A(x)>b$,
где $A(x)$ и $B(x)$ – выражения с переменной x, определенные на множестве М, b – некоторое число.

Множество М называют **областью определения** неравенства (его задают вместе с неравенством либо отыскивают).

Например, $45 - 5x < 60$, $5+2x > 4x-23$ – неравенства.

Неравенства

Решить неравенство - значит найти множество значений переменной х, при подстановке которых в неравенство, оно обращается в верное числовое неравенство.

Например, решим неравенство $2x+6>0$, определенное на множестве R.

Множество его решений – $(-3; +\infty)$.

Равносильные уравнения (неравенства)

Уравнения (неравенства), определенные на множестве М, называются **равносильными** на этом множестве тогда и только тогда, когда множества их решений, принадлежащих данному множеству, совпадают.

$$A(x)=B(x) \equiv C(x)=D(x)$$

$$A(x)>B(x) \equiv C(x)>D(x)$$

Равносильные уравнения (неравенства)

Уравнения (неравенства), определенные на множестве М, называются **равносильными** на этом множестве тогда и только тогда, когда множества их решений, принадлежащих данному множеству, совпадают.

$$A(x)=B(x) \equiv C(x)=D(x)$$

$$A(x)>B(x) \equiv C(x)>D(x)$$

Равносильные уравнения (неравенства)

Рассмотрим уравнения $x – 2 = 0$ и $(2x - 4)(x + 3) = 0$, определенные на множестве M. Установим, являются ли эти уравнения равносильными, если:

а) M = N.

$x – 2 = 0$ $(2x - 4)(x + 3) = 0$

$x \in \{2\}$ $x \in \{2\}$

Значит, $x – 2 = 0 \equiv (2x - 4)(x + 3) = 0$ на множестве N.

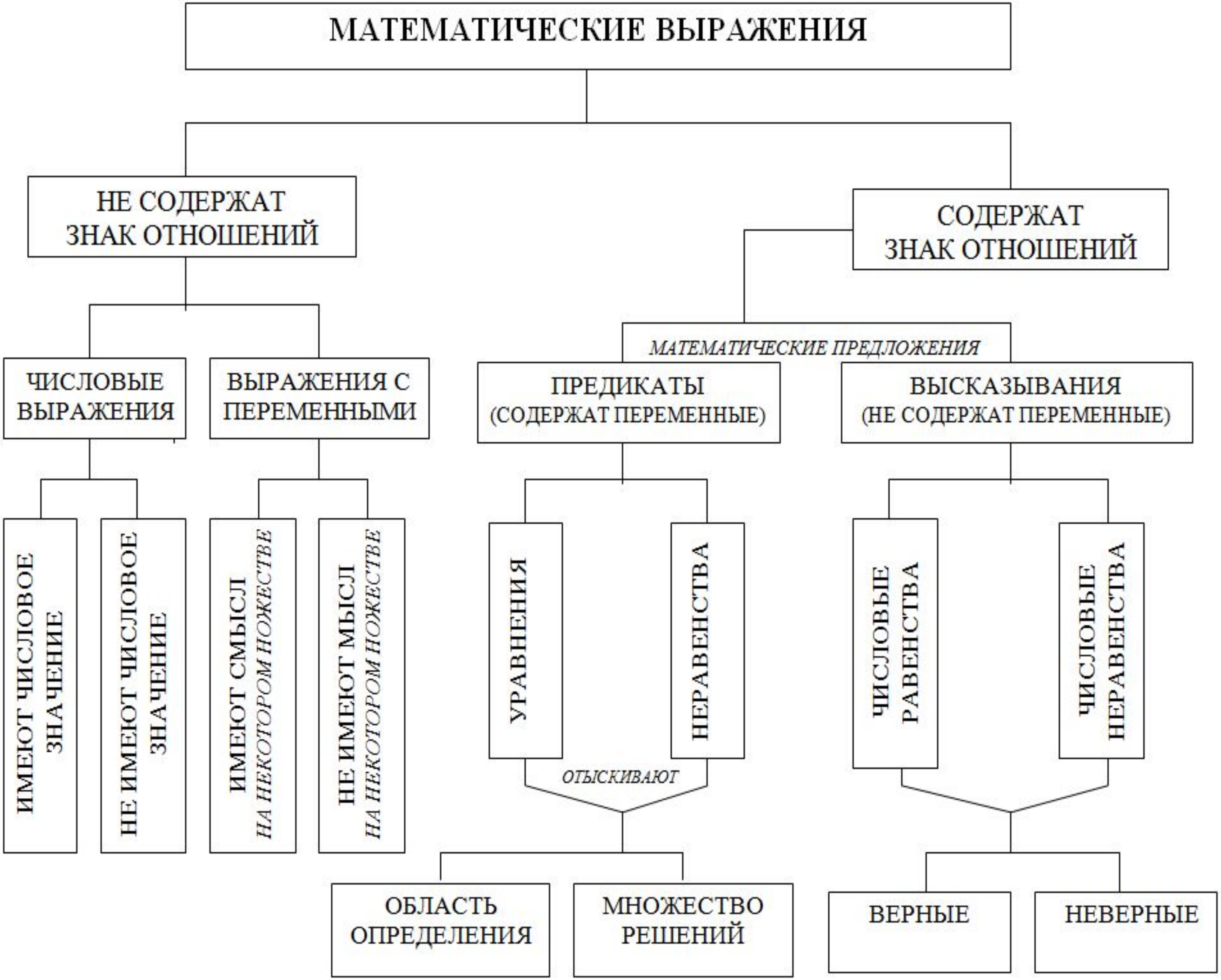
б) M = R.

$x – 2 = 0$ $(2x - 4)(x + 3) = 0$

$x \in \{2\}$ $x \in \{2; -3\}$

Значит, $x – 2 = 0 \not\equiv (2x - 4)(x + 3) = 0$ на множестве R.

Таким образом, одни и те же уравнения могут быть равносильными на каком-то множестве и неравносильными на другом множестве.


МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ
НЕ СОДЕРЖАТ ЗНАК ОТНОШЕНИЙ
СОДЕРЖАТ ЗНАК ОТНОШЕНИЙ
ЧИСЛОВЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ
ВЫРАЖЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ
ПРЕДИКАТЫ (СОДЕРЖАТ ПЕРЕМЕННЫЕ)
ВЫСКАЗЫВАНИЯ (НЕ СОДЕРЖАТ ПЕРЕМЕННЫЕ)
ИМЕЮТ ЧИСЛОВОЕ ЗНАЧЕНИЕ
НЕ ИМЕЮТ ЧИСЛОВОЕ ЗНАЧЕНИЕ
ИМЕЮТ СМЫСЛ НА НЕКОТОРОМ НОЖЕСТВЕ
НЕ ИМЕЮТ МЫСЛ НА НЕКОТОРОМ НОЖЕСТВЕ
УРАВНЕНИЯ
НЕРАВЕНСТВА
ОТЫСКИВАЮТ
ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ
МНОЖЕСТВО РЕШЕНИЙ
ЧИСЛОВЫЕ РАВЕНСТВА
ЧИСЛОВЫЕ НЕРАВЕНСТВА
ВЕРНЫЕ
НЕВЕРНЫЕ