

Физика. Математика.

Лекция 2

Лектор: Загитов Г.Н.

Применение дифференциала для приближенных вычислений.

Из определения производной функции: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$

Можно записать: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$,

или $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$.

Величина $\alpha \Delta x$ - бесконечно малая более высокого порядка, чем $f'(x) \Delta x$, т.е. $f'(x) \Delta x$ -главная часть приращения y . Отбрасывая вторую часть в этой формуле, можем написать:

$\Delta y = f'(x) \Delta x$ или $f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x) \Delta x$;

отсюда можем вычислить значение функции в точке $x + \Delta x$: $f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x) \Delta x$; если $f(x)$ и $f'(x)$ можно легко вычислить в точке x .

Пример: вычислить без таблицы

$$\sin 29^\circ$$

- $\sin 29^\circ \approx \sin(30^\circ - 1^\circ)$, поэтому примем $x=30^\circ$, а $\Delta x = -1^\circ$.
- $\sin 29^\circ \approx \sin 30^\circ + \cos 30^\circ (-0,017) = 0,485$.
- $1^\circ \approx 3,14/180 = 0,017$
- $\sin' x = \cos x$
- Вычислите без таблицы $\lg 101$.

Частные производные функций

Допустим дана функция от двух переменных $z=f(x,y)$.

Считая y постоянной величиной найдем частное производное по x :

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x};$$
 и считая x

постоянной-частное производное по y :

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Частные и полный дифференциал функции

Находим частные дифференциалы функции по переменным x и y :

$$dz_x = z'_x dx = \frac{\partial z}{\partial x} dx; dz_y = z'_y dy = \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Сумма частных дифференциалов называется полным дифференциалом.

$$dz(x, y) = dz_x + dz_y = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Задача: найдите абсолютную погрешность в определении объема цилиндра, если при измерениях были получены радиуса $r = (6 \pm 0,1)$ см и высоты $h = (10 \pm 0,2)$ см.

Решение: Объем цилиндра: $V = \pi r^2 h$.

Принимая за погрешность дифференциал функции получаем:

$$\Delta V = dV = V'_r dr + V'_h dh = 2\pi r h \Delta r + \pi r^2 \Delta h = \pi r (2h \Delta r + r \Delta h) = 3,14 \times 6 (2 \times 10 \times 0,1 + 6 \times 0,2) = 603 \text{ см}^3.$$

Интегральное исчисление.

Первообразная функция.

Функция $F(x)$ называется первообразной функцией функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если в любой точке этого отрезка верно равенство:

$$F'(x) = f(x).$$

Надо отметить, что первообразных для одной и той же функции может быть бесконечно много. Они будут отличаться друг от друга на некоторое постоянное число.

$$F_1(x) = F_2(x) + C.$$

Неопределенный интеграл.

Определение: Неопределенным интегралом функции $f(x)$ называется совокупность первообразных функций, которые определены соотношением:

$$F(x) + C.$$

Записывают: $\int f(x)dx = F(x) + C;$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int \cos x dx = \text{Sin}x + C$$

$$\int \sin x dx = -\text{Cos}x + C$$

$$\int \text{tg}x dx = -\ln|\cos x| + C ;$$

$$\int \text{ctg}x dx = \ln|\sin x| + C ;$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \text{tg}x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\text{ctg}x + c$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arctg}x + C$$

Свойства:

$$1. \left(\int f(x) dx \right)' = (F(x) + C)' = f(x);$$

$$2. d \left(\int f(x) dx \right) = f(x) dx;$$

$$3. \int dF(x) = F(x) + C;$$

$$4. \int (u + v - w) dx = \int u dx + \int v dx - \int w dx;$$

где u, v, w – некоторые функции от x .

$$5. \int C \cdot f(x) dx = C \cdot \int f(x) dx;$$

Пример:

$$\int (x^2 - 2\sin x + 1) dx = \int x^2 dx - 2 \int \sin x dx + \int dx = \frac{1}{3} x^3 + 2 \cos x + x + C$$

Методы интегрирования

А) Непосредственное интегрирование.

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int \left(\frac{5}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2x} + \cos x \right) dx = \int \frac{5}{\sqrt{x}} dx - \int \frac{1}{2x} dx + \int \cos x dx = 5 \int \frac{dx}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x} + \int \cos x dx =$$

$$= 5 \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} - \frac{1}{2} \ln|x| + \sin x + C = 10\sqrt{x} - \frac{1}{2} \ln|x| + \sin x + C .$$

Б) Способ подстановки (замены переменных).

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

Пример. Найти неопределенный интеграл $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx$.

Сделаем замену $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$.

$$\int \sqrt{t} dt = \int t^{1/2} dt = \frac{2}{3} t^{3/2} + C = \frac{2}{3} \sin^{3/2} x + C.$$

В) Интегрирование по частям.

Способ основан на известной формуле производной произведения:

$$(uv)' = u'v + v'u$$

где u и v – некоторые функции от x .

В дифференциальной форме: $d(uv) = u dv + v du$

Проинтегрировав, получаем: $\int d(uv) = \int u dv + \int v du$, а в соответствии с приведенными

выше свойствами неопределенного интеграла:

$$uv = \int u dv + \int v du \quad \text{или} \quad \int u dv = uv - \int v du ;$$

Пример.

$$\int e^{2x} \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = e^{2x}; \quad du = 2e^{2x} dx; \\ dv = \cos x dx; \quad v = \sin x \end{array} \right\} = e^{2x} \sin x - \int \sin x \cdot 2e^{2x} dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u = e^{2x}; \quad du = 2e^{2x} dx; \\ dv = \sin x dx; \quad v = -\cos x; \end{array} \right\} = e^{2x} \sin x - 2 \left[-e^{2x} \cos x - \int -\cos x \cdot 2e^{2x} dx \right] = e^{2x} \sin x +$$

$$+ 2e^{2x} \cos x - 4 \int \cos x e^{2x} dx$$

Видно, что в результате повторного применения интегрирования по частям функцию не удалось упростить к табличному виду. Однако, последний полученный интеграл ничем не отличается от исходного. Поэтому перенесем его в левую часть равенства.

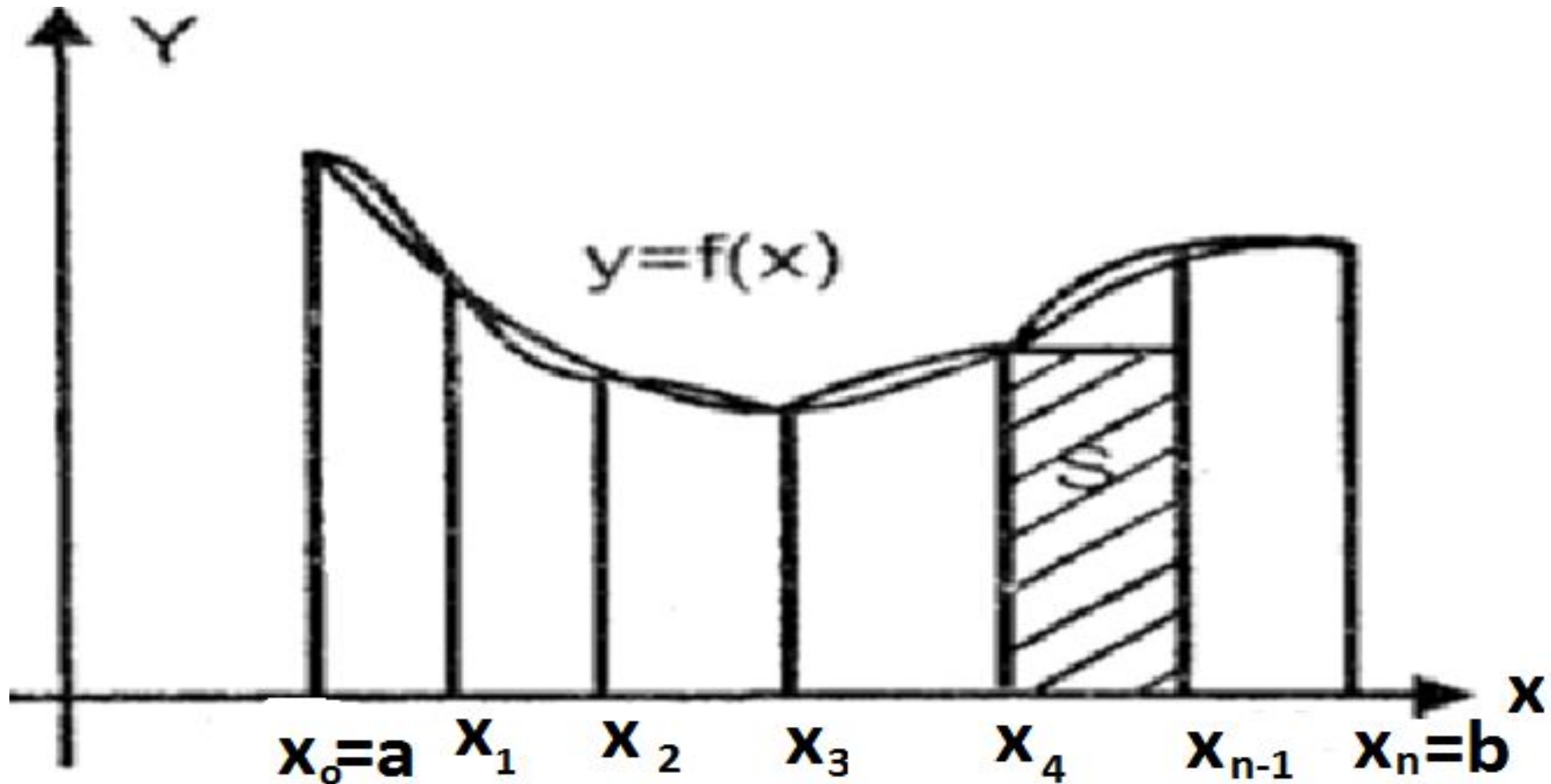
$$\int e^{2x} \cos x dx = \frac{e^{2x}}{5} (\sin x + 2 \cos x) + C.$$

Пример. $\int x^2 \sin x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x^2; \quad dv = \sin x dx; \\ du = 2x dx; \quad v = -\cos x \end{array} \right\} = -x^2 \cos x + \int \cos x \cdot 2x dx =$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u = x; \quad dv = \cos x dx; \\ du = dx; \quad v = \sin x \end{array} \right\} = -x^2 \cos x + 2 \left[x \sin x - \int \sin x dx \right] = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.$$

Определенный интеграл

- Пусть на отрезке $[ab]$ задана непрерывная функция $y=f(x)$



Внутри каждого отрезка выберем некоторую точку ε .

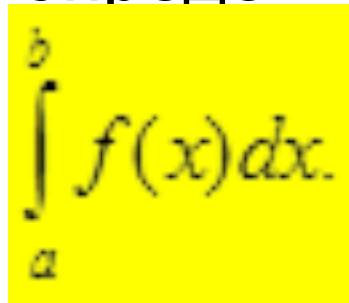
$$x_0 < \varepsilon_1 < x_1, \quad x_1 < \varepsilon_2 < x_2, \quad \dots, \quad x_{n-1} < \varepsilon_n < x_n.$$

Найдем значения функции в этих точках и составим выражение, которое называется **интегральной суммой** для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

$$S_n = f(\varepsilon_1)\Delta x_1 + f(\varepsilon_2)\Delta x_2 + \dots + f(\varepsilon_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i)\Delta x_i$$

Определение: Если при любых разбиениях отрезка $[a, b]$ таких, что $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ и произвольном выборе точек ε_i интегральная сумма $S_n = \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i)\Delta x_i$ стремится к пределу S , который называется опреде-

ленным интегралом от $f(x)$ на отрезке $[a, b]$:


$$\int_a^b f(x) dx$$

Свойства определенного интеграла.

$$1. \int_a^b Af(x)dx = A \int_a^b f(x)dx;$$

$$2. \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$3. \int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$$

4. Если $f(x) \leq \phi(x)$ на отрезке $[a, b]$ $a < b$, то

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \phi(x)dx$$

5. Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, то:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

6. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке существует точка ξ такая, что

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

$$7. \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

8. Для произвольных чисел a , b , c справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Теорема: (Теорема Ньютона – Лейбница) Если функция $F(x)$ – какая-либо первообразная от непрерывной функции $f(x)$, то

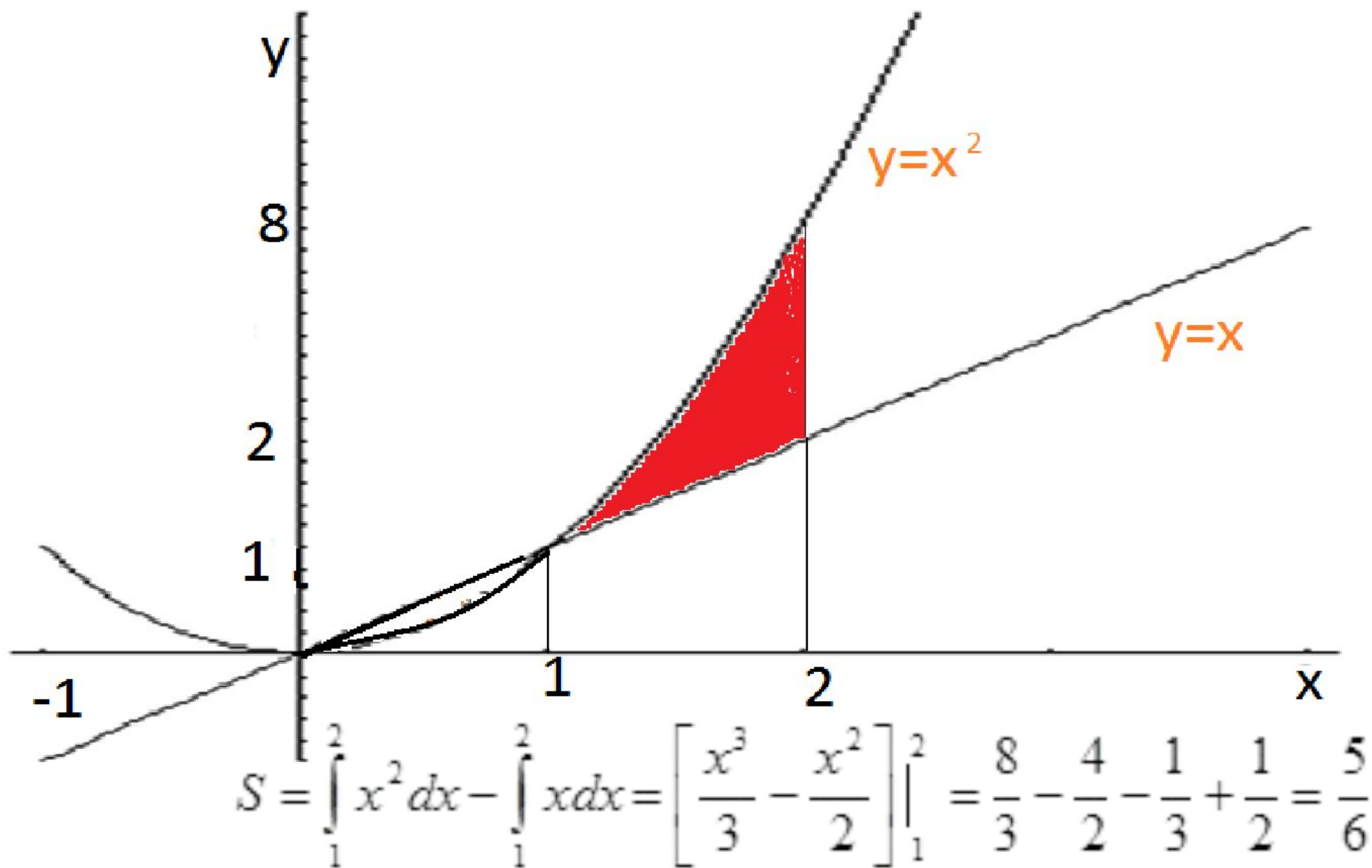
$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$$

Пример

∴

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} x = \sin t; \\ \alpha = 0; \beta = \pi/2 \end{array} \right\} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt =$$
$$= \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \sin \pi = \frac{\pi}{4}.$$

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x$, $y = x^2$, $x = 2$.



ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Обыкновенным дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную (аргумент) x , искомую функцию $y = f(x)$ и ее производные различных порядков y' , y'' , ..., $y^{(n)}$:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в это уравнение.

Например, дифференциальные уравнения

$$y' - 3xy^2 + 4 = 0$$

$$t^2 \frac{ds}{dt} = 2ts - 3$$

Решением дифференциального уравнения называется такая функция $y = y(x)$, которая при подстановке в это уравнение обращает его в тождество.

Например, функция $y = x^2 + Cx$, где C – любая постоянная величина, является решением дифференциального уравнения $y'x - x^2 - y = 0$. Заметим, что данное дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений, так как C – произвольная постоянная величина.

Процесс нахождения решения называется интегрированием дифференциального уравнения.

Общим решением дифференциального уравнения n -го порядка называется функция $y=f(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, зависящая от x и n произвольных независимых постоянных, обращающая это уравнение в тождество при любых значениях постоянных C_1, C_2, \dots, C_n .

Частным решением дифференциального уравнения n -ого порядка называется решение $y=f(x, C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0)$, где $C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0$ - фиксированные числа, которое получается из общего, если придать определенные значения произвольным постоянным C_1, C_2, \dots, C_n .