

**Государственное учреждение высшего
профессионального образования**
«Белорусско-Российский университет»

Математическая логика и теория алгоритмов

Предикаты и формулы. Интерпретации. Истинность и выполнимость формул. Нормальные формы.

Лекция № 3-4

Ст.преподаватель Беккер И.А.

Могилев 2013

Группа АСОИР-111

Логика предикатов

Алгебра логики, рассматривая простые высказывания как целые, неделимые, **без учета их внутренней структуры**, оказывается недостаточной в анализе многих рассуждений.

Есть необходимость в расширении логики высказываний, в построении такой логической системы, средствами которой можно было бы исследовать и структуру тех высказываний, которые в рамках логики высказываний рассматриваются как элементарные.

Такой логической системой является **логика предикатов**, **содержащая всю логику высказываний в качестве своей части.**

Логика предикатов расчленяет элементарное высказывание на **субъект** (буквально — подлежащее, хотя оно и может играть роль дополнения) и **предикат** (буквально - сказуемое, хотя оно может играть и роль определения).

Субъект — это то, о чем что-то утверждается в высказывании; **предикат** - это то, что утверждается о субъекте (его свойство; отношение к другому субъекту; действие).

Математика

Субъект

–

точная наука.

Предикат

В логике предикатов, как и в логике высказываний, высказывания также имеют значение или «Истину» или «Ложь». Разница в том, что в логике предикатов истинностное значение предиката ставится как функция в соответствие определенному предмету или группе предметов!

Пример

Рассмотрим высказывание « **x - простое число**».

При одних значениях x (3; 29) эта форма дает истинные высказывания, а при других значениях x (9; 12; 28) эта форма дает ложные высказывания.

Исходное высказывание определяет функцию одной переменной x , **определенной на множестве N** , и принимающую значения из множества $\{1; 0\}$.

Здесь предикат выражает свойство субъекта и является **функцией** субъекта.

Понятие предиката

Определение. Одноместным предикатом $P(x)$ называется произвольная функция переменного x , определенная на множестве M и **принимая значения из множества $\{1; 0\}$** .

Множество M , на котором определен предикат $P(x)$, называется областью определения предиката.

Определение. Множество всех элементов $x \in M$, при которых предикат принимает значение «ИСТИНА», называется множеством истинности предиката $P(x)$, то есть **множество истинности предиката $P(x)$** - это множество $I_p = \{x \mid x \in M, P(x) = 1\}$.

Так, **предикат $P(x) = \langle x - \text{простое число} \rangle$** **определен на множестве N** , а его множество I_p - есть множество всех простых чисел.

Матрица предикатов

Предикат $P(x) = "x - \text{простое число}"$ можно задать таблицей, которую называют матрицей предиката или таблицей истинности предиката.

Предикат называется **тождественно истинным**, если его множество истинности совпадает с множеством определения X , и **тождественно-ложным**, если его множество истинности пусто.

Предикат **выполнимый**, если в области определения для одних значений истина, а для других ложь.

Формально предикатом называется функция, **аргументами** которой могут быть **ПРОИЗВОЛЬНЫЕ ОБЪЕКТЫ** из некоторого множества, а **значения функции** "истина" или "ложь".

Предикат будем рассматривать как расширение понятия высказывания.

Пример.

Вместо трех высказываний

"Маша любит кашу"

"Даша любит кашу"

"Саша любит кашу"



можно написать один предикат - "**Икс любит кашу**" и договориться, что вместо неизвестного Икс могут быть **либо Маша, либо Даша, либо Саша**.

Подстановка вместо Икс имени конкретного ребенка превращает предикат в обычное высказывание.

Рассмотрим еще примеры предикатов:

1. Предикат $Q(x) = \langle \sin x = 0 \rangle$ определен на множестве \mathbb{R} , а его множество истинности $I_q = \{x \mid x = \pi k; k \in \mathbb{Z}\}$.

2. Предикат $F(x)$ - «Диагонали параллелограмма x перпендикулярны» определен на множестве всех параллелограммов, а его множеством истинности является множество всех ромбов.

3. $P(x): \langle x^2 + 1 > 0, x \in \mathbb{R} \rangle$; область определения предиката $M = \mathbb{R}$ и область истинности - тоже \mathbb{R} . Таким образом, для данного предиката $M = I_p$. Такие предикаты называются тождественно истинными.

4. $B(x): \langle x^2 + 1 < 0, x \in \mathbb{R} \rangle$; область истинности $I_p = \emptyset$. Такие предикаты называются тождественно ложными.

ЭТО ОДНОМЕСТНЫЕ ПРЕДИКАТЫ (в них 1 субъект)!

Многоместные предикаты

Введем понятие **многоместного предиката**, с помощью которого **выражаются отношения между предметами**.

Примером отношения между двумя предметами является отношение «меньше» («больше»). Пусть отношение « $x < y$ » введено на множестве Z целых чисел, где $x, y \in Z$, то есть является функцией двух переменных **$P(x, y)$** , определенной на множестве $Z \times Z$ с множеством значений $\{1; 0\}$.

Определение. Двухместным предикатом $P(x, y)$ называется функция двух переменных x и y (субъекты предиката), определенная на множестве $M = M_1 \times M_2$ ($x \in M_1, y \in M_2$) и принимающая значения из множества $\{1; 0\}$.

Найдем значения предиката « $x < y$ », где $x, y \in Z$ для пар $(2; 1)$, $(4; 4)$ и $(3; 7)$.

$$P(2; 1) = 0; \quad P(4; 4) = 0; \quad P(3; 7) = 1.$$

Областью истинности P_i этого предиката является множество всех пар целых чисел, удовлетворяющих данному неравенству.

N-местным предикатом $P(x_1, x_2 \dots x_n)$ называется логическая функция от n переменных, **определенная на множестве $M = M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$** и принимающая значения из множества $\{1; 0\}$.

С каждым предикатом связано число, которое называется **местностью** или **арностью предиката** (количество переменных).

Для предикатов справедливы и имеют тот же смысл ранее рассмотренные **логические операции**.

Например:

1. "**ЕСЛИ** Маша любит кашу, **ТО** Саша любит кашу".

2. $P(x)$ – x делится на 2; $Q(x)$ – x делится на 3;

$P(x) \& Q(x)$ – x делится на 2 и 3, т. е. определен предикат делимости на 6.

3. $S(x, y)$ – x равно y . $S(x, y) \& S(y, z) \rightarrow S(x, z)$

Но есть и две новые операции, специфические. Они называются операциями **НАВЕШИВАНИЯ КВАНТОРОВ** (операции связывания кванторами).

Эти операции соответствуют фразам "**для всех**" - квантор общности и "**некоторые**" - квантор существования. Квантор общности произошел от английского **All** и обозначается буквой **A**, перевернутой вверх ногами - \forall .

Квантор существования произошел от английского **Exist** и обозначается буквой **E**, которую вверх ногами переворачивать бесполезно, поэтому ее повернули кругом - \exists

•

Квантор общности \forall

$\forall x P(x)$ - высказывание истинно для каждого

$x \in M$, т.е. это высказывание не зависит от x .

Квантор существования \exists

$\exists x P(x)$ - высказывание истинно, если существует

$x \in M$, для которого это высказывание истинно.

Для конечных множеств операции навешивания кванторов можно выразить через операции \wedge и \vee :

Если $M = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ - конечное множество, то можно считать, что

$$\forall x P(x) \equiv P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \dots \wedge P(a_m), \quad \exists x P(x) \equiv P(a_1) \vee P(a_2) \vee \dots \vee P(a_m)$$

Кванторы можно навешивать также на переменные многоместных предикатов, на одну переменную, несколько или сразу на все.

Переменная X , на которую навешен квантор, называется связанной, в противном случае – свободной.

Рассмотрим, например, предикат

$$\exists x \forall y P(x, y, z, t)$$

Здесь x, y – связанные переменные, z, t – свободные переменные.

Значение предиката не зависит от связанных переменных, а определяется только значениями свободных переменных.

Это означает во-первых, что навешивание квантора на одну переменную **уменьшает на 1 местность исходного предиката**.

Так, предикат $\exists x \forall y P(x, y, z, t)$ является двуместным.

Во-вторых, **предикат не изменится, если связанные переменные поменять на другие (отличные от свободных)**. Например

$$\exists x \forall y P(x, y, z, t) \equiv \exists u \forall v P(u, v, z, t)$$

Наш предикат из примера после навешивания каждого из кванторов также превращается в высказывание, которое может быть истинно или ложно!

"**ВСЕ** любят кашу"

"**НЕКОТОРЫЕ** любят кашу"

Это, кстати, был (до навешивания кванторов) одноместный предикат (функция 1 переменной).

Но ведь предикаты могут быть не только одноместные.

"Икс любит игрека" - двухместный предикат.

"ВСЕ любят игрека" - одноместный предикат.

"ВСЕ любят кофе" - нульместный предикат, то есть высказывание, не зависящее от переменной.

Подстановка константы вместо предметной переменной

Пусть $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n -местный предикат на множестве M , и пусть $a \in M$. Подставим вместо (например) x_n константу a .

Получим $(n-1)$ -местный предикат $P(x_1, x_2, \dots, a)$

Можно сразу подставить одну и ту же или разные константы вместо нескольких переменных. Тогда соответствующим образом уменьшится местность предиката.

Интересно посмотреть, как ведут себя кванторы в присутствии операции отрицания.

Возьмем отрицание предиката "ВСЕ любят кашу":

"НЕ ВЕРНО, что ВСЕ любят кашу".



Это равносильно (по закону Де Моргана: отрицание высказывания «А и В» эквивалентно высказыванию «не-А или не-В», т.е. $\overline{A \& B} = \overline{A} \vee \overline{B}$) заявлению: "НЕКОТОРЫЕ НЕ любят кашу".

То есть отрицание "задвинули" за квантор, в результате чего квантор сменился на противоположный.

Равносильные формулы логики предикатов

$$\overline{\exists x P(x)} \equiv \forall x \overline{P(x)}$$

$$\overline{\forall x P(x)} \equiv \exists x \overline{P(x)}.$$

$$\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x).$$

$$\exists x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x).$$

$$\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \Rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x)).$$

$$\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x).$$

$$\forall x \forall y P(x, y) \equiv \forall y \forall x P(x, y).$$

$$\exists x \exists y P(x, y) \equiv \exists y \exists x P(x, y).$$

Равносильные формулы логики предикатов

$$\exists x \forall y P(x, y) \Rightarrow \forall y \exists x P(x, y)$$

В последних
четырех
тождествах
предикат Q ,
вообще говоря,
может иметь
предметные
переменные, но
отличные от x

$$\forall x (P(x) \vee Q) \equiv \forall x P(x) \vee Q$$

$$\exists x (P(x) \vee Q) \equiv \exists x P(x) \vee Q$$

$$\forall x (P(x) \wedge Q) \equiv \forall x P(x) \wedge Q$$

$$\exists x (P(x) \wedge Q) \equiv \exists x P(x) \wedge Q$$

А теперь сделаем одно из самых важных заявлений:
**ИЗ ФОРМАЛИЗОВАННЫХ ЯЗЫКОВ МАТЕМАТИКИ
ЯЗЫК ПРЕДИКАТОВ – САМЫЙ БЛИЗКИЙ К
ЕСТЕСТВЕННОМУ.**

Поэтому работы по искусственному интеллекту тяготеют к использованию этого языка. В сравнении с естественным это очень (во многих смыслах) ограниченный язык. Но лучшего за 100 лет не придумано.

В хорошо формализованных системах даже наоборот - дополнительно ограничивают этот язык для удобной реализации на компьютерах. Примером тому язык (логического) программирования ПРОЛОГ - ПРОграммирование на ЛОГике.

На языке предикатов можно описать далеко не все, хотя и многое. Но даже в этом ограниченном пространстве подчас приходится применять хитрости и уловки, вот их "классические примеры".

Если мы желаем сказать на языке предикатов "**Все студенты умники**", то рекомендуется конструкция

"**ДЛЯ ВСЕХ** **иксов** справедливо: **ЕСЛИ** **икс** студент, **ТО** **икс** умник«.

Но если хотим сказать "**Некоторые студенты умники**", то это следует записать так:

"**ДЛЯ НЕКОТОРЫХ** **иксов** справедливо: **икс** студент **И** **икс** умник«.

И еще высказывание "Собакам **и** кошкам вход воспрещен".

Что имеется в виду под союзом «и»?

вариант 1

"ДЛЯ ВСЕХ иксов справедливо: ЕСЛИ икс - собака **И** икс - кошка, ТО иксу вход запрещен".

Ясно что таких иксов (и таких игреков), которые бы были одновременно собакой и кошкой не существует! Поэтому

вариант 2

"ДЛЯ ВСЕХ иксов справедливо: ЕСЛИ икс - собака **ИЛИ** икс - кошка, ТО иксу вход запрещен"

Формула логики предикатов, в которой из операций логики высказываний имеются только конъюнкция, дизъюнкция и отрицание, причем отрицание относится только к элементарным предикатам, называется **приведенной формой предиката**.

Теорема. Для всякого предиката существует равносильная ему приведенная нормальная форма.

Доказательство. Действительно, все операции в данной предикатной формуле можно выразить через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание (например, в виде ДНФ). Если после этого некоторые отрицания будут относиться к частям формулы, содержащим кванторы, то отрицания можно "снять" с кванторов согласно равносильностям 1 и 2, а "снять" отрицания с конъюнкций и дизъюнкций можно, следуя законам де Моргана. После всех описанных преобразований предикат, очевидно, будет представлен в приведенной форме.

Предикатная формула вида $K_1 x_1 K_2 x_2 \dots K_m x_m F$

где K_i – кванторы,

x_i – различные связанные переменные,

F – предикатная формула без кванторов, находящаяся в приведенной форме,

называется **предваренной нормальной формой предиката**.

Теорема. Для всякого предиката существует равносильная ему предваренная нормальная форма.

Формулы

$A(x, y); B(x)$ -
элементарные
формулы.

Если A, B –
предикатные
формулы, то
формулами являются
также выражения $\neg A$,
 $A \rightarrow B, \forall yA$.

Предикаты могут быть
выражены с помощью так
называемых предикатных
формул.

Внимание! Формула будет
предикатом,
когда все переменные
определены на некотором
множестве, и определены
все предикаты, входящие в
формулу.

С помощью предикатов можно записывать различные математические утверждения.

Рассмотрим, как можно записать утверждение:

Числовая последовательность $\{x_n\}$ имеет пределом число a .

Математическая запись:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

Запишем данное утверждение с помощью кванторов и обозначим его A :

$$A = \forall \varepsilon \exists N \forall n (\varepsilon > 0 \rightarrow (n > N \rightarrow |x_n - a| < \varepsilon))$$