

# РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПАКЕТОВ

# Классификация уравнений



Алгебраическими уравнениями называют уравнения, содержащие только алгебраические функции (целые, рациональные, иррациональные)

Уравнения, содержащие другие функции (тригонометрические, показательные, логарифмические и др.) называются трансцендентными

# Методы решения линейных уравнений

## Точные методы

Позволяют записать корни в виде некоторого конечного соотношения (формулы)

Решение с помощью обратной матрицы  
Метод Гаусса (алгоритм последовательного исключения неизвестных)  
Правило Крамера

## Итерационные методы с заданной точностью

Используются для решения уравнений не имеющих аналитического решения

Метод итерации  
Метод Зейделя

# Матричный метод решения систем линейных уравнений

Пусть дана система из 3-х уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Матрица системы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Матрицы неизвестных и свободных членов

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = B$$

Пусть определитель матрицы отличен от нуля  $|A| \neq 0$ . Тогда матричное уравнение решается следующим образом. Умножим обе части уравнения на матрицу  $A^{-1}$ , обратную матрице  $A$   $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$  или  $(A^{-1}A)X = A^{-1}B$

Поскольку  $A^{-1}A = E$  и  $E \cdot X = X$ , то получаем решение матричного уравнения в виде  $X = A^{-1}B$ .

Матричным методом можно решать только те системы, в которых число уравнений совпадает с числом неизвестных.

## Метод Гаусса

Метод Гаусса является более универсальным и пригоден для систем с любым числом уравнений. Он заключается в последовательном исключении неизвестных из уравнений системы.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad \text{Применяя элементарные преобразования матрицы приведем систему к следующему виду}$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2, \\ a''_{33}x_3 = b''_3. \end{cases}$$

*Первое уравнение оставим без изменения, а из 2-го и 3-го исключим слагаемые, содержащие  $x_1$ , а затем из последнего уравнения исключим слагаемое, содержащее  $x_2$*

К элементарным преобразованиям матрицы относятся следующие преобразования:

- 1) перестановка строк или столбцов;
- 2) умножение строки на число, отличное от нуля;
- 3) прибавление к одной строке другие строки.

# Метод итерации

Предполагая, что диагональные коэффициенты  $a_{ij}$  не равны 0 ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), разрешим первое уравнение системы относительно  $x_1$ , второе - относительно  $x_2$  и т. д. Тогда получим эквивалентную систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \dots + \alpha_{1n}x_n, \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_3 + \dots + \alpha_{2n}x_n, \\ \dots \\ x_n = \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \dots + \alpha_{n,n-1}x_{n-1}. \end{cases}$$

$$\beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}}; \quad \alpha_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}$$

при  $i$  не равно  $j$  и  $a_{ij} = 0$  при  $i = j$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ).

Матричная форма записи

$$x = b + a x,$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

Формула приближения

$$\begin{cases} x_i^{(0)} = \beta_i, \\ x_i^{(k+1)} = \beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j^{(k)} \\ (\alpha_{ii} = 0; i = 1, \dots, n; k = 0, 1, 2, \dots) \end{cases}$$

Теорема: Процесс итерации для приведенной линейной системы сходится к единственному ее решению, если какая-нибудь каноническая норма матрицы  $a$  меньше единицы, т.е. для итерационного процесса

$$x^{(k+1)} = b + a x^{(k)}.$$

достаточное условие есть

$$\|\alpha\| < 1.$$

## Методы решения *линейных уравнений* в пакете **MathCAD**

Системы линейных уравнений удобно решать с помощью функции *lsolve*.

**lsolve(A, b)** - Возвращается вектор решения  $x$  такой, что  $Ax = b$ .

*Аргументы:*  $A$  - квадратная, не сингулярная матрица.  $b$  - вектор, имеющий столько же рядов, сколько рядов в матрице  $A$ .

Для решение системы линейных уравнений методом Гаусса используются следующие функции:

**rref(A)** - Возвращается ступенчатая форма матрицы  $A$ .

**augment(A, B)** - Возвращается массив, сформированный расположением  $A$  и  $B$  бок о бок. Массивы  $A$  и  $B$  должны иметь одинаковое число строк.

**submatrix(A, ir, jr, ic, jc)** - Возвращается субматрица, состоящая из всех элементов, содержащихся в строках с  $ir$  по  $jr$  и столбцах с  $ic$  по  $jc$ . Удостоверьтесь, что  $ir \leq jr$  и  $ic \leq jc$ , иначе порядок строк и (или) столбцов будет обращен.

В Mathcad существуют специальные функции для вычисления норм матриц:

**normi(A)** - Возвращает неопределенную норму матрицы  $A$ .

**norm1(A)** - Возвращает  $L1$ , норму матрицы  $A$ . **norm2(A)** –  $L2$

**norme(A)** - Возвращает Евклидову норму матрицы  $A$ .

# Матричный метод решения систем линейных уравнений

Mathcad Professional - [Решение матричных уравнений.mcd]

Файл Правка Вид Вставка Формат Математика Символы Окно ?

Матрица системы:  $A := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$       Матрица правой части:  $b := \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$

Вычисление определителя

$|A| = 5$

Определитель отличен от нуля, система имеет единственное решение

Вычисление решения системы

$x := A^{-1} \cdot b$        $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Решение системы с помощью функции lsolve

$x := \text{lsolve}(A, b)$        $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Проверка правильности решения

$A \cdot x - b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

**Примечание:** образцы матрицы и вектора соответствуют линейной системе

$3x_1 - x_2 = 5$   
 $-2 \cdot x_1 + x_2 + x_3 = 0$   
 $2 \cdot x_1 - x_2 + 4 \cdot x_3 = 15$

**Матрицы**

Вычисление определителя |



# Метод Гаусса

Mathcad Professional - [Метод Гаусса.mcd]

Файл Правка Вид Вставка Формат Математика Символы Окно ?

Матрица системы:  $A := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$       Матрица правой части:  $b := \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$       **Примечание:** образцы матрицы и вектора соответствуют линейной системе

$3x_1 - x_2 = 5$   
 $-2 \cdot x_1 + x_2 + x_3 = 0$   
 $2 \cdot x_1 - x_2 + 4 \cdot x_3 = 15$

ORIGIN := 1

Формирование расширенной матрицы системы:  $Ab := \text{augment}(A, b)$        $Ab = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 15 \end{pmatrix}$       **augment(A, B)** - Возвращается массив, сформированный расположением  $A$  и  $B$  бок о бок. Массивы  $A$  и  $B$  должны иметь одинаковое число строк.

Приведение расширенной матрицы системы к ступенчатому виду (прямой и обратный ходы метода Гаусса):  $Ag := \text{rref}(Ab)$        $Ag = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$       +

Формирование столбца решения системы:  $x := \text{submatrix}(Ag, 1, 3, 4, 4)$        $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$       Проверка правильности решения:  $A \cdot x - b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

# Метод итераций

Mathcad Professional - [Метод итераций для линейных систем уравнений.mcd]

Файл Плавка Вид Вставка Формат Математика Символы Окно ?

$$\beta := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \alpha := \begin{pmatrix} 0 & -0.06 & 0.02 \\ -0.03 & 0 & 0.05 \\ -0.01 & -0.02 & 0 \end{pmatrix}$$

Проверка достаточного условия сходимости (достаточно вычисления одной из функций):

$\text{norm1}(\alpha) = 0.08$      $\text{norme}(\alpha) = 0.088882$      $\text{normi}(\alpha) = 0.08$

$x^{(0)} := \beta$     - определение начального приближения решения

$i := 0..4$     - определение количества итераций

$x^{(i+1)} := \beta + \alpha \cdot x^{(i)}$     - формула вычислений по методу итераций

Матрица приближенных решений:

	0	1	2	3	4	5	
$x =$	0	2	1.92	1.907	1.907036	1.907025	1.907024
	1	3	3.19	3.1884	3.18864	3.188647	3.188647
	2	5	4.92	4.917	4.917162	4.917157	4.917157

$\epsilon := \frac{|x^{(5)} - x^{(4)}|}{|x^{(4)}|}$     - в оценке погрешностей использована Евклидова норма вектора     $\epsilon = 8.612289 \times 10^{-8}$

## Методы решения *нелинейных уравнений*

Большая часть методов предполагает, что известны достаточно малые окрестности, в каждой из которых имеется только один корень уравнения. Принимая за начальное приближение одну из точек этой окрестности, можно вычислить искомый корень с заданной точностью.

### Приближенное вычисление корней уравнения

#### *1. Отделение корней уравнения.*

Поиск достаточно тесных промежутков, в каждом из которых содержится только один корень уравнения.

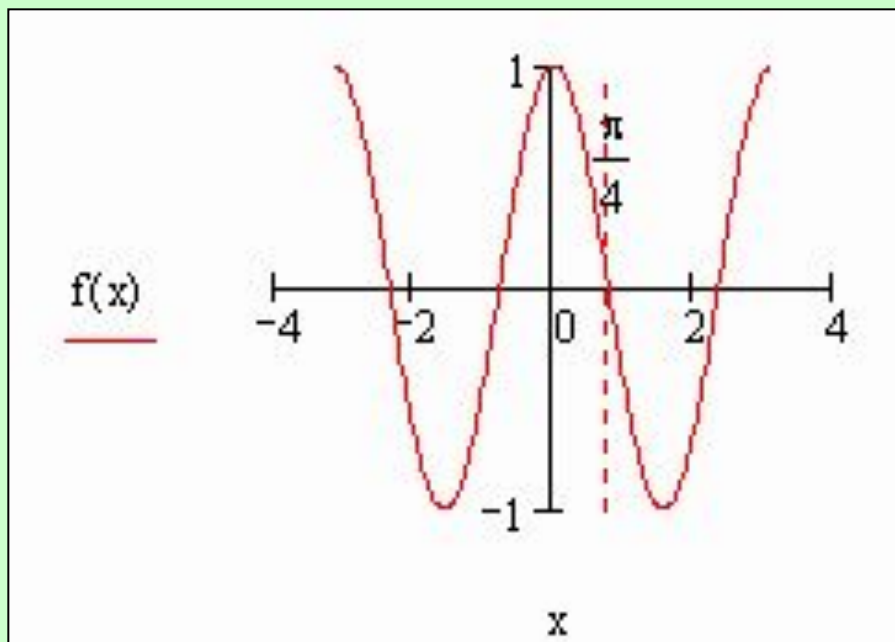
#### *2. Вычисление корня с заданной точностью.*

Применяется, если известно некоторое начальное приближение корня в области, не содержащей других корней

Однако, существуют специальные методы решения алгебраических уравнений, не требующих знания начального приближения корня

## Отделение корней уравнения $f(x)=0$ .

Один из самых простых и распространенных – графический метод решения. Применяется только для грубой оценки корней.



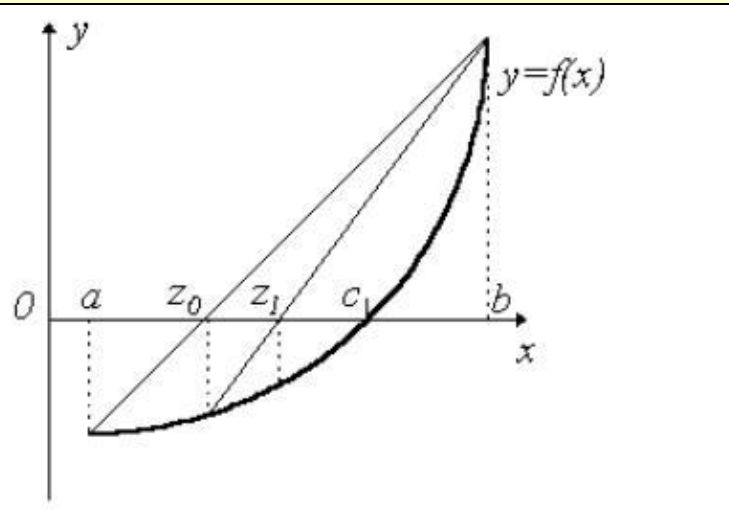
Необходимо построить график функции  $y=f(x)$ , а затем найти абсциссы точек пересечения этого графика с осью  $x$ , которые и будут являться приближенными значениями действительных корней уравнения

## Уточнение корней

## Метод половинного деления (дихотомии)

Функция  $f(x)=0$  непрерывна на отрезке  $[a,b]$  и  $f(a) \times f(b) < 0$

1. Находим точку  $c=(a+b)/2$ .
2. Если  $f(a) \times f(c) < 0$ , то корень лежит на интервале  $[a,c]$ , иначе – на интервале  $[c, b]$ .
3. Если величина интервала не превышает указанной точности, то корень найден с указанной точностью, если нет – повторить п.1



## Метод хорд (пропорциональных частей)

Начальные условия те же

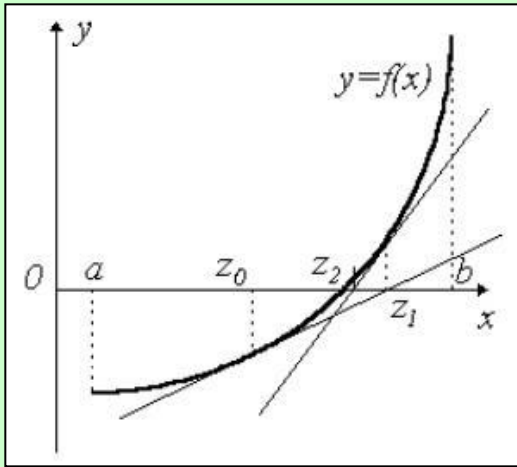
1. Находим точку  $z$ .

$$z = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)}$$

2. Если  $f(a) \times f(z) < 0$ , то корень лежит на интервале  $[a, z]$ , иначе – на интервале  $[z, b]$ .

3. Если величина интервала не превышает указанной точности, то корень найден с указанной точностью, если нет – повторить п.1

## Метод касательных (Метод Ньютона)

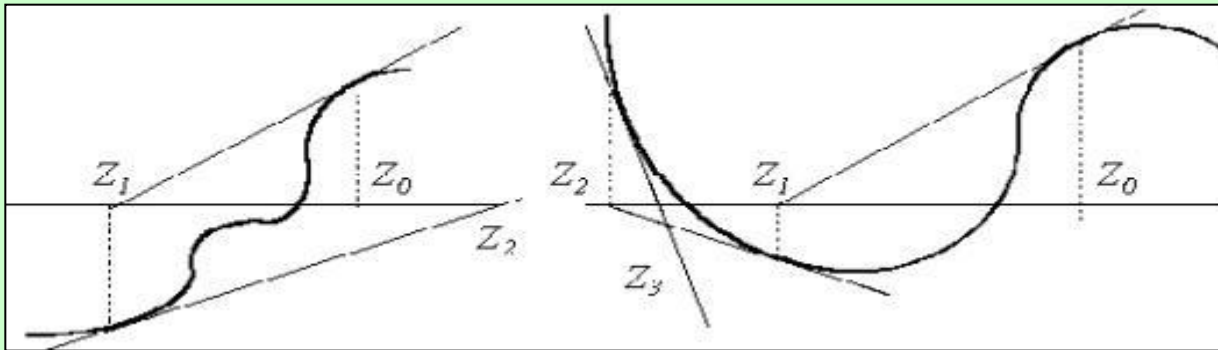


1. Определение начального приближения. Если  $f(a) \times f''(a) > 0$ , то начальное приближение в точке  $a$ , иначе -  $b$ .

2. Уточняем значение корня

$$X^* \approx Z_{n+1} = Z_n - \frac{f(Z_n)}{f'(Z_n)}$$

3. Если значение функции не превышает указанной точности, то корень найден с указанной точностью, если нет – повторить п.2



## Комбинированный метод

$f(a) \times f(b) < 0$ , а  $f'(x)$  и  $f''(x)$  сохраняют постоянные знаки на интервале  $[a, b]$

На каждом этапе вычисляется значение по недостатку и значение по избытку точного корня уравнения

## Метод простой итерации (последовательных приближений)

Уравнение  $f(x)=0$  заменяется равносильным уравнением  $x = \varphi(x)$  и строится последовательность значений  $X_{n+1} = \varphi(X_n)$ ,  $n=0, 1, 2, \dots$ .

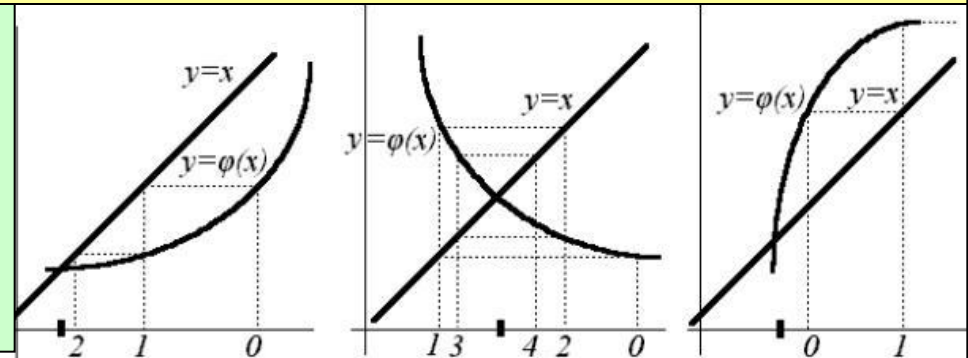
Если функция  $\varphi(x)$  определена и дифференцируема на некотором интервале, причем  $|\varphi'(x)| < 1$ , то эта последовательность сходится к корню уравнения  $x = \varphi(x)$  на этом интервале.

Если  $f'(x) > 0$ , то подбор равносильного уравнения можно свести к выбору  $\varphi(x) = x - \lambda \cdot f(x)$ , где  $\lambda > 0$  подбирается так, чтобы в окрестности корня  $0 < \varphi'(x) = 1 - \lambda \cdot f'(x) \leq 1$ . Отсюда может быть построен итерационный процесс

$$X'_{n+1} = X_n - \frac{f(X_n)}{M}, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

где  $M \geq \max |f'(x)|$  (в случае  $f'(x) < 0$  возьмите функцию  $f(x)$  с противоположным знаком).

Первые два демонстрируют одно- и двустороннее приближение к корню, третий же выступает иллюстрацией расходящегося процесса ( $|\varphi'(x)| > 1$ ).



Существуют и другие методы (наискорейшего спуска, Эйткена-Стеффенсена, Вегстейна, Рыбакова и т.д.) уточнения корней, обладающие высокой скоростью сходимости.

## Решение нелинейных уравнений в MathCAD

Для простейших уравнений решение находится с помощью функции *root*.

**root( $f(x1, x2, \dots)$ ,  $x1$ ,  $a$ ,  $b$ )** - Возвращает значение  $x1$ , принадлежащее отрезку  $[a, b]$ , при котором выражение или функция  $f(x)$  обращается в 0. Оба аргумента этой функции должны быть скалярами. Функция возвращает скаляр.

*Аргументы:*

$f(x1, x2, \dots)$  - функция, определенная где-либо в рабочем документе, или выражение. Выражение должно возвращать скалярные значения.

$x1$  - Этой переменной перед использованием функции *root* необходимо присвоить числовое значение. Является начальным приближением при поиске корня.

$a$ ,  $b$  - необязательны, если используются, то должны быть вещественными числами, причем  $a < b$ .

Для изменения точности, с которой функция *root* ищет корень, нужно изменить значение системной переменной **TOL**. Если значение TOL увеличивается, функция *root* будет сходиться быстрее, но ответ будет менее точен. Если значение TOL уменьшается, то функция *root* будет сходиться медленнее, но ответ будет более точен. Чтобы изменить значение TOL в определенной точке рабочего документа, используйте определение вида **TOL := 0.01**.

**Polyroots( $v$ )** - Возвращает корни полинома степени  $n$ . Коэффициенты полинома находятся в векторе  $v$  длины  $n + 1$ . Возвращает вектор длины  $n$ , состоящий из корней полинома. *Аргументы:*  $v$  - вектор, содержащий коэффициенты полинома.



# Решение нелинейных уравнений в MathCAD

**Mathcad Professional - [Решение уравнений средствами Mathcad.mcd]**

Файл Плавка Вид Вставка Формат Математика Символы Окно ?

Пример 1. Решение уравнения  $\cos(x) = x + 0.2$  с помощью функции root

1 способ  
 $x := 1$  - начальное приближение  
 $f(x) := \cos(x) - x - 0.2$   
 $\text{root}(f(x), x) = 0.616$

2 способ  
 $x := 1$  - начальное приближение  
 $\text{root}(\cos(x) - x - 0.2, x) = 0.616$

3 способ  
 $\text{root}(\cos(x) - x - 0.2, x, 0, 1) = 0.616$

В способах 1 и 2, начальное приближение показывает функции root, где начать искать корень. В способе 3, 3 и 4 параметры определяют область, где искать корень.

В способе 1 первый аргумент - это функция  $f(x)$ , определенная в документе. В способах 2 и 3 - это выражение.

Пример 2. Нахождение корней полинома  $x^4 - 10 \cdot x^3 + 2 \cdot x - 1$

$v := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix}$  - Используйте команду **Символы**  $\Rightarrow$   $\Rightarrow$  **Кoeffициенты полинома** для создания вектора  $v$

$\text{polyroots}(v) = \begin{pmatrix} -0.591 \\ 0.305 - 0.277i \\ 0.305 + 0.277i \\ 9.981 \end{pmatrix}$

## Решение систем нелинейных уравнений в MathCAD

Максимальное число уравнений и переменных равно 50. Результатом решения системы будет численное значение искомого корня.

Для решения системы уравнений необходимо выполнить следующее:

Задать начальное приближение для всех неизвестных, входящих в систему уравнений

Напечатать ключевое слово *Given*. (указывает, что далее следует система уравнений).

Ввести уравнения и неравенства в любом порядке. Используйте [Ctrl]= для печати символа =. Между левыми и правыми частями неравенств может стоять любой из символов <, >.

Введите любое выражение, которое включает функцию *Find*, например:  $a := \text{Find}(x, y)$ .

**Find(z1, z2, . . .)** - Возвращает точное решение системы уравнений. Число аргументов должно быть равно числу неизвестных.

*Ключевое слово Given, уравнения и неравенства, которые следуют за ним, и какое-либо выражение, содержащее функцию Find, называют блоком решения уравнений.*

Блоки решения уравнений не могут быть вложены друг в друга, каждый блок может иметь только одно ключевое слово *Given* и имя функции *Find*.

# Решение систем нелинейных уравнений в MathCAD

**Mathcad Professional - [Решение систем уравнений.MCD]**

Файл Правка Вид Вставка Формат Математика Символы Окно ?

Пример 1. Решение системы уравнений с помощью функции Find

$x_1 := 0 \quad x_2 := 0 \quad x_3 := 0$  - Начальные приближения

Given

$100 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 = 100$  - Используйте [Ctrl]= для печати символа =

$6 \cdot x_1 + 200 \cdot x_2 - 10 \cdot x_3 = 600$

$x_1 + 2 \cdot x_2 + 100 \cdot x_3 = 500$

$\text{Find}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 0.905 \\ 3.219 \\ 4.927 \end{pmatrix}$  +

Пример 2. Решение системы уравнений в символьном виде

Given

$x + 2 \cdot \pi \cdot y = a$

$4 \cdot x + y = b$

$\text{Find}(x, y) \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{-(-2 \cdot \pi \cdot b + a)}{(-1 + 8 \cdot \pi)} \\ \frac{(4 \cdot a - b)}{(-1 + 8 \cdot \pi)} \end{bmatrix}$  - Используйте [Ctrl]. (клавиша Ctrl, сопровождаемая точкой) для печати символьного знака равенства

## Приближенные решения

Функция *Minner* очень похожа на функцию *Find* (использует тот же алгоритм). Если в результате поиска не может быть получено дальнейшее уточнение текущего приближения к решению, *Minner* возвращает это приближение. Функция *Find* в этом случае возвращает сообщение об ошибке. Правила использования функции *Minner* такие же, как и функции *Find*.

**minerr(z1, z2, . . .)**- Возвращает приближенное решение системы уравнений. Число аргументов должно быть равно числу неизвестных. Если *Minner* используется в блоке решения уравнений, необходимо всегда включать дополнительную проверку достоверности результатов.

## Символьное решение уравнения

Если решаемое уравнение имеет параметр, то решение в символьном виде может выразить искомый корень непосредственно через параметр. Чтобы решить систему уравнений в символьном виде, необходимо выполнить следующее:

- 1) Напечатать ключевое слово *Given*.
- 2) Напечатать уравнения в любом порядке ниже слова *Given*. Удостоверьтесь, что для ввода знака = используется [Ctrl]=.
- 3) Напечатать функцию *Find*, соответствующую системе уравнений.
- 4) Нажать [Ctrl]. (клавиша CTRL, сопровождаемая точкой). Mathcad отобразит символьный знак равенства  $\rightarrow$ .
- 5) Щелкнуть мышью на функции *Find*.

***КОНЕЦ ЛЕКЦИИ!***