$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

МАТРИЦЫ

$$\left(a_{ij}\right)_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица, операция над матрицами. Приведение матрицы к виду Гаусса. Ранг матрицы

М А Т Р И Ц Ы
1.ОПРЕДЕЛЕНИЯ

- **О п р е д е л е н и е 1.** *Матрицей размерности* $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- содержащая m-строк и n-столбцов. Числа, составляющие матрицу, называются ее *элементами* (их обозначают: a_{ij} где i-номер строки матрицы, j - номер столбца матрицы, в которых расположен данный элемент)

М А Т Р И Ц Ы
1.ОПРЕДЕЛЕНИЯ

- Матрицу обозначают:

$$A \qquad \text{или} \qquad (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}.$$

- **О п р е д е л е н и е 2.** Две матрицы называются *равными*, если они совпадают поэлементно.
- **О п р е д е л е н и е 3.** Матрица размерности называется *нулевой* (обозначают: O), если все ее элементы равны нулю.

М А Т Р И Ц Ы
1.ОПРЕДЕЛЕНИЯ

- **О п р е д е л е н и е 4.** Матрица размерности $1 \times n$ называется *матрицей-строкой*: $(a_{11}, \ldots, a_{1n})$. Матрица размерности $m \times 1$ называется *матрицей-столбцом*: $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$
- **О п р е д е л е н и е 5.** Если $m=n$, то матрица называется *квадратной матрицей порядка* n. Ее элементы $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ образуют *главную* диагональ; числа $a_{n1}, a_{n-1,2}, \ldots, a_{1n}$ - *побочную* диагональ.

М А Т Р И Ц Ы
1.ОПРЕДЕЛЕНИЯ

- **З а м е ч а н и е 1.** В частности, *квадратной матрицей второго порядка* называется таблица чисел:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

содержащая две строки и два столбца. Числа a_{ij} $(i=j=1,2)$ называются *элементами* матрицы, где i − номер строки, а j − номер столбца, в которых расположен данный элемент. Числа a_{11}, a_{22} образуют *главную диагональ* матрицы A; числа a_{12}, a_{21} − *побочную* (второстепенную) *диагональ* матрицы.

МАТРИЦЫ
1.ОПРЕДЕЛЕНИЯ

- *Квадратной матрицей третьего порядка* называется таблица чисел:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

содержащая три строки и три столбца. Числа a_{ij} $(i=j=1,2,3)$ называются *элементами* матрицы, где i – номер строки, j – номер столбца, в которых расположен данный элемент. Числа a_{11}, a_{22}, a_{33} образуют *главную диагональ* матрицы; числа a_{13}, a_{22}, a_{31} – *побочную* (второстепенную) *диагональ* матрицы.

М А Т Р И Ц Ы
1.ОПРЕДЕЛЕНИЯ

- **О п р е д е л е н и е 6.** Квадратная матрица называется *диагональной*, если все элементы, стоящие *вне* главной диагонали, равны нулю.

- **О п р е д е л е н и е 7.** Квадратная матрица называется *верхнетреугольной* (*нижнетреугольной*), если все ее элементы, расположенные ниже (выше) главной диагонали, равны нулю.

М А Т Р И Ц Ы
1.ОПРЕДЕЛЕНИЯ

- **О п р е д е л е н и е 8.** Квадратная матрица называется *единичной* (обозначают: E), если она диагональная и все элементы главной диагонали равны единице.
- **О п р е д е л е н и е 9.** Матрица, полученная из квадратной матрицы A заменой всех строк соответствующими (по номеру) столбцами, называется *транспонированной* к матрице A и обозначается A^T

М А Т Р И Ц Ы
2.ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

- **О п р е д е л е н и е 10.** *Суммой (разностью) матриц* A и B размерности $m \times n$ называется такая матрица $A \pm B$ размерности $m \times n$, у которой все элементы равны сумме (разности) соответствующих элементов матриц A и B
- **О п р е д е л е н и е 11.** *Произведением матрицы* A размерности $m \times n$ *на число* α называется такая матрица αA размерности $m \times n$, у которой все элементы равны произведению соответствующего элемента матрицы A на число α.

М А Т Р И Ц Ы

2.ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

1) Сложение, вычитание, умножение матрицы на число

Операции сложения, вычитания двух матриц одинаковой размерности, умножения матрицы на число вводятся (по определению) с помощью поэлементного выполнения соответствующего действия, если $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$ $B = \left(b_{ij}\right)_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$

$$A \pm B = \left(a_{ij} \pm b_{ij}\right)_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}, \qquad \alpha \cdot A = \left(\alpha \cdot a_{ij}\right)_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}.$$

М А Т Р И Ц Ы
2.ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

- ***Свойства операций***

$$A + B = B + A,$$

$$\alpha \cdot A = A \cdot \alpha,$$

$$(A + B) + C = A + (B + C),$$

$$\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A,$$

$$\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B,$$

$$(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A,$$

где $\alpha, \beta = const;$ $A, B, C -$ матрицы одинаковой размерности.

М А Т Р И Ц Ы
2. ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

2) *Умножение матриц*

- О п р е д е л е н и е 12. Произведением матрицы $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,k}}}$ размерности $m \times k$ на матрицу $B = \left(b_{ij}\right)_{\substack{i=\overline{1,k} \\ j=\overline{1,n}}}$ размерности $k \times n$ называется такая матрица C размерности $m \times n$, у которой элемент с номером ij вычисляется по формуле:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{ik} \cdot b_{kj} \qquad (1)$$

З а м е ч а н и е 2. Число (1) равно скалярному произведению вектора, составленного из элементов i - й строки матрицы A, на вектор, составленный из элементов j - го столбца матрицы B.

М А Т Р И Ц Ы
2.ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

Свойства операции:

$$A_{(n\times m)}\cdot O_{(m\times k)}=O_{(n\times k)},$$

$$O_{(k\times n)}\cdot A_{(n\times m)}=O_{(k\times m)},$$

$$A\cdot E=E\cdot A=A$$ (для квадратных матриц),

$$(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C),$$

$$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C,$$

$$(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C.$$

Предполагается, что указанные здесь действия определены.

МАТРИЦЫ

2.ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

3) Возведение в степень

- Эта операция определена только для квадратных матриц и вводится по правилу:

$$A^2 = A \cdot A, \quad A^3 = A^2 \cdot A, \quad \ldots, \quad A^k = A^{k-1} \cdot A.$$

В частности, справедливы равенства: $O^k = O \quad \forall k \in N,$

$$E^k = E \quad \forall k \in N.$$

Для *диагональной* матрицы справедлива формула:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} a_{11}^k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^k \end{pmatrix} \quad \forall k \in N.$$

МАТРИЦЫ

3. СТУПЕНЧАТЫЙ ВИД МАТРИЦЫ

- **Определение 13.** *Элементарными преобразованиями* строк матрицы называются преобразования следующих типов:

1) *перестановка местами двух строк матрицы*,

условное обозначение: , где стрелки указывают на строки, переставляемые местами;

2) *замена строки суммой этой строки и некоторой другой, вспомогательной, предварительно умноженной на какое-либо число* α

условное обозначение: (α), *где стрелка указывает на изменяемую строку;*

- Множитель (α) ставят рядом со вспомогательной строкой;

М А Т Р И Ц Ы

3. СТУПЕНЧАТЫЙ ВИД МАТРИЦЫ

- 3) *умножение строки на ненулевое число* α, условное обозначение: (α), ставится рядом с изменяемой строкой .
- З а м е ч а н и е 3. Аналогично вводятся элементарные преобразования столбцов матрицы.
- О п р е д е л е н и е 14. *Опорным элементом строки* матрицы называется первый слева ненулевой элемент этой строки. Если строка нулевая, то опорного элемента у нее нет.
- О п р е д е л е н и е 15. Матрица называется *ступенчатой* (или *имеющей ступенчатый вид*), если выполнены следующие условия:
  - * если какая-то строка матрицы нулевая, то все последующие строки − нулевые;
  - * опорный элемент в каждой последующей строке расположен правее, чем в предыдущей.

М А Т Р И Ц Ы

3. СТУПЕНЧАТЫЙ ВИД МАТРИЦЫ

- **О п р е д е л е н и е 16.** Говорят, что матрица имеет *вид Гаусса*, если:
- ● матрица является ступенчатой;
- ● все опорные элементы равны единице;
- ● над опорными элементами стоят только нули.
- **Т е о р е м а 1.** Любая матрица A может быть приведена к ступенчатой матрице A_1 с помощью элементарных преобразований строк первого и второго типов. Любая матрица A может быть приведена к ступенчатой матрице A_2 вида Гаусса с помощью элементарных преобразований строк первого – третьего типов.

М А Т Р И Ц Ы

3. СТУПЕНЧАТЫЙ ВИД МАТРИЦЫ

- **О п р е д е л е н и е 17.** Матрицы A_1 и A_2 , построенные по матрице A с помощью элементарных преобразований, называются, соответственно, *ступенчатым видом матрицы* A и *видом Гаусса матрицы* A.
- **З а м е ч а н и е 4.** Ступенчатый вид у матрицы и ее вид Гаусса не единственен. Наборы базисных строк и базисных столбцов матрицы также не являются инвариантами этой матрицы.

МАТРИЦЫ

4. РАНГ МАТРИЦЫ

- **О п р е д е л е н и е 19.** *Рангом матрицы* A называется число ненулевых строк в ступенчатом виде этой матрицы. Обозначение: $r(A)$.
- **З а м е ч а н и е 5.** Ранг матрицы не меняется при применении к матрице A элементарных преобразований, то есть не зависит от способа приведения матрицы к ступенчатому виду.
- **З а м е ч а н и е 6.** Справедливы неравенства:

$$0 \le r(A) \le \min(m, n)$$

М А Т Р И Ц Ы

5. ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

- **П р и м е р 1**. Определить размерность матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & -1 & -2 \\ 0 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

и указать ее элементы: $a_{13}, a_{24}, a_{32}.$

Р е ш е н и е. Матрица A имеет три строки и четыре столбца, то есть

$$m = 3, n = 4.$$

$$a_{13} = 3; \; a_{24} = -2; \; a_{32} = 7.$$

М А Т Р И Ц Ы

5. ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

- **П р и м е р 2.** Вычислить матрицу $2A-3B$, если

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ -1 & 7 & 3\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}4 & 3 & -1\\ 0 & 5 & 6\end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Знная матрицы A и B, находим:

$$2A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 4\\ -2 & 14 & 6\end{pmatrix};\qquad 3B=\begin{pmatrix}12 & 9 & -3\\ 0 & 15 & 18\end{pmatrix}.$$

$$2A-3B=\left(\begin{array}{c|c|c}0-12 & 2-9 & 4-(-3)\\ \hline -2-0 & 14-15 & 6-18\end{array}\right)=\begin{pmatrix}-12 & -7 & 7\\ -2 & -1 & -12\end{pmatrix}.$$

М А Т Р И Ц Ы

5. ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

- **П р и м е р 3.** Вычислить: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix};$
- Р е ш е н и е. а) Первая из перемножаемых матриц имеет размерность 2х3, а вторая матрица – размерность 2х1 .
- Так как число столбцов первой матрицы не равно числу строк второй, то данные две матрицы перемножить нельзя.
- **П р и м е р 4.** Вычислить:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix};$$

М А Т Р И Ц Ы

<u>5. ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ</u>

- Р е ш е н и е. Пользуясь формулой (1), находим матрицу размерности:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 1 + 1\cdot(-3) + 2\cdot 2 \\ (-1)\cdot 1 + 7\cdot(-3) + 3\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -16 \end{pmatrix}$$

- **<u>П р и м е р 5.</u>** Найти A^2, если

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

М А Т Р И Ц Ы
5. ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

- Р е ш е н и е. а) Так как матрицы являются квадратными, то вычисляем: $A^2 = A \cdot A$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 9 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix};$$

б) Учитывая, что рассматриваемая матрица является диагональной, получаем:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

М А Т Р И Ц Ы

5. ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

- **П р и м е р 6.** Указать ступенчатый вид матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Назвать базисные строки и столбцы матрицы A.

Р е ш е н и е.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & -4 \end{pmatrix} (-1)(-2) \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} (-1)(6) \to$$

М А Т Р И Ц Ы

5. ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда заключаем: *у матрицы* A

базисные строки – $1^{\underline{я}}, 2^{\underline{я}}$;

базисные столбцы – $1^{\underline{й}}, 3^{\underline{й}}$.

МАТРИЦЫ

5. ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

- **Пример 7.** Привести к виду Гаусса матрицу

$$A=\begin{pmatrix}0&2&3\\0&2&1\\1&2&3\\2&1&1\\3&2&1\end{pmatrix}.$$

Решение. Выполним элементарные преобразования строк матрицы:

$$\begin{pmatrix}0&2&3\\0&2&1\\1&2&3\\2&1&1\\3&2&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&2&3\\0&2&1\\0&2&3\\2&1&1\\3&2&1\end{pmatrix}\begin{matrix}(-2)(-3)\\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \to \begin{pmatrix}1&2&3\\0&2&1\\0&2&3\\0&-3&-5\\0&-4&-8\end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \left(-\frac{1}{4}\right)\end{matrix} \to$$

МАТРИЦЫ

5. ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (-2)(3) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} (1)(3) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (-2)(-3) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (-2) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \rightarrow$$

М А Т Р И Ц Ы

5. ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

О т в е т: $A \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$