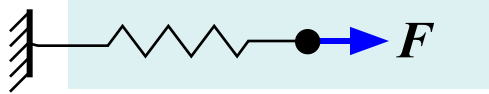


## Вынужденные колебания. Резонанс

Линейный осциллятор при наличии трения и действии внешних сил



$$F = F_0 \cos \omega t \quad - \text{внешняя сила}$$

Уравнение движения

$$\ddot{m}x = -kx - bx + F_0 \cos \omega t \quad | \quad : m \quad \longrightarrow \quad \left( \gamma = \frac{b}{2m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \right)$$

$$\ddot{x} + 2\dot{\gamma}x + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad - \text{уравнение вынужденных колебаний}$$

Согласно теории дифференциальных уравнений решение имеет вид

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t) \quad \begin{array}{l} x_0(t) - \text{общее решение однородного уравнения} \\ x_1(t) - \text{частное решение неоднородного уравнения} \end{array}$$

## Вынужденные колебания. Резонанс

$$x_0 = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi) \rightarrow 0 \quad \longrightarrow$$

$x(t) = x_1(t)$  – установившиеся колебания

Уравнение вынужденных колебаний преобразуем к комплексному виду

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = (F_0/m)e^{i\omega t}$$

Решение ищем в виде  $x = Ae^{i\beta t}$   $\longrightarrow$

$$Ae^{i\beta t}(-\beta^2 + 2i\gamma\beta + \omega_0^2) = (F_0/m)e^{i\omega t} \quad \longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta = \omega \\ A = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega} = \frac{F_0}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \end{array} \right.$$

## Вынужденные колебания. Резонанс

$$A = A_0 e^{i\varphi}$$

$$A_0 = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}$$



$$x = A_0 e^{i(\omega t + \varphi)} \quad - \text{ комплексное решение}$$



$$x = A_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad - \text{ действительное решение}$$

## Вынужденные колебания. Резонанс

Малое затухание  $\gamma \ll \omega_0$

**Случай 1**  $\omega \approx \omega_0$

$$A_0 \approx \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}, \quad \varphi \approx 0$$

Характер движения определяет сила упругости, влияние силы трения и инертности мало

$$\cancel{\ddot{x} + 2\dot{\gamma}x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad \longrightarrow$$

$$x = \frac{F_0}{k} \cos \omega t$$

## Вынужденные колебания. Резонанс

Малое затухание  $\gamma \ll \omega_0$

**Случай 2**  $\omega \approx \omega_0$

$$A_0 \approx \frac{F_0}{m\omega^2}, \quad \varphi \approx \pi$$

Характер движения определяет инертность, влияние силы упругости и силы трения мало

$$\ddot{x} + 2\dot{\gamma}x + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad \longrightarrow$$

$$x = -\frac{F_0}{m\omega^2} \cos \omega t$$

## Вынужденные колебания. Резонанс

Малое затухание  $\gamma \ll \omega_0$

**Случай 3**  $\omega \approx \omega_0$  Случай *резонанса*

$$A_0 \approx \frac{F_0}{m} \frac{1}{2\gamma\omega_0}, \quad \varphi \approx -\frac{\pi}{2}$$

Характер движения определяет сила трения,  
сила упругости обеспечивает ускорение системы

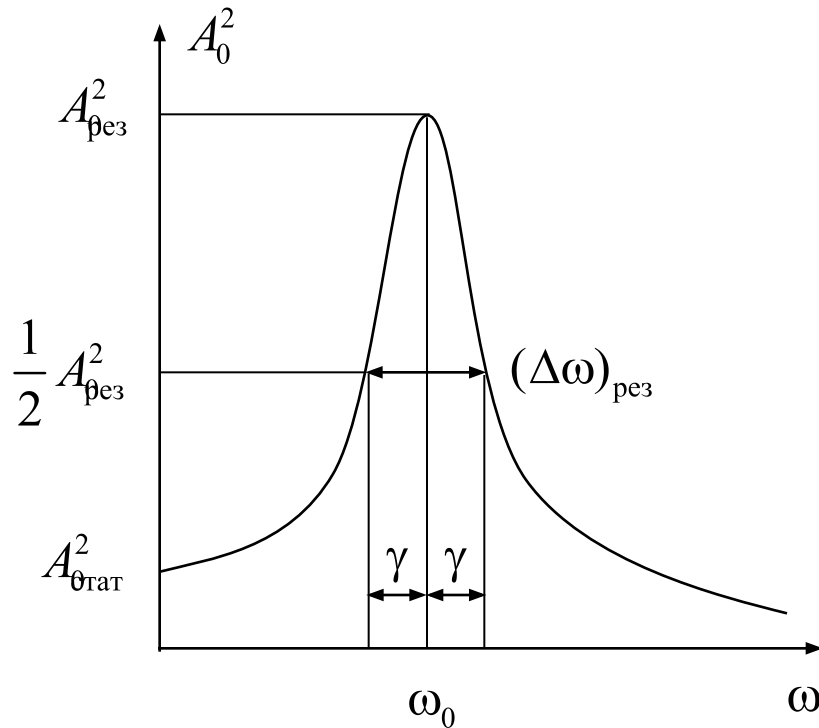
$$\ddot{x} + 2\dot{\gamma}x + \overset{0}{\omega_0^2}x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad \longrightarrow$$

$$x = \frac{F_0}{2m\gamma\omega_0} \sin \omega_0 t$$

## Вынужденные колебания. Резонанс

### Резонансные характеристики осциллятора

#### Добротность



Резонансная кривая

$$Q = \frac{A_{\text{рез}}}{A_{\text{стат}}} = \left( \frac{F_0}{2m\gamma\omega_0} \right) : \left( \frac{F_0}{k} \right) = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{2\pi}{2\gamma T}$$

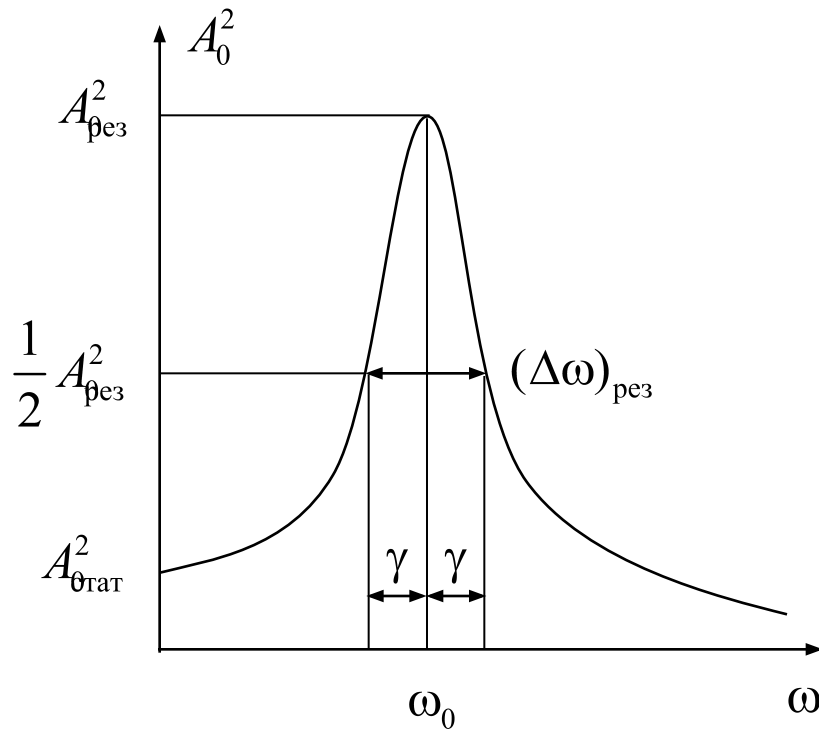
$$Q = \frac{\pi}{\theta} = \pi N_e$$

– добротность

## Вынужденные колебания. Резонанс

### Резонансные характеристики осциллятора

#### Избирательность (ширина резонансной кривой)



Резонансная кривая

В окрестности  $\omega_0$   $\left[ \Delta\omega = \omega - \omega_0 \right]$

$$A_0^2 \approx \left( \frac{F_0}{m} \right)^2 \frac{1}{4\gamma^2 \omega_0^2} \frac{1}{1 + (\Delta\omega/\gamma)^2} \quad \longrightarrow$$

ширина резонансной кривой

$$(\Delta\omega)_{рез} = 2\gamma \quad \longrightarrow$$

$$(\Delta\omega)_{рез} = \frac{\omega_0}{Q}$$