Работа и кинетическая энергия

Уравнение движения материальной точки

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F} \quad \Big| \times \boldsymbol{v}dt = d\boldsymbol{r} \quad \Rightarrow \quad m\boldsymbol{v}d\boldsymbol{v} = \boldsymbol{F}d\boldsymbol{r}$$

1) $$m\boldsymbol{v}d\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}md(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) = d\left(\frac{mv^2}{2}\right)$$

$$\boxed{K = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}}$$ – *кинетическая энергия*

2) $$\boxed{dA = \boldsymbol{F}d\boldsymbol{r}}$$ – *элементарная работа*

$$\boxed{A_{12} = \int_1^2 \boldsymbol{F}d\boldsymbol{r}}$$ – *работа на конечном перемещении*

Работа и кинетическая энергия

$$\boxed{\begin{gathered} dK = dA \\ K_2 - K_1 = A_{12} \end{gathered}}$$

– *закон изменения кинетической энергии* (неофициально)

Для системы материальных точек:

$$K = \sum K_i$$ – *кинетическая энергия системы*

$$A_{12} = \sum A_{12i}$$ – *работа сил, действующих на систему*

$$\boxed{K_2 - K_1 = A_{12}}$$

$$P = \frac{dA}{dt}$$ – *мощность*

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{\mathbf{F}d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F}\frac{d\mathbf{r}}{dt} \Rightarrow$$

$$\boxed{P = \mathbf{F}\,\mathbf{v}}$$

Консервативные и неконсервативные силы

Силы
- **консервативные**
- **неконсервативные** → **диссипативные**, **гироскопические**

Примеры: сила тяжести – консервативная сила

сила трения – неконсервативная сила

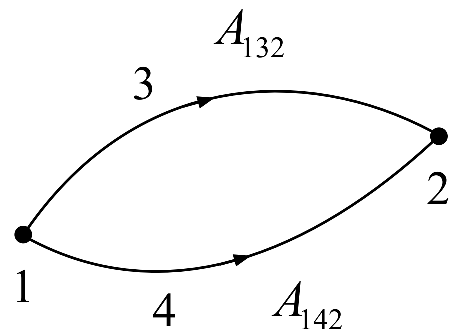
Определение:

Консервативные силы – это силы,

1) которые зависят только от координат материальных точек;

2) работа которых определяется только начальным и конечным положениями системы и не зависит от пути.

Консервативные и неконсервативные силы



Для консервативных сил:

$$\left.\begin{aligned} 1)\quad & A_{132} = A_{142} \\ 2)\quad & A_{142} = -A_{241} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad A_{142} + A_{241} = 0 \quad \text{или}$$

$$\oint dA = 0$$

Работа консервативных сил по замкнутому пути равна нулю.

<u>Примечание</u>: Центральные силы являются консервативными.

Потенциальная энергия

Консервативная система – это система, в которой действуют только консервативные силы.

Для консервативной системы A_{12} не зависит от пути $1 \to 2$ и поэтому можно определить функцию U:

Определение: $U_1 - U_2 = A_{12} \qquad (-dU = dA)$

U – *потенциальная энергия*

$$dK = dA = -dU \quad \Rightarrow \quad dK + dU = 0 \quad \Rightarrow$$

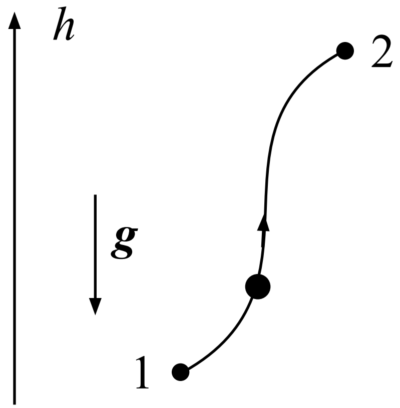
$$\boxed{K + U = \text{const}}$$

– *закон сохранения механической энергии* (для консервативных систем)

$E \equiv K + U$ – *механическая энергия*

Закон сохранения энергии

Потенциальная энергия силы тяжести



$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g}$$

$$A_{12} = \int_1^2 m\boldsymbol{g}\, d\boldsymbol{r} = -mg\int_1^2 dh = -mg(h_2 - h_1)$$

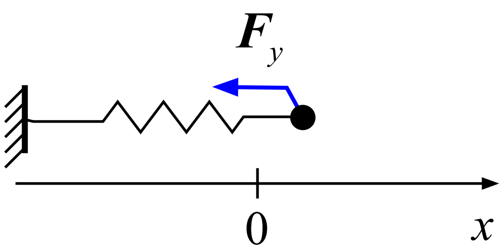
$$A_{12} = -(U_2 - U_1)$$

$$U = mgh + \underbrace{\cancel{C}}_{= 0}$$

(Нормировка $h = 0$, $U = 0$)

$$\boxed{U = mgh}$$

Потенциальная энергия силы упругости



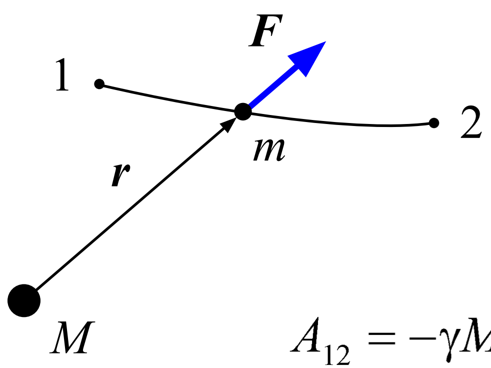
$$F_y = -kx$$

$$\left.\begin{aligned} A_{12} &= \int_1^2 \boldsymbol{F} d\boldsymbol{r} = -k\int_1^2 x\,dx = -\frac{1}{2}k\,(x_2^2 - x_1^2) \\ A_{12} &= -(U_2 - U_1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$U = \frac{kx^2}{2} + \overset{=0}{\cancel{C}}$$ (Нормировка $x = 0$, $U = 0$) $\Rightarrow$

$$\boxed{U = \frac{kx^2}{2}}$$

Потенциальная энергия гравитационного (кулоновского) поля



M – неподвижна (центр) $\quad \boldsymbol{F} = -\gamma \dfrac{Mm}{r^2}\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$

$$A_{12} = -\gamma Mm \int_1^2 \frac{\boldsymbol{r}d\boldsymbol{r}}{r^3} = -\gamma Mm \int_1^2 \frac{dr}{r^2} = -\gamma Mm\left(-\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1}\right)$$

$$A_{12} = -(U_2 - U_1)$$

$$U = -\gamma\frac{Mm}{r} + \cancel{C}^{\,=\,0}$$

(Нормировка $r = \infty$, $U = 0$)

$$\boxed{U = -\gamma\frac{Mm}{r}}$$

$$\boxed{U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r}}$$

– для кулоновского поля

Закон сохранения энергии

Закон изменения кинетической энергии:

$$dK = dA = dA_{к} + dA_{д}$$

$dA_{к}$ – работа консервативных сил,

$dA_{д}$ – работа диссипативных сил

$$dA_{к} = -dU \quad \Longrightarrow \quad dE = d(K+U) = dA_{д} \quad \Longrightarrow$$

$$\boxed{\Delta E = \Delta(K+U) = A_{д}}$$

– *закон изменения механической энергии* (неофициально)

1) В замкнутой системе $dA_{д} \le 0$, т.е. E уменьшается;
2) Уменьшение E сопровождается нагревание тел.

Закон сохранения энергии

Свяжем с внутренним состоянием тел новый вид энергии и положим, что ее убыль в точности равна работе диссипативных сил $dA_{\text{д}} = -dU_{\text{вн}}$.

$U_{\text{вн}}$ – *внутренняя энергия.*

$$K + U + U_{\text{вн}} = \text{const}$$

Для замкнутых систем сумма всех видов энергии (полная энергия) сохраняется.

В общем виде

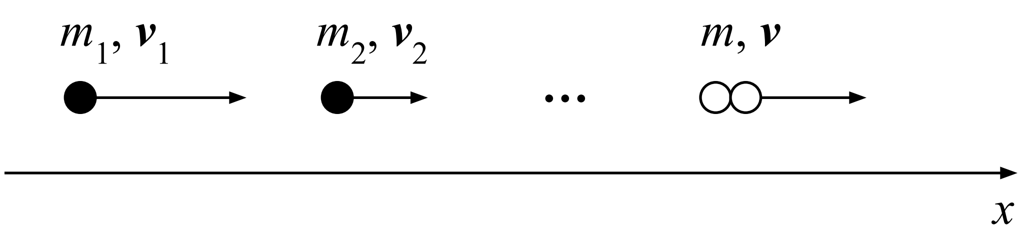
$$\boxed{\sum_i U_i = \text{const}}$$

– *закон сохранения энергии* (для замкнутых систем)

где U_i – вид энергии

Абсолютно неупругий удар

Это столкновение тел, в результате которого они соединяются вместе и движутся дальше как одно тело.



По закону сохранения импульса $m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)\, v$ $\Rightarrow$

$$\boxed{v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}}$$

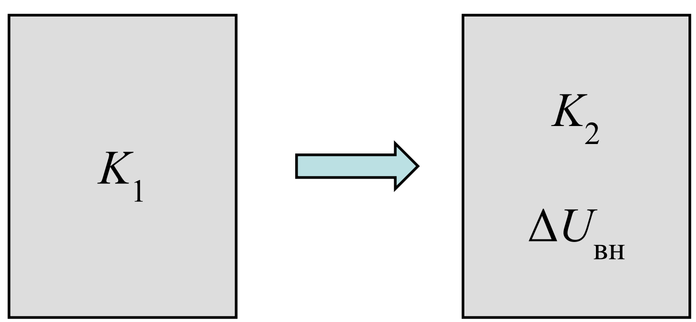
Закон сохранения энергии

Абсолютно неупругий удар

$$\left.\begin{aligned} K_1 &= \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 \\ K_2 &= \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2) v^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{K_1 - K_2 = \tfrac{1}{2}\mu (v_1 - v_2)^2}$$

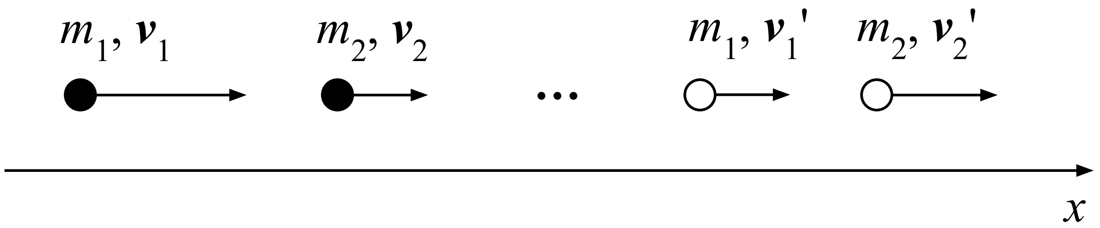
$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$ – *приведенная масса*

Неупругое столкновение шаров сопровождается потерей кинетической энергии – часть кинетической энергии переходит во внутреннюю энергию соударяющихся тел.



Абсолютно упругий удар

Это столкновение тел, в результате которого их внутренние энергии (внутреннее состояние) не изменяются. Следовательно, при таком столкновении сохраняется кинетическая энергия системы.



По закону сохранения импульса и энергии

$$\begin{cases} m_1 v_1' + m_2 v_2' = m_1 v_1 + m_2 v_2 \\ \dfrac{m_1 v_1'^2}{2} + \dfrac{m_2 v_2'^2}{2} = \dfrac{m_1 v_1^2}{2} + \dfrac{m_2 v_2^2}{2} \end{cases}$$

Система имеет два решения относительно неизвестных v_1' и v_2':

Абсолютно упругий удар

1) $v_1' = v_1$, $v_2' = v_2$ – столкновения еще не было

2) $v_1' = -v_1 + 2\dfrac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$ $\qquad v_2' = -v_2 + 2\dfrac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$

Случай, когда второй шар был неподвижен $v_2 = 0$

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \qquad v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

а) $m_1 > m_2 \;\rightarrow\; v_1' \uparrow\uparrow v_1$

б) $m_1 < m_2 \;\rightarrow\; v_1' \uparrow\downarrow v_1$

с) $m_1 = m_2 \;\rightarrow\; v_1' = 0,\; v_2' = v_1$ – обмен скоростями