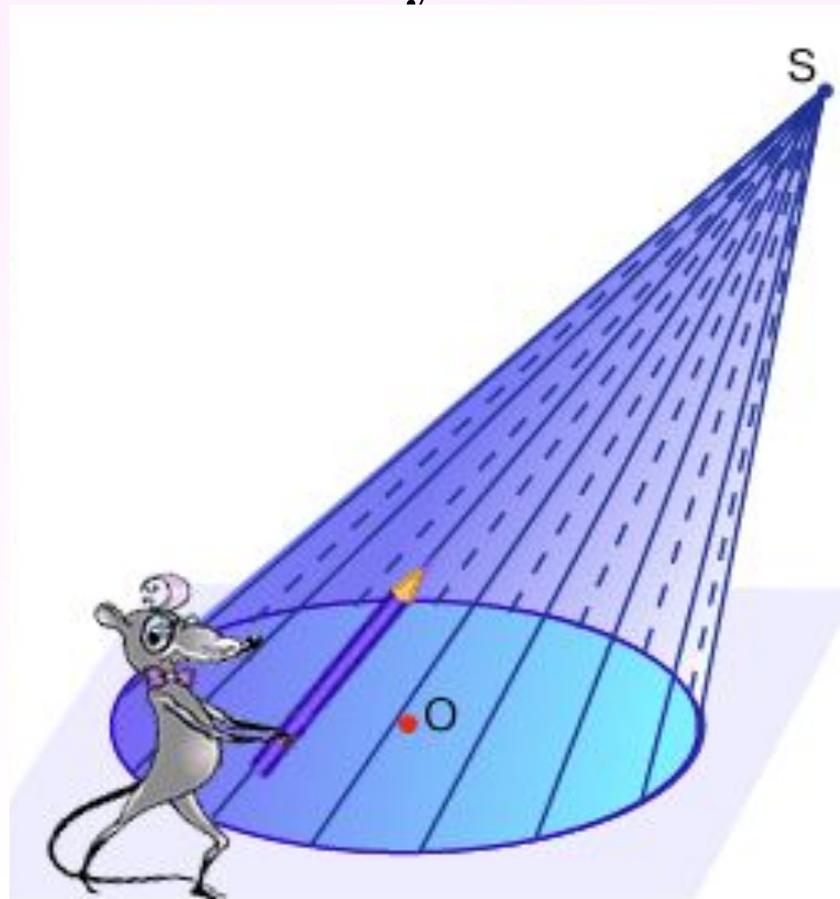


Круговым конусом называется тело ограниченное кругом – основанием конуса, и конической поверхностью, образованной отрезками, соединяющими точку, вершину конуса, со всеми точками окружности, ограничивающей основание конуса.

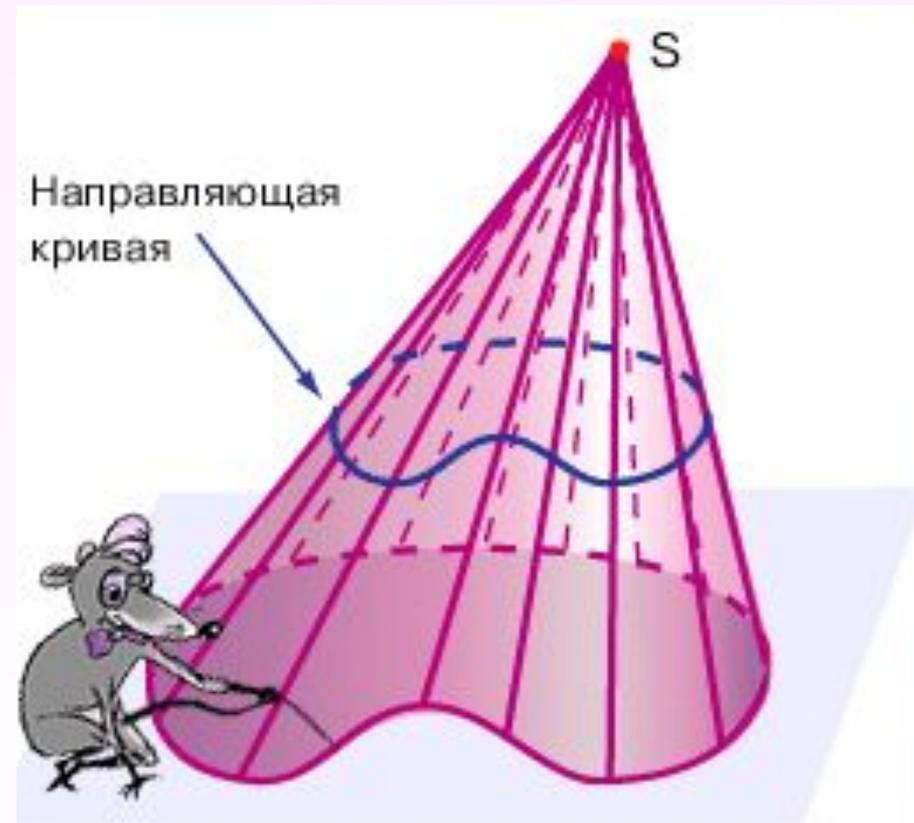


Элементы конуса.

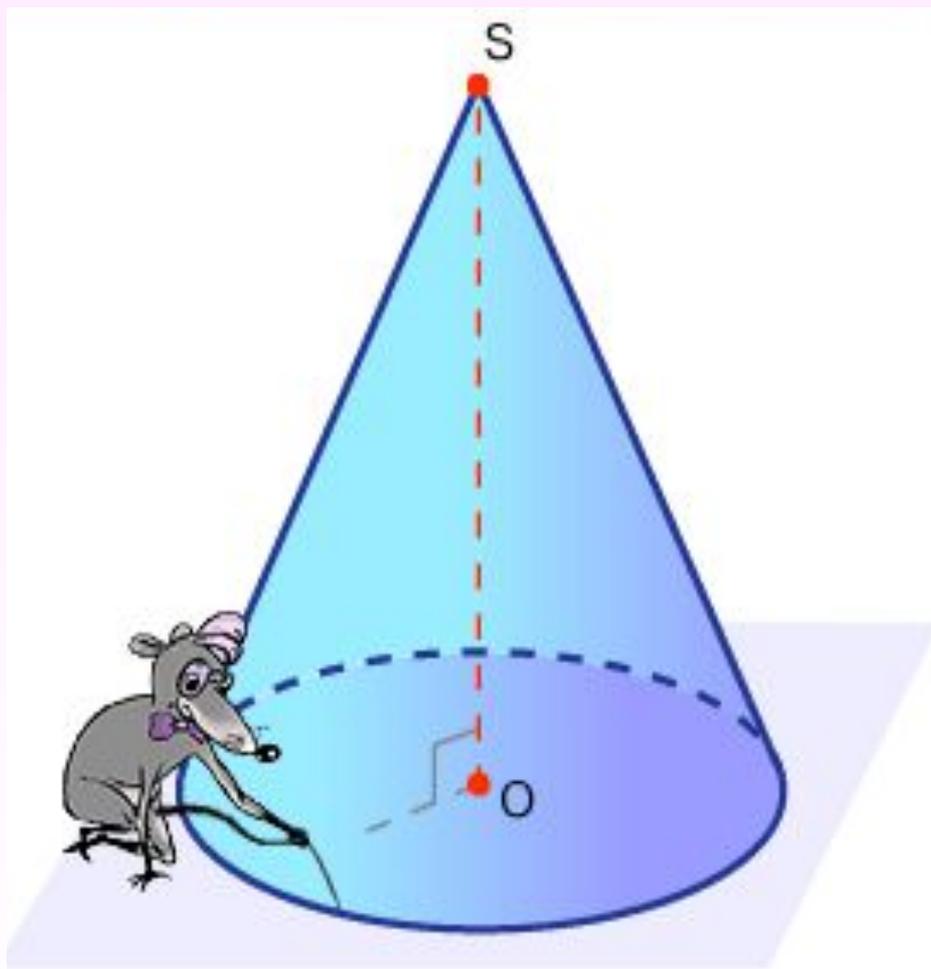


Круговой конус

Конус – это тело, которое получается, если коническую поверхность, образованную прямыми, соединяющими фиксированную точку со всеми точками какой-нибудь кривой, ограничить плоскостью.

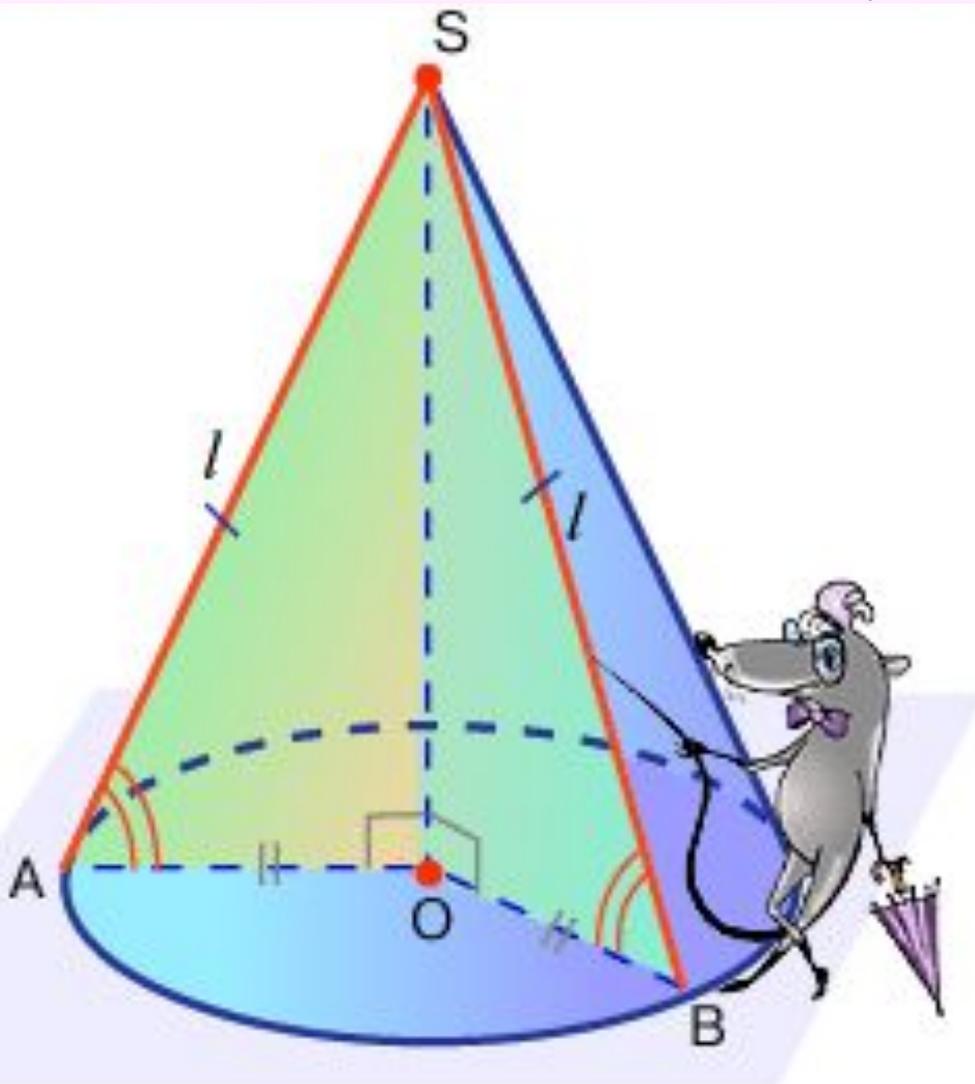


Прямой круговой конус.



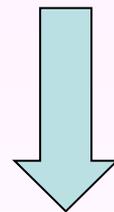
*Круговой конус называется **прямым**, если его высота попадает в центр круга.*

Все образующие конуса равны между собой и составляют один угол с основанием.



$$\triangle SOA = \triangle SOB$$

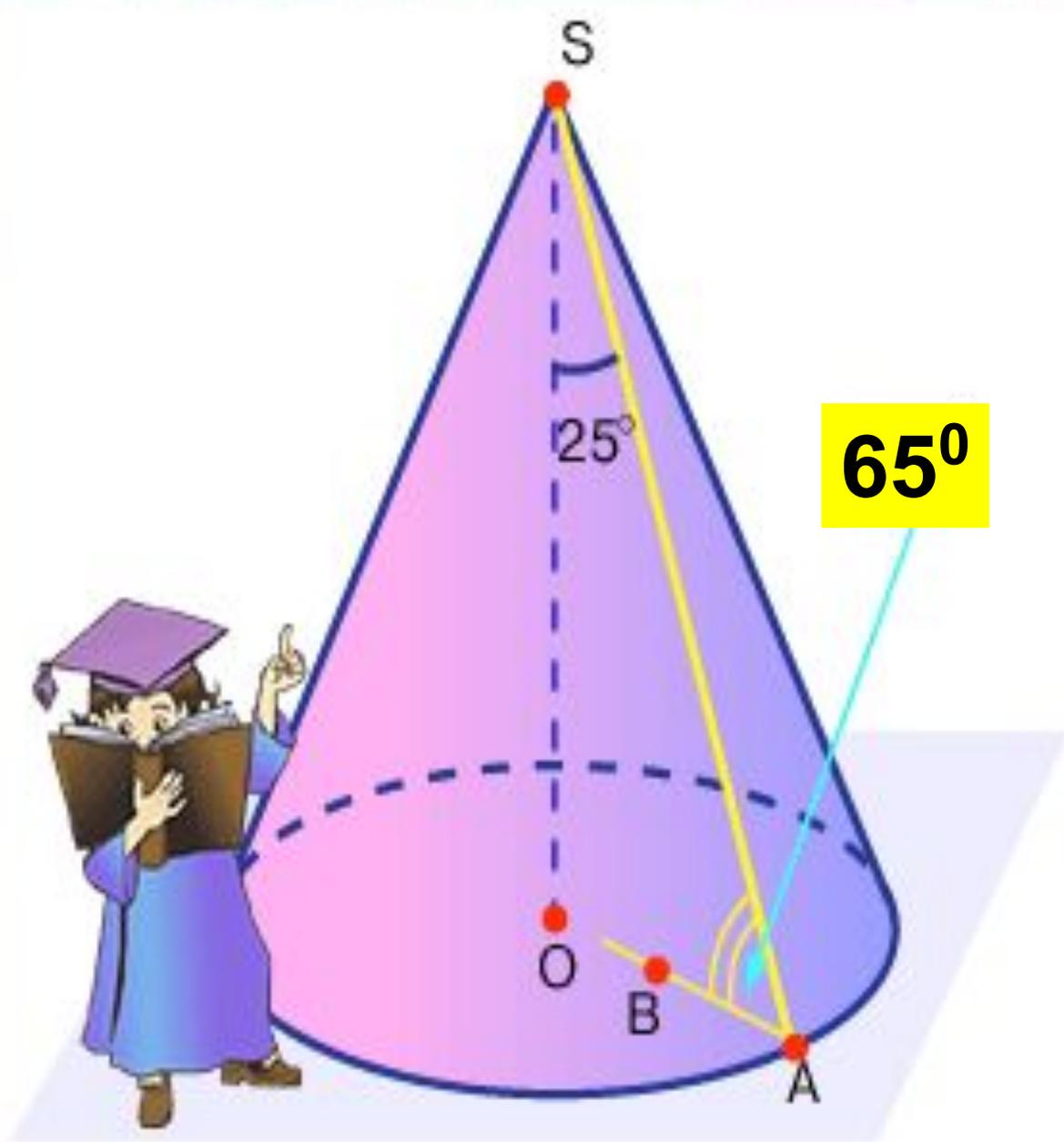
$$SA = SB = l$$



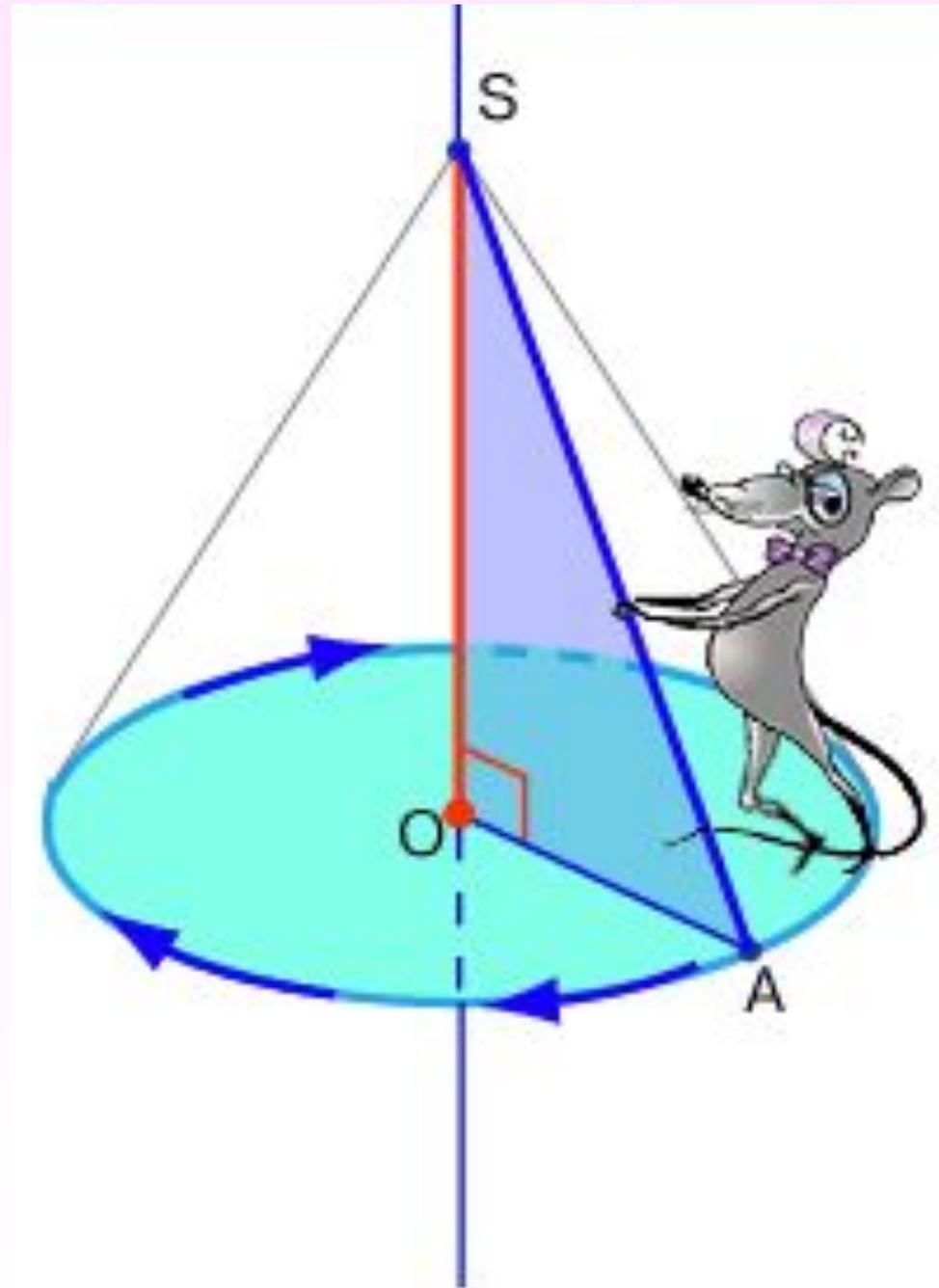
$$\angle SAO = \angle SBO$$



- *Чему равен угол между образующей и основанием конуса, если известен угол между высотой и образующей.*

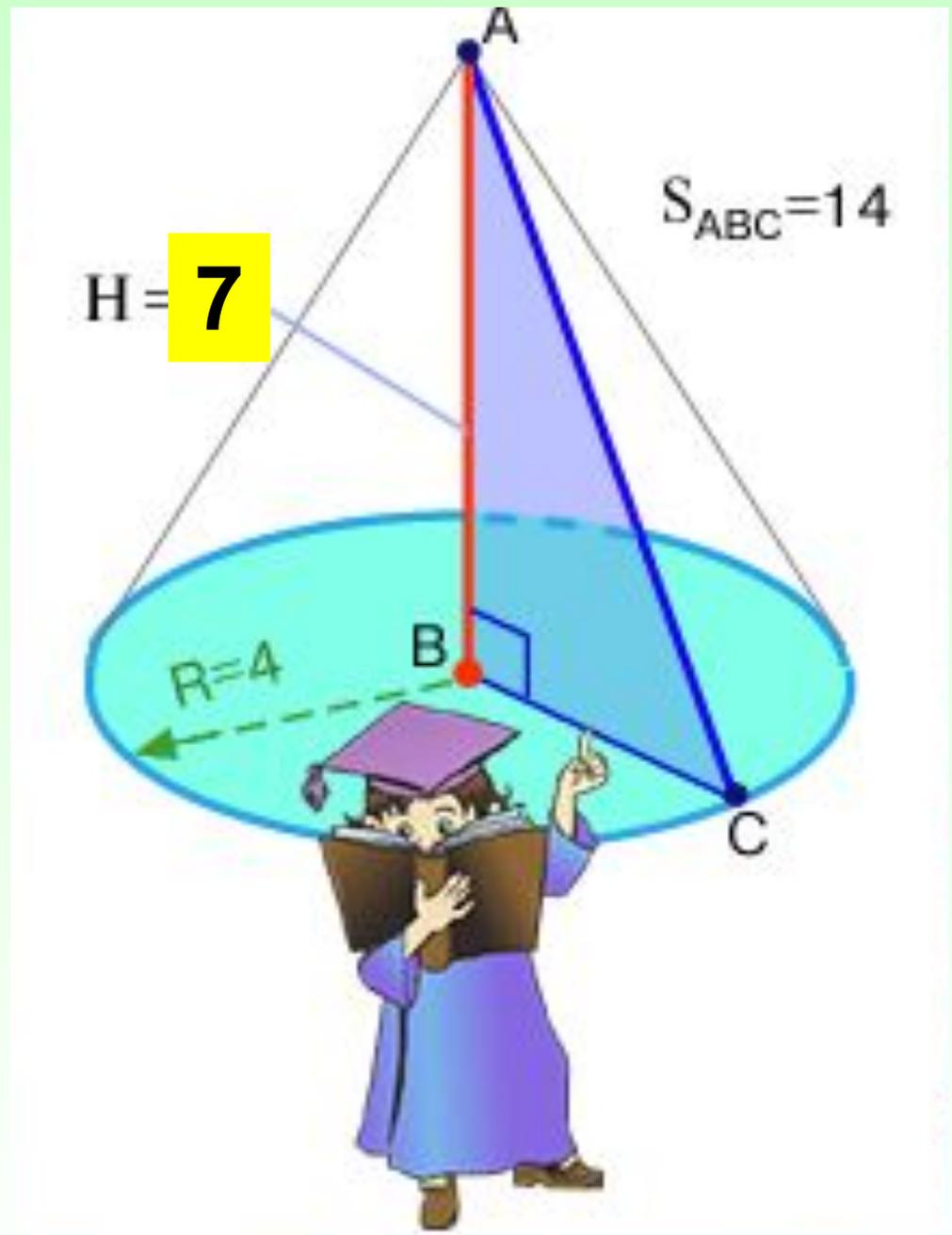


- *Конус можно получить, вращая прямоугольный треугольник вокруг одного из катетов. При этом осью вращения будет прямая, содержащая высоту конуса. Эта прямая так и называется – **осью конуса**.*



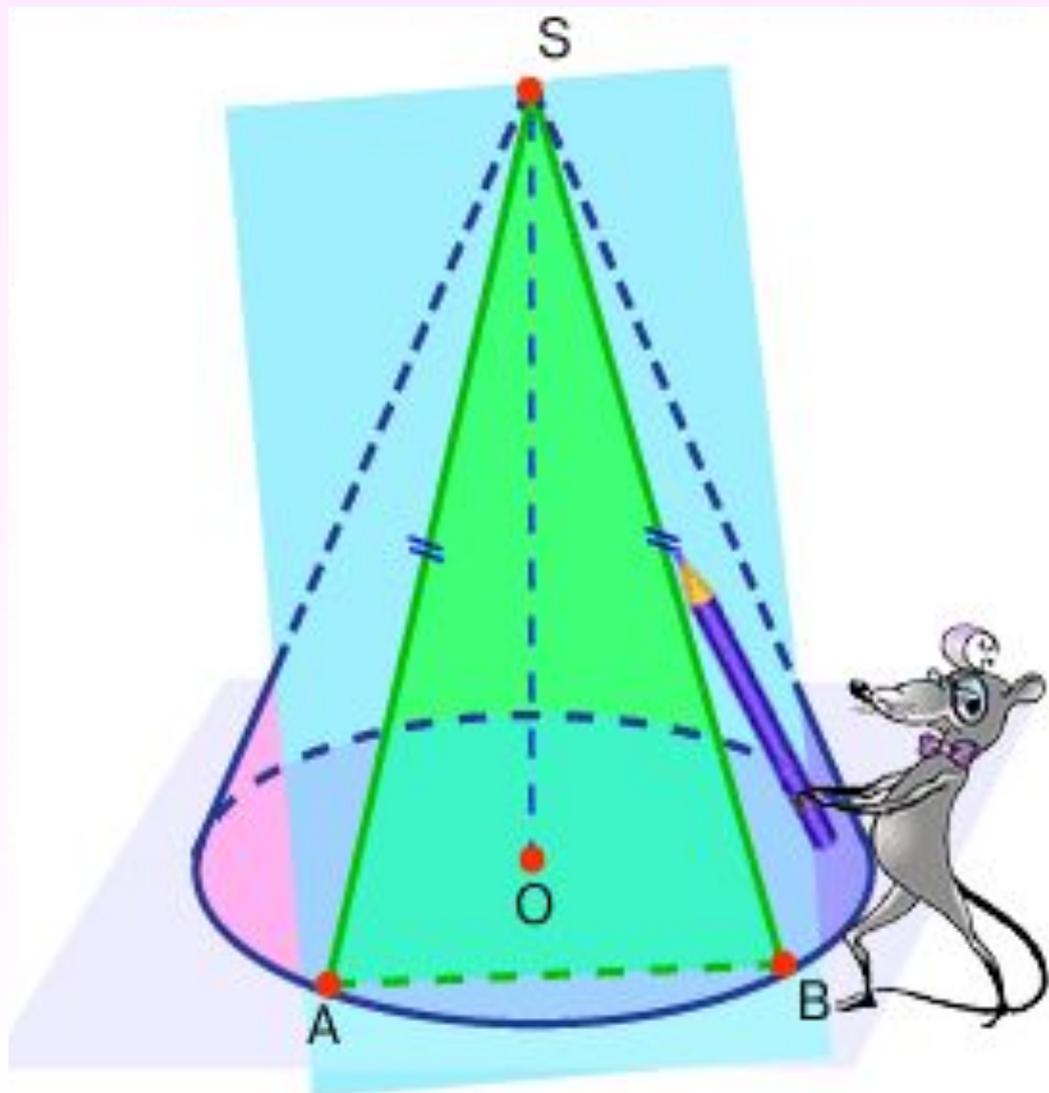


- *Конус получен при вращении прямоугольного треугольника $S = 14$. Радиус основания конуса равен 4. Определите высоту этого конуса.*



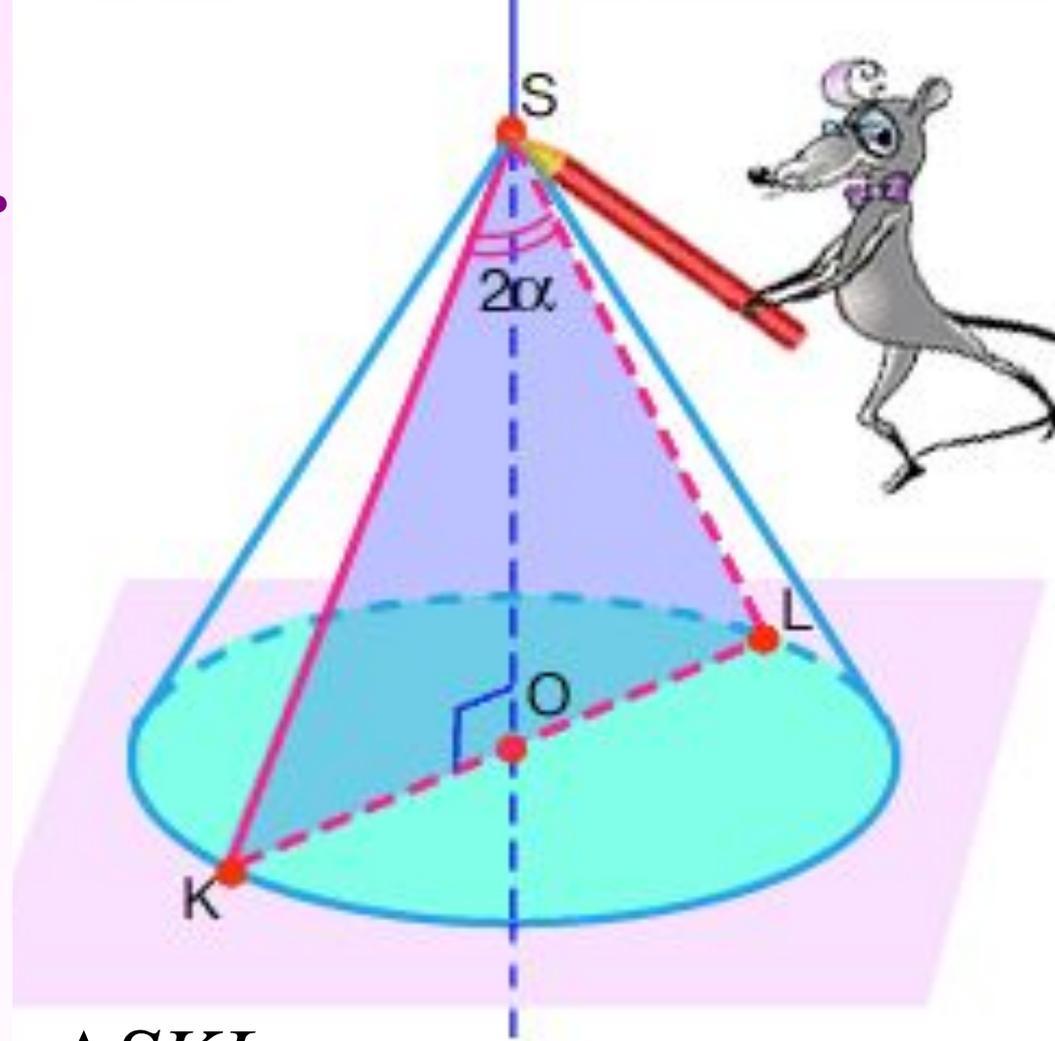
Сечения конуса.

- *Если через вершину конуса провести плоскость, пересекающую основание, то в сечении получится равнобедренный треугольник.*



Сечения конуса.

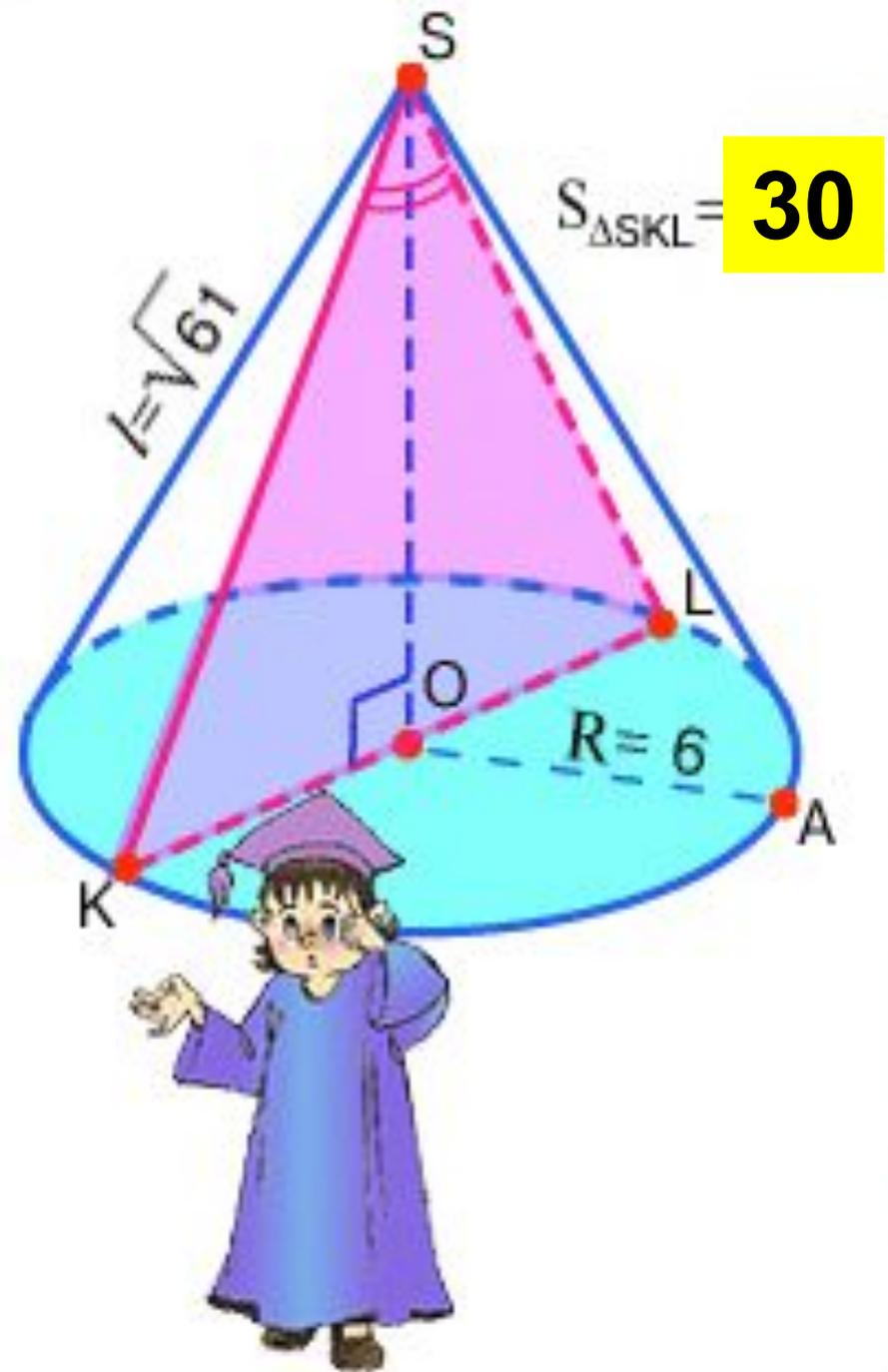
- Сечение конуса, проходящее через ось, называется **осевым**. В основании осевого сечения лежит диаметр – максимальная хорда, поэтому угол при вершине осевого сечения – это максимальный угол между образующими конуса. (**Угол при вершине конуса**).



ΔSKL – осевое сечение
 $KL = 2R$ – диаметр
 $\angle KSL = 2\alpha$ – угол при
вершине конуса.

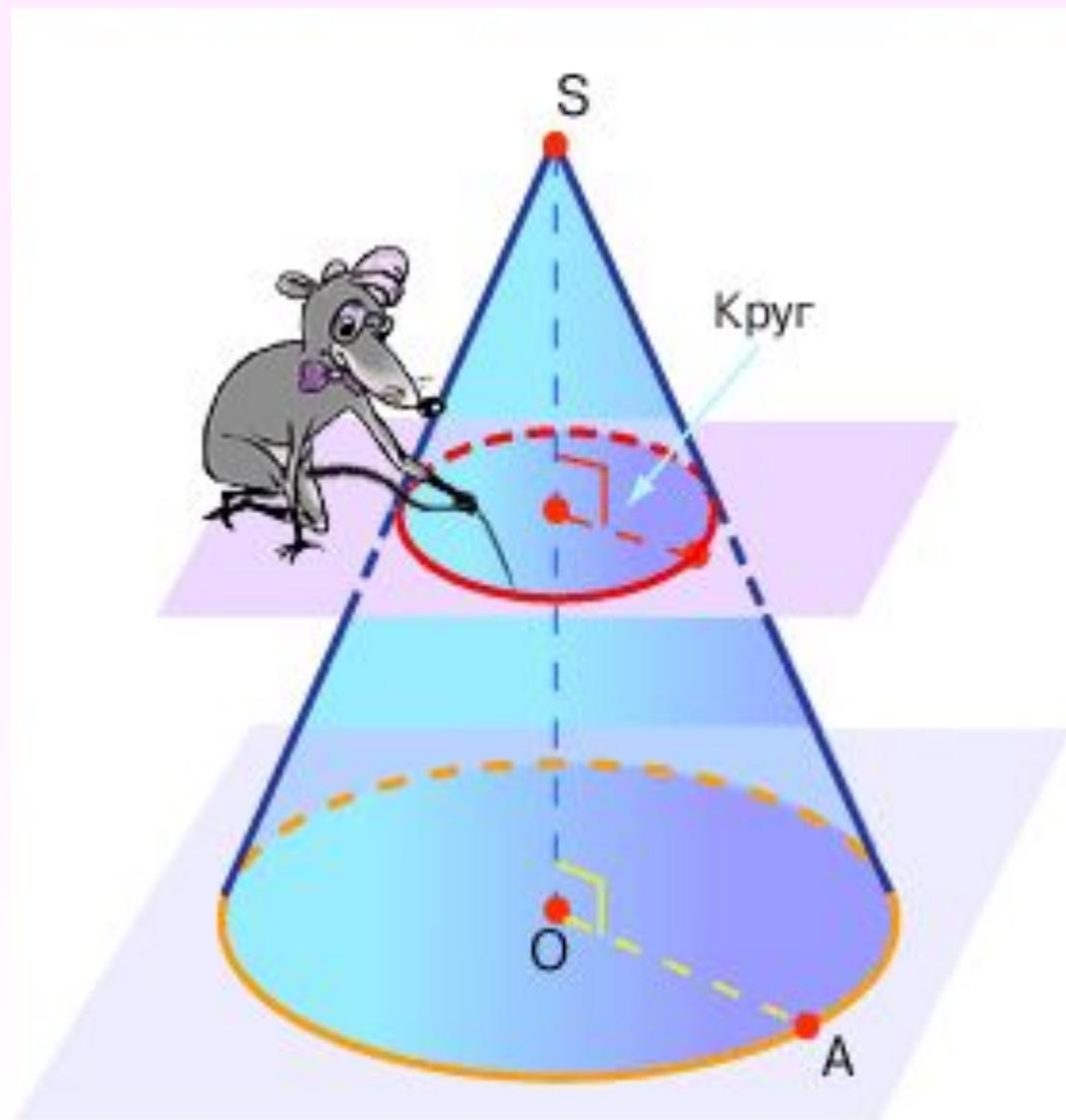


- *Найдите площадь осевого сечения, если известны радиус основания конуса и образующая.*



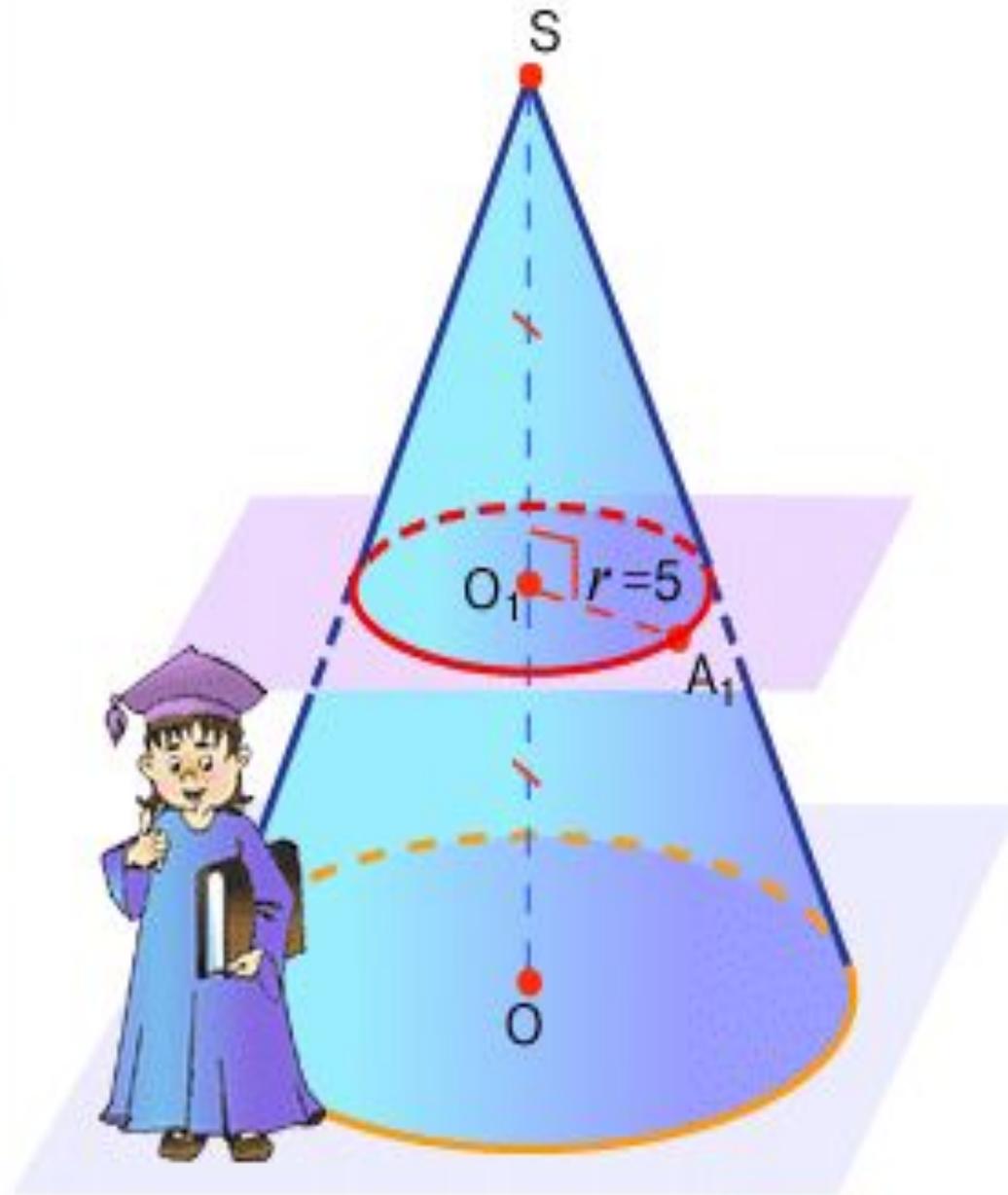
Сечения конуса.

- Любое сечение конуса плоскостью, параллельной основанию, - это *круг*.





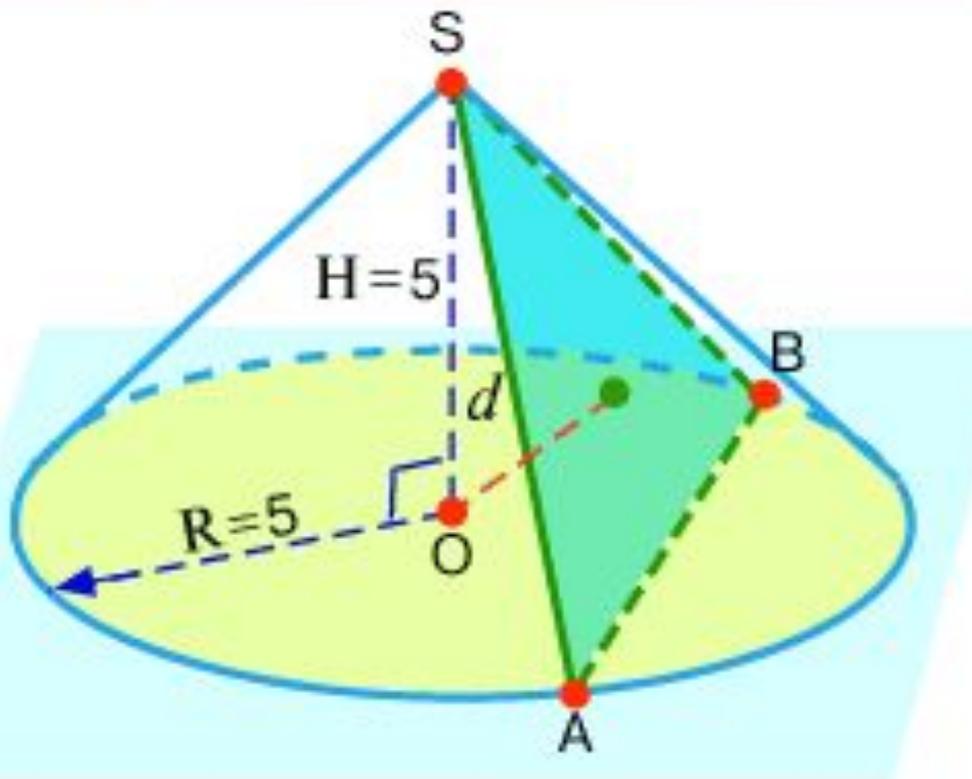
- *Через середину высоты конуса провели плоскость, перпендикулярную оси, и получили круг $R = 5$. Чему равна площадь основания конуса?*



$$S_{\text{осн}} = 100\pi$$

Задача.

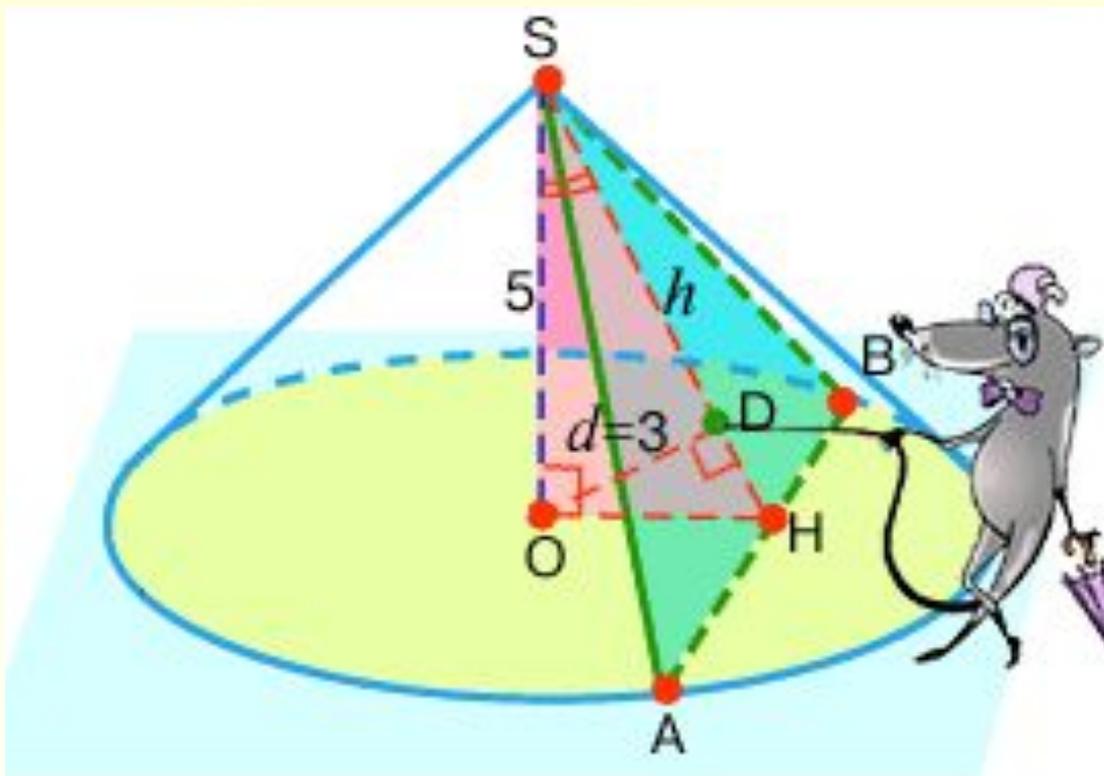
*Дано: $H = R = 5$;
 SAB – сечение;
 $d(O, SAB) = 3$.*



Найти: $S_{\Delta SAB}$



1) В сечении равнобедренный треугольник.
Найдем его высоту.



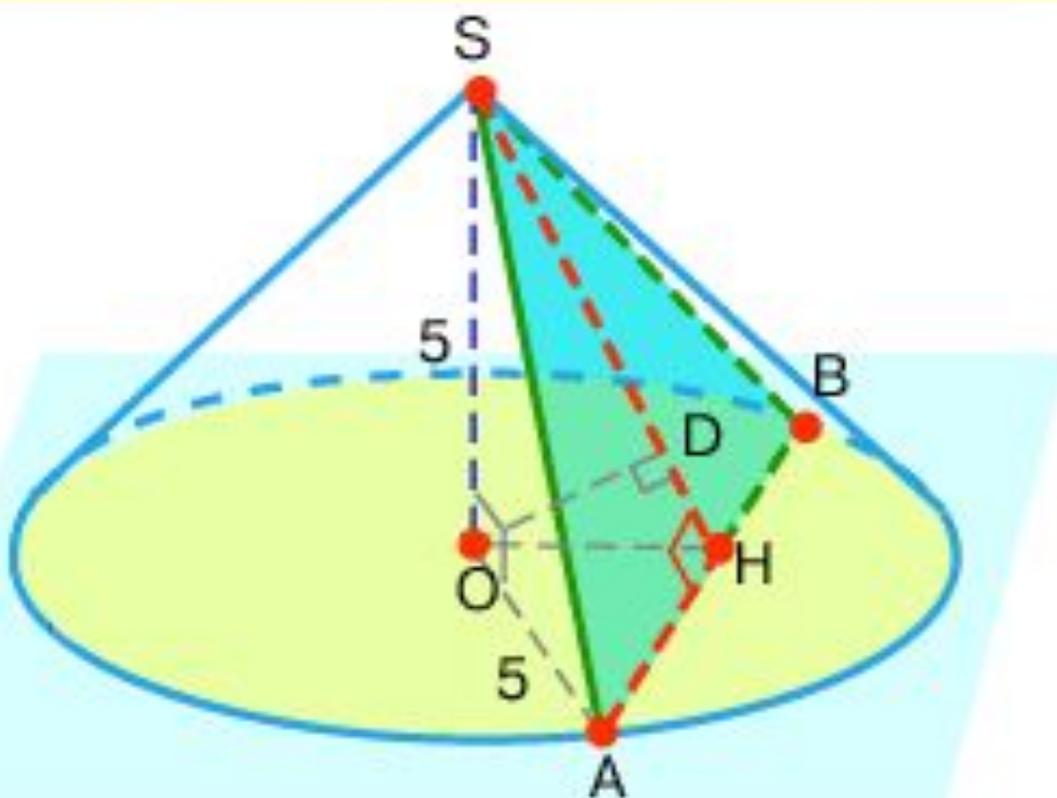
$$\triangle SOH \sim \triangle SDO$$

$$\frac{SD}{SO} = \frac{SO}{SH}$$

$$SH = \frac{SO^2}{SD} = \frac{5 \cdot 5}{\sqrt{5^2 - 3^2}} = \frac{25}{4}$$



2) *Определим боковые стороны и основание треугольника, являющегося сечением.*



Из $\triangle SOA$:

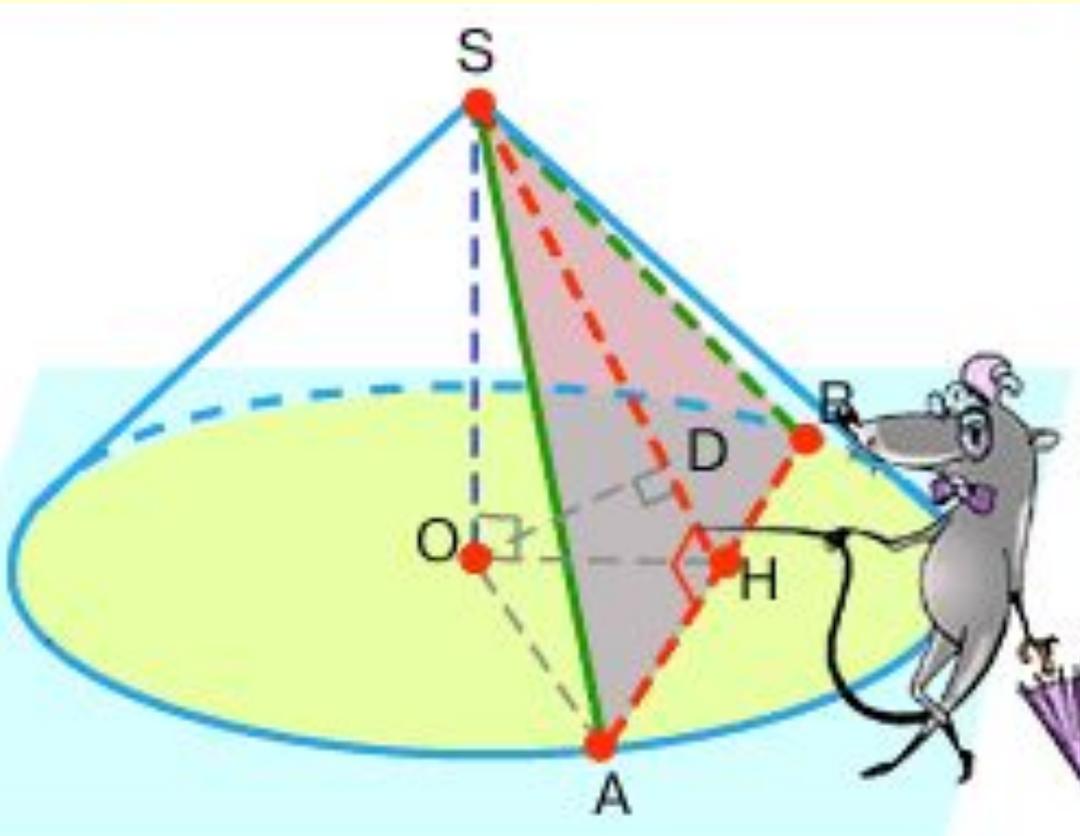
$$SA = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$$

Из $\triangle SAH$:

$$AH = \sqrt{SA^2 - SH^2} = \frac{\sqrt{175}}{4} = \frac{5\sqrt{7}}{4}$$



3) Вычислим площадь треугольника.



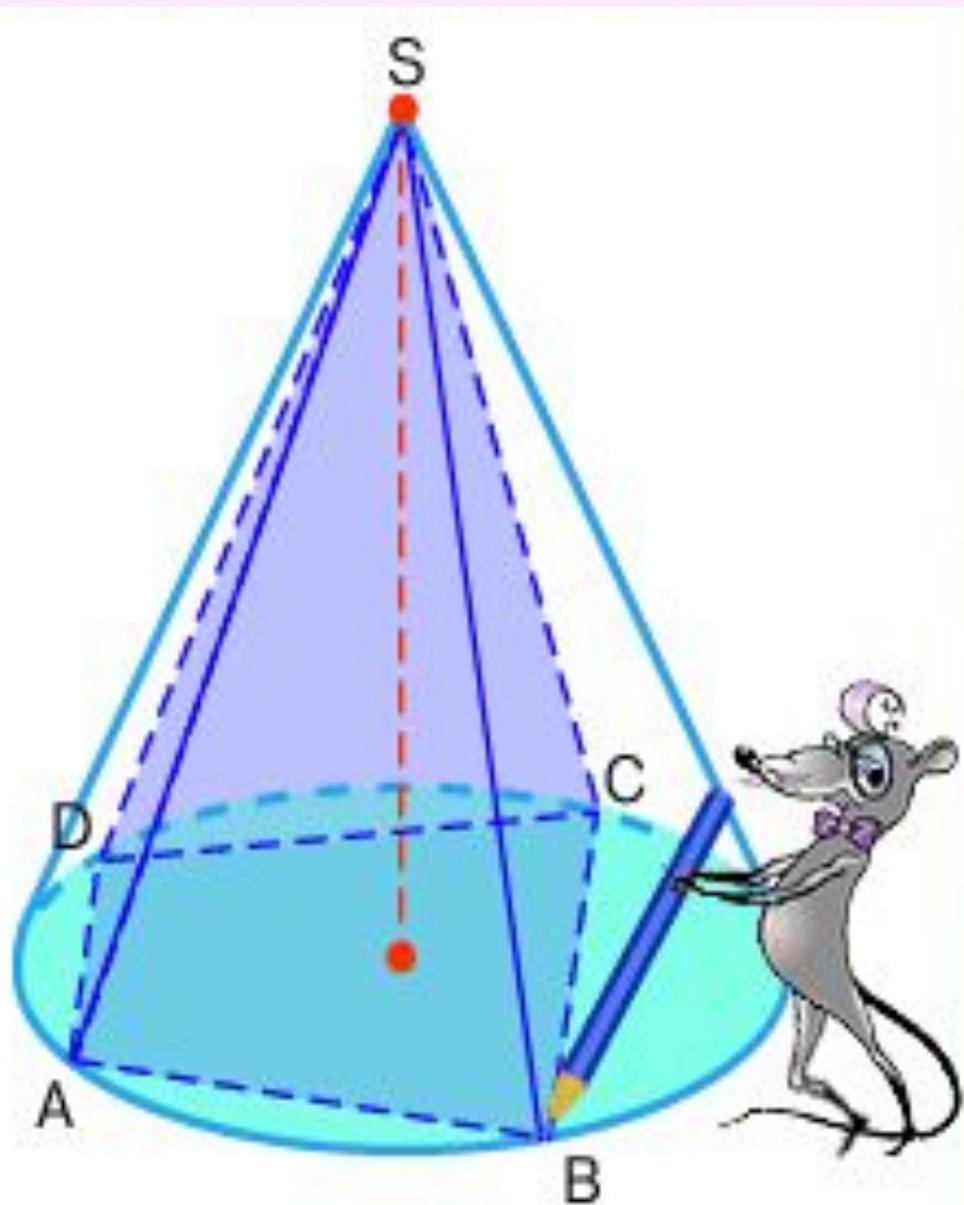
$$SH = \frac{25}{4} \quad AH = \frac{5\sqrt{7}}{4}$$

$$AB = 2 \cdot AH = \frac{5\sqrt{5}}{2}$$

$$S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2} SH \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{4} \cdot \frac{5\sqrt{7}}{2} = \frac{125\sqrt{7}}{16}$$



Вписанная и описанная пирамиды.



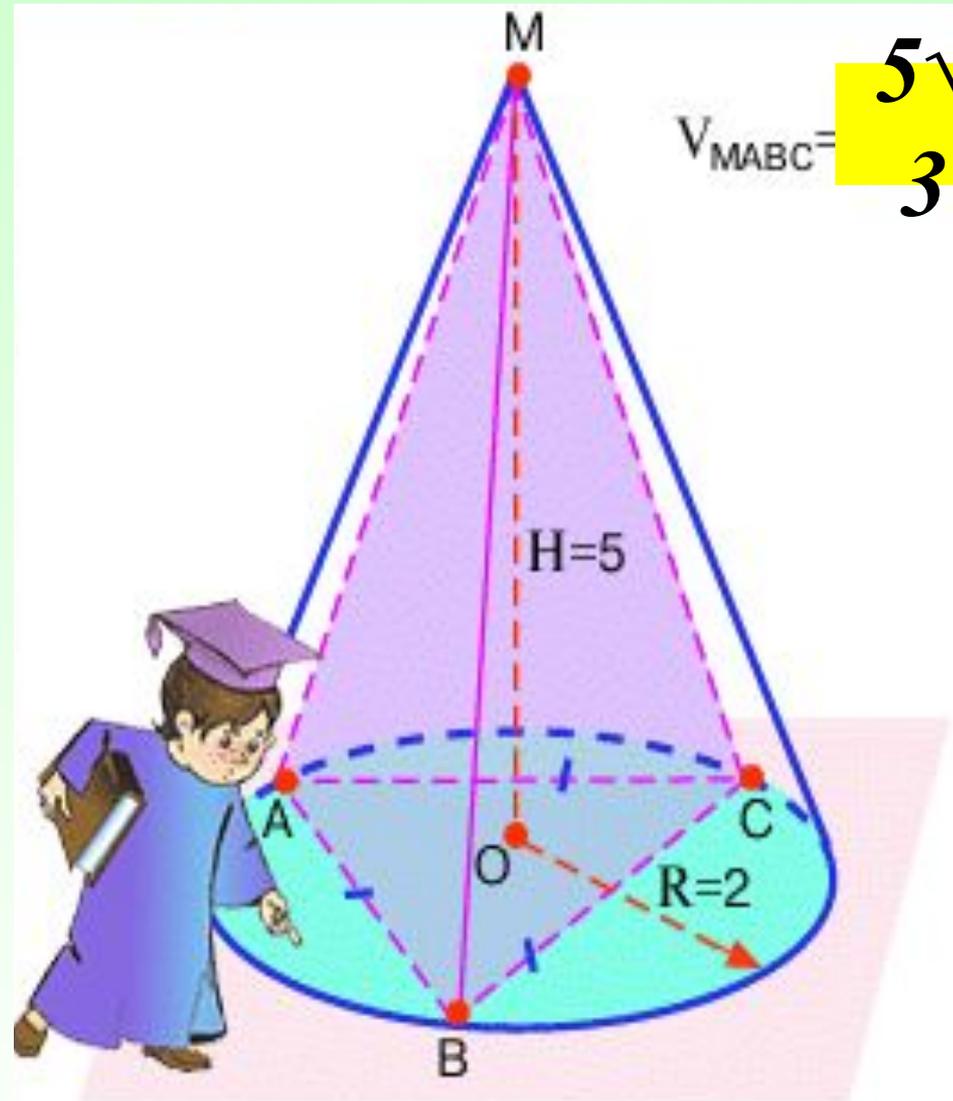
Пирамидой, вписанной в конус, называется такая пирамида, основание которой – многоугольник, вписанный в основание конуса, а вершина совпадает с вершиной конуса.



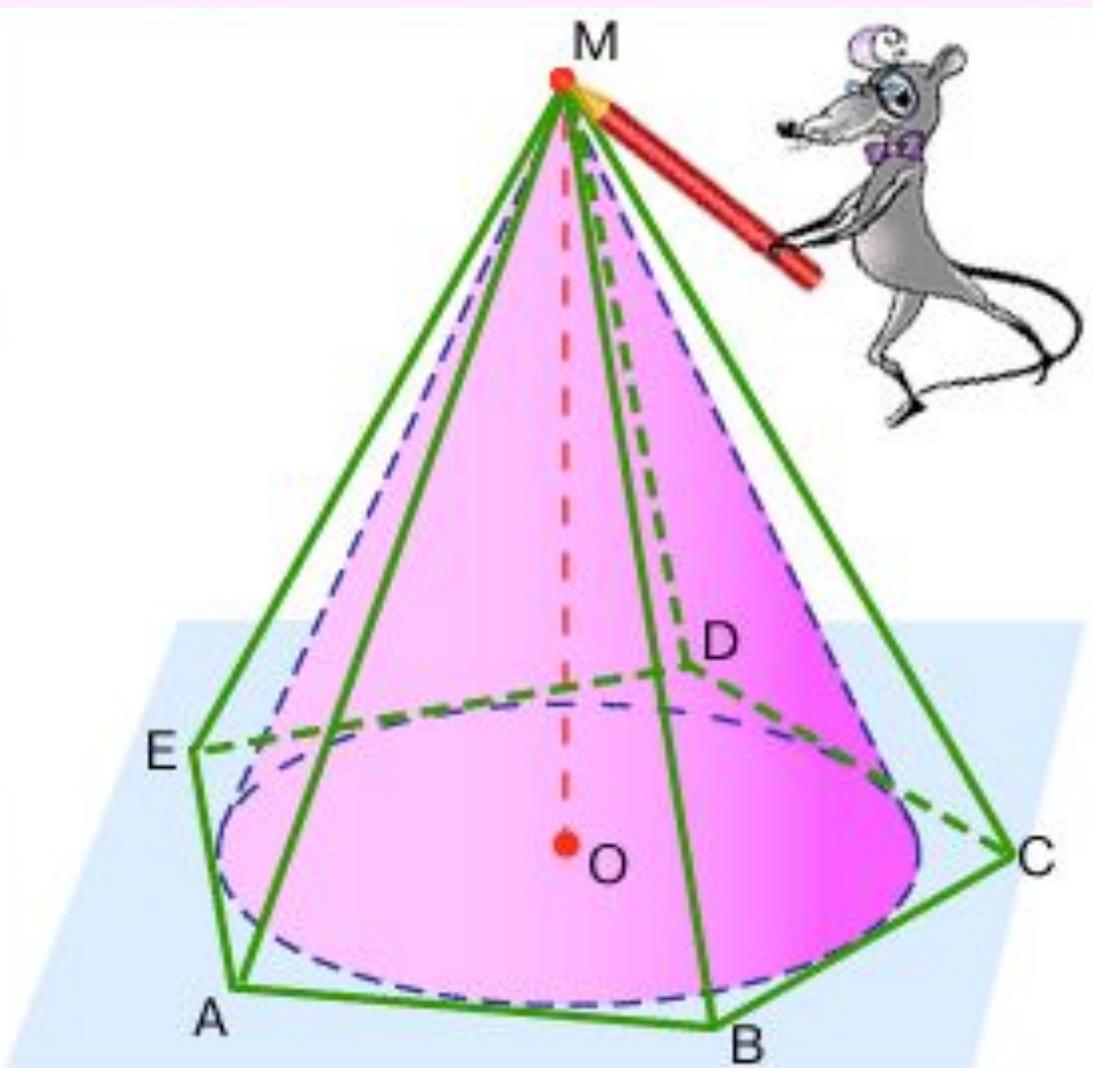
- Пусть высота конуса равна 5, а радиус основания – 2.

В конус вписана правильная треугольная пирамида.

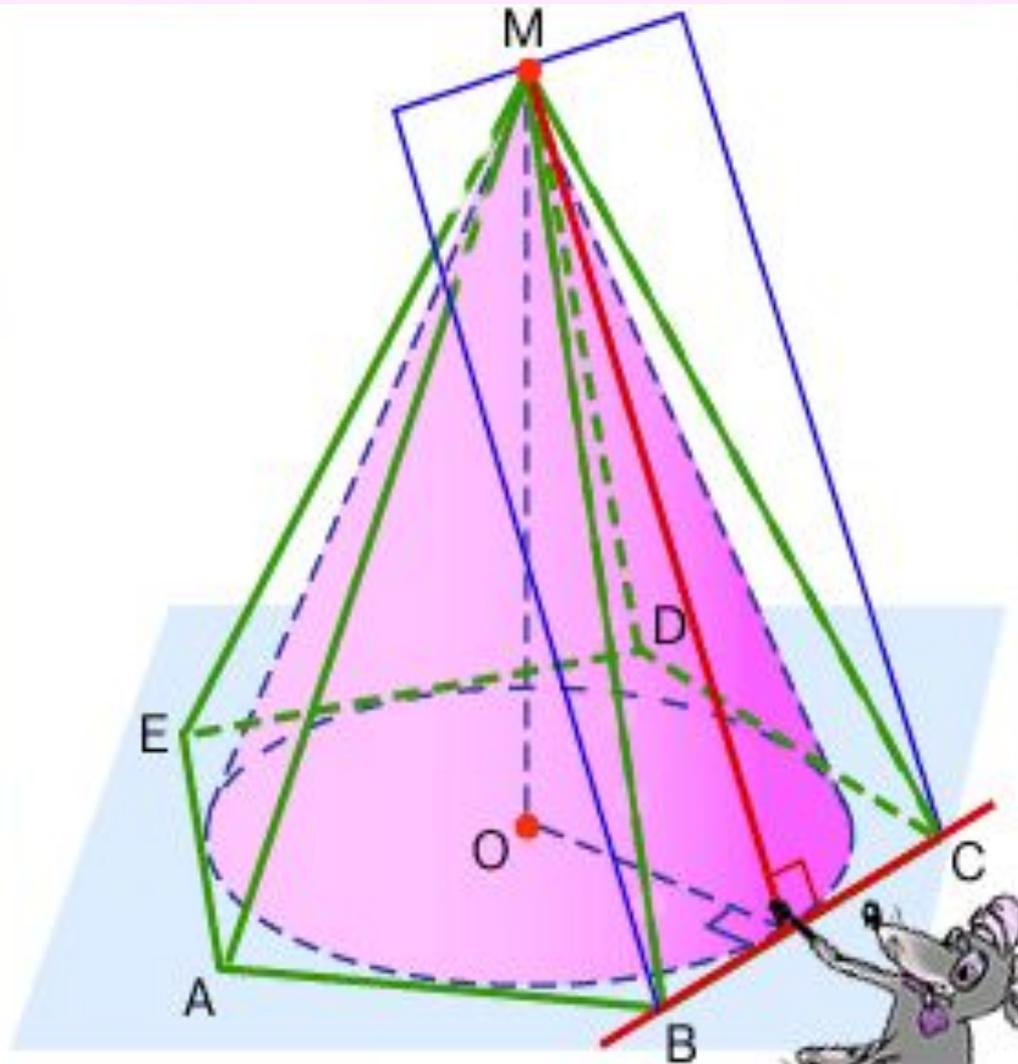
Определите ее объем.



Вписанная и описанная пирамиды.



Пирамида называется описанной около конуса, если ее основание – это многоугольник, описанный около основания конуса, а вершина совпадает с вершиной конуса.

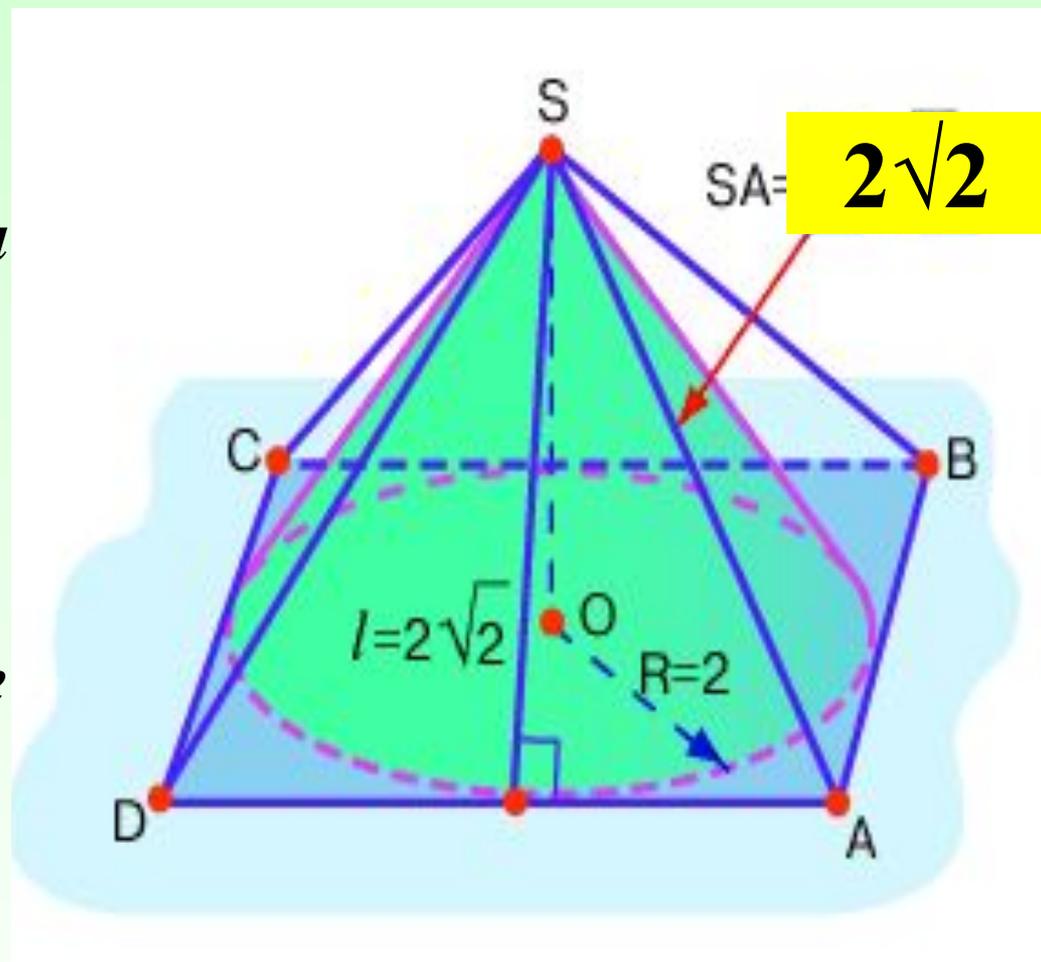


Плоскости граней касаются поверхности конуса.

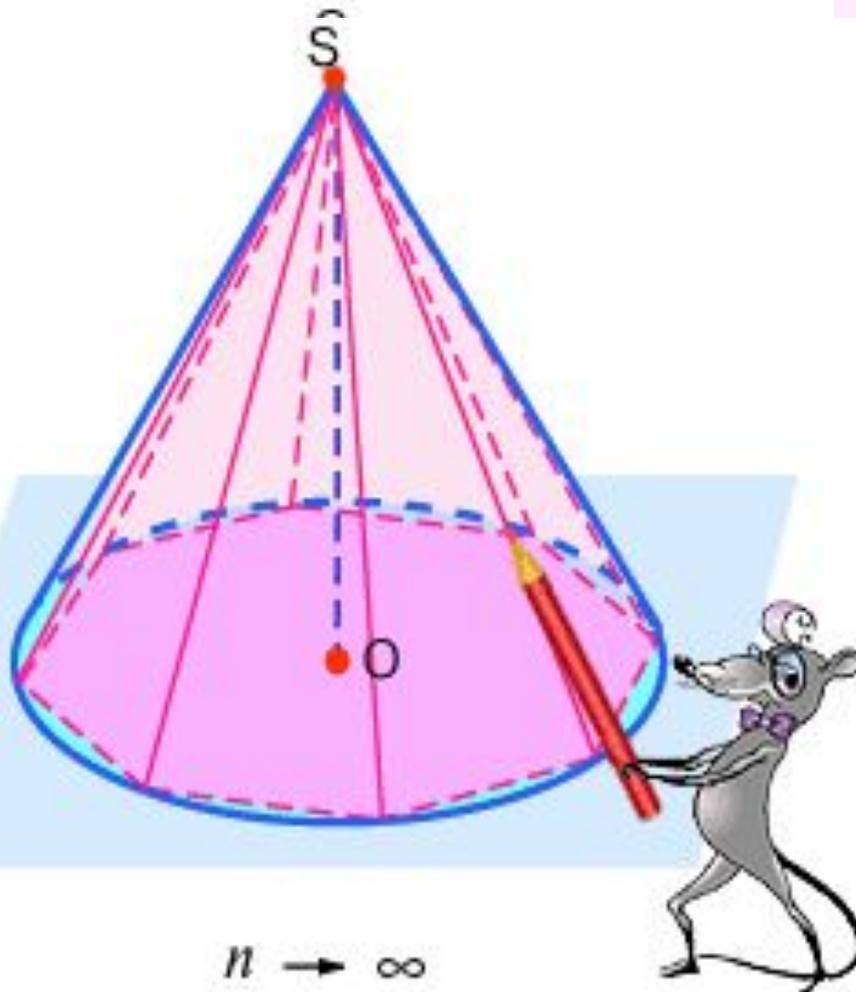
Плоскости боковых граней описанной пирамиды проходят через образующую конуса и касательную к окружности основания, т.е. касаются боковой поверхности конуса.

?

- *Вокруг конуса описана правильная четырехугольная пирамида. Радиус основания и образующая конуса известны. Найдите боковое ребро пирамиды.*



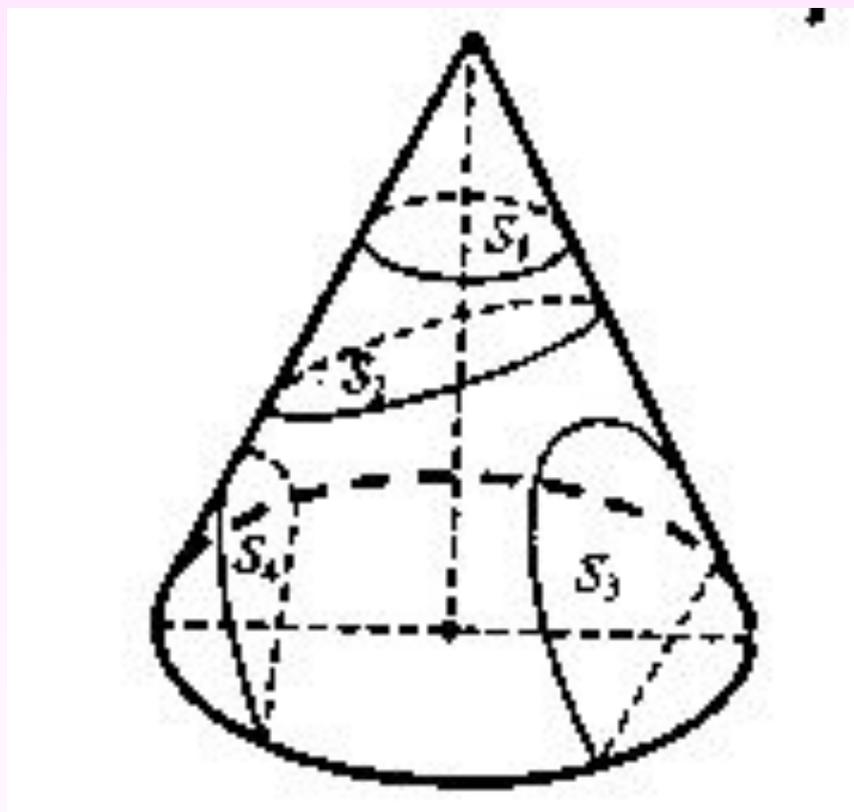
Боковая поверхность конуса.



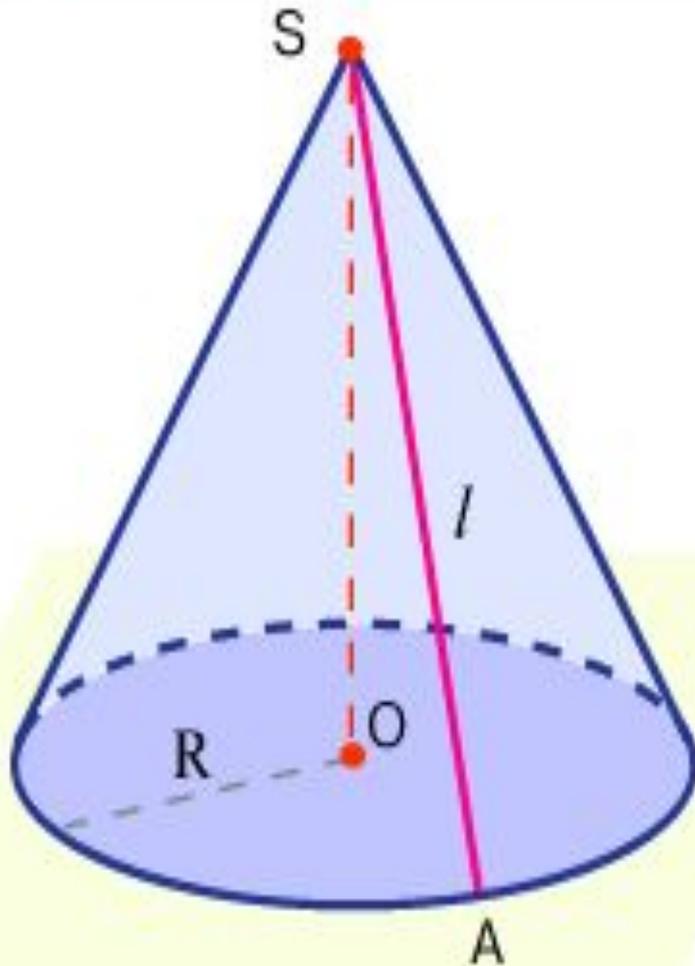
Под боковой поверхностью конуса мы будем понимать предел, к которому стремится боковая поверхность вписанной в этот конус правильной пирамиды, когда число боковых граней неограниченно увеличивается.

$n \rightarrow \infty$
Сбок. пов. пирамиды \rightarrow Сбок. пов. конуса





Теорема. *Площадь боковой поверхности конуса равна половине произведения длины окружности основания на образующую.*



Дано:

R – радиус основания конуса,

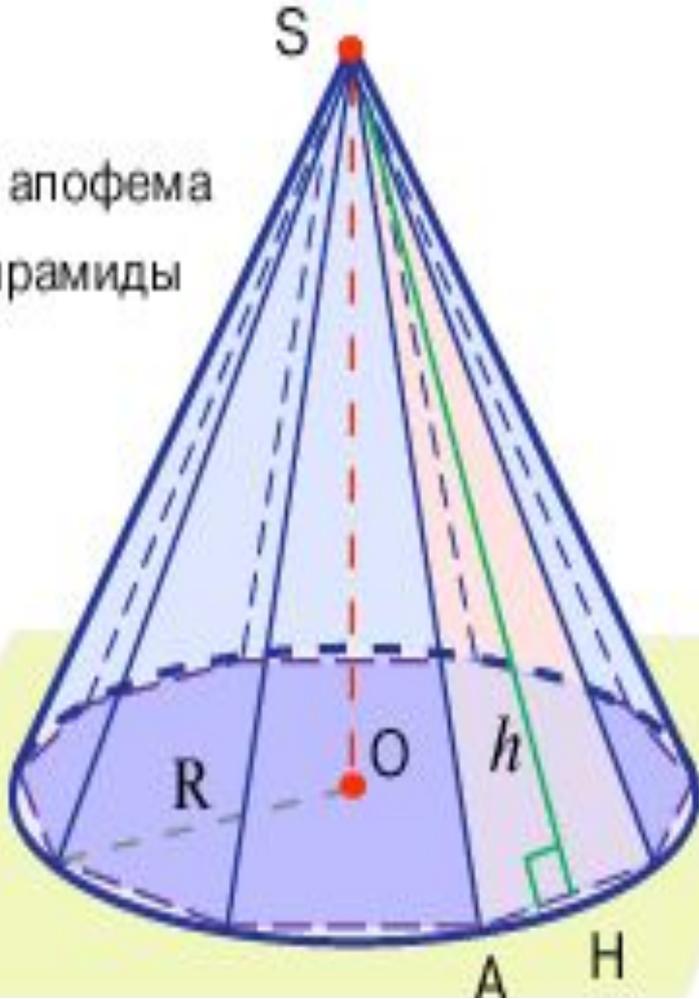
l – образующая конуса.

Доказать:

$$S_{\text{бок.кон.}} = \pi Rl$$

Доказательство:

h – апофема
пирамиды



$$S_{\text{бок.пир.}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн.пир.}} \cdot h$$

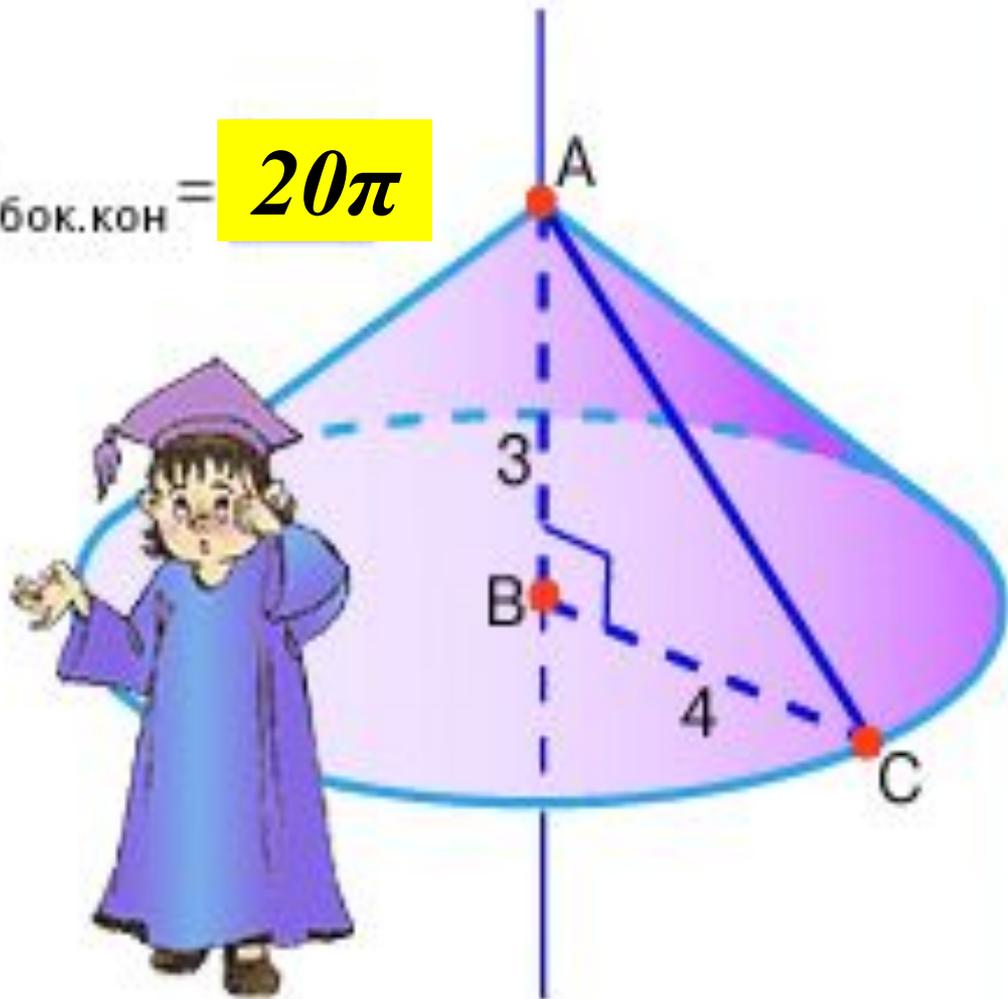
$$\begin{array}{l} h \rightarrow l \\ P_{\text{осн.пир.}} \rightarrow 2\pi R \end{array}$$

$$\underline{S_{\text{бок.кон.}}} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot Rl = \underline{\pi Rl}$$

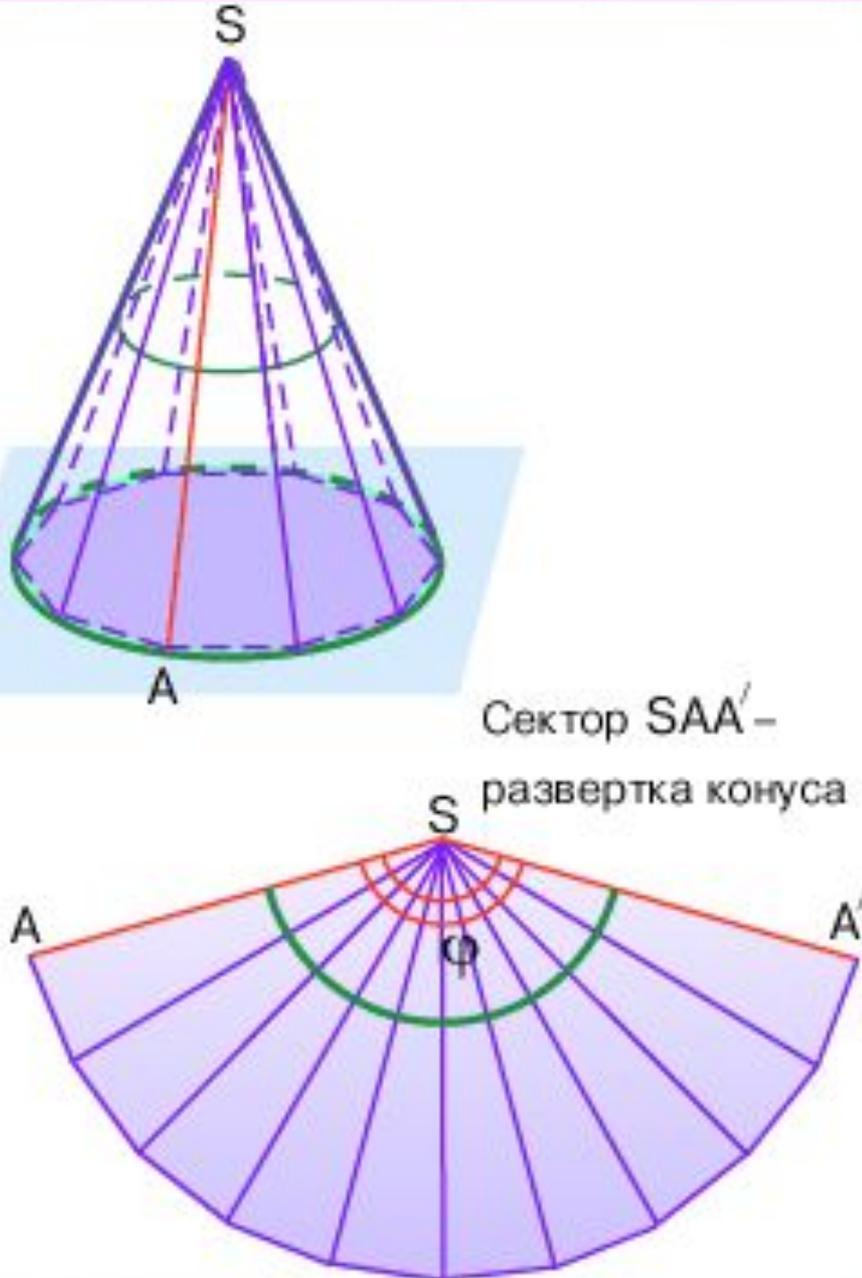
?

- Пусть конус будет получен от вращения прямоугольного треугольника с известными катетами. Найдите боковую поверхность этого конуса.

$$S_{\text{бок.кон}} = 20\pi$$

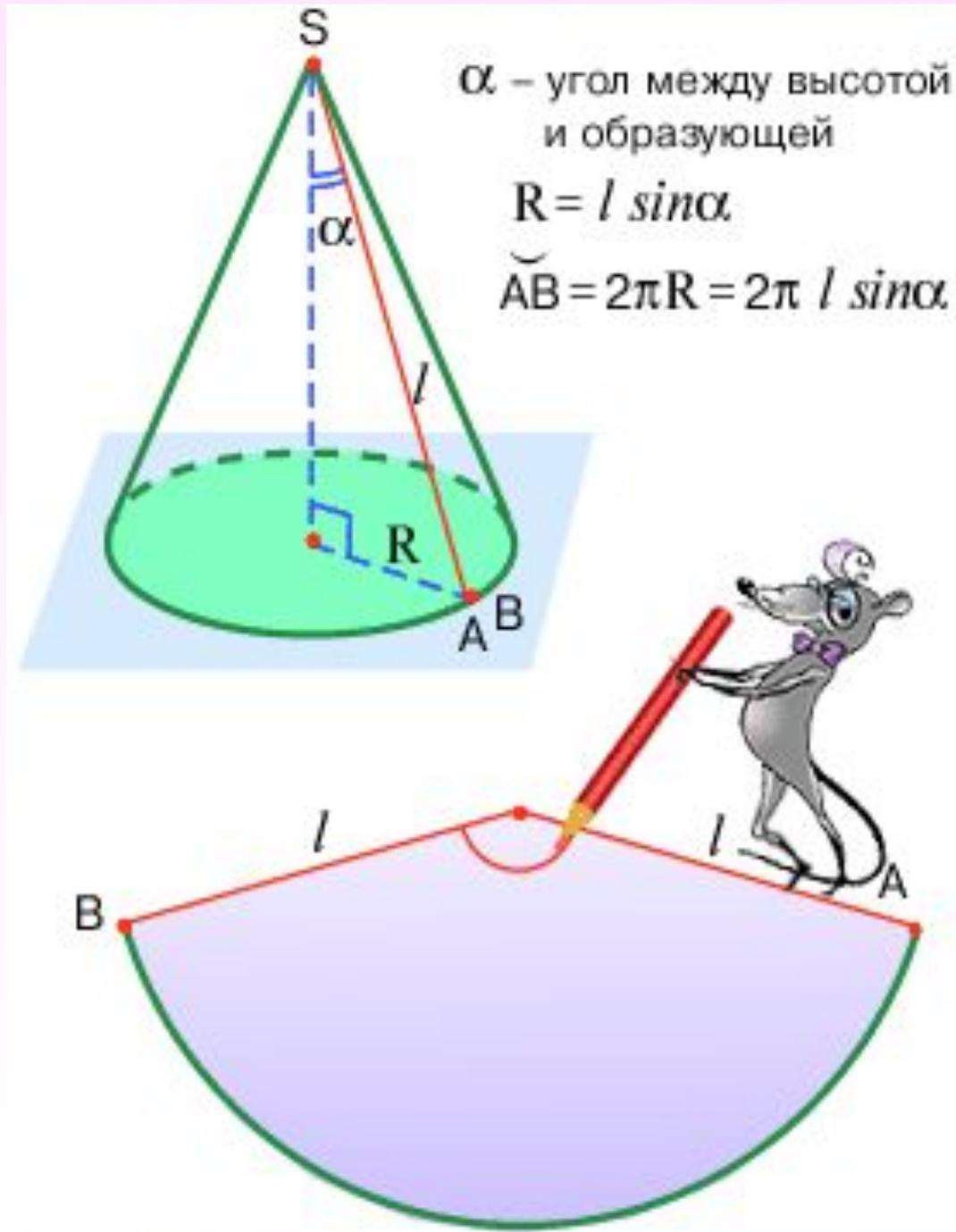


Развертка конуса.

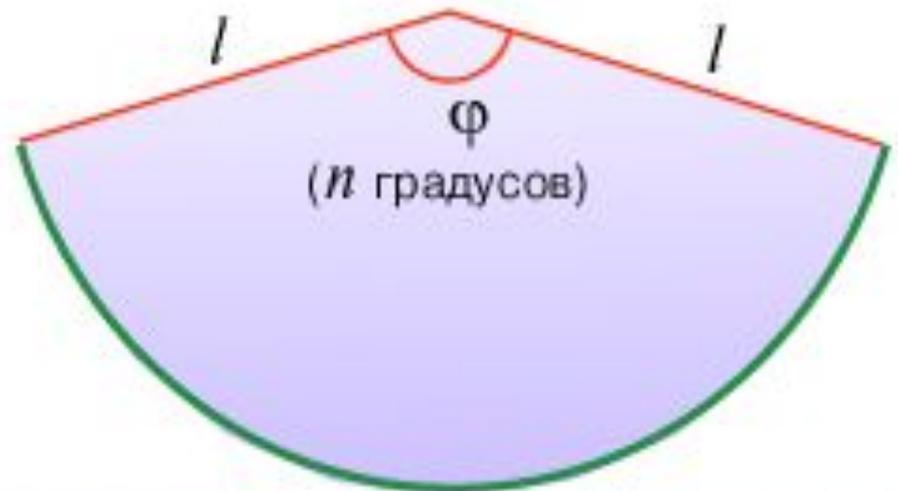
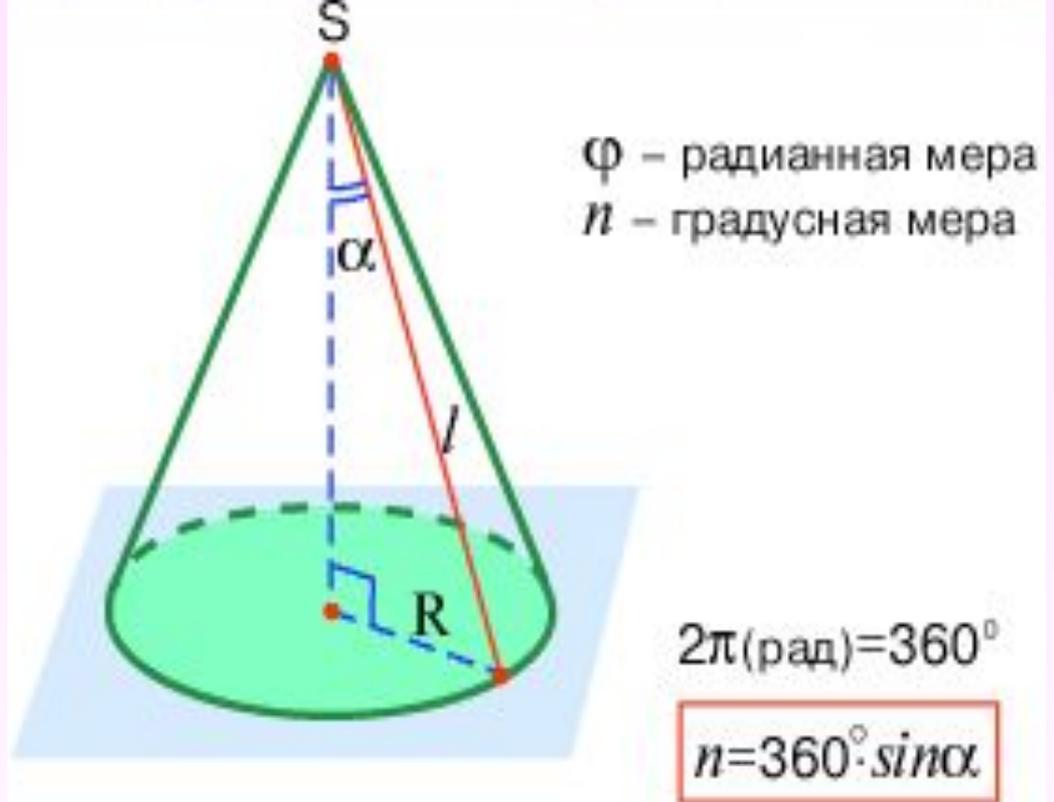


Развертка конуса – это круговой сектор. Его можно рассматривать как развертку боковой поверхности вписанной правильной пирамиды, у которой число боковых граней бесконечно увеличивается.

- *Зная угол, образованный высотой и образующей конуса, можно вычислить угол сектора, полученного при развертке конуса, и наоборот.*

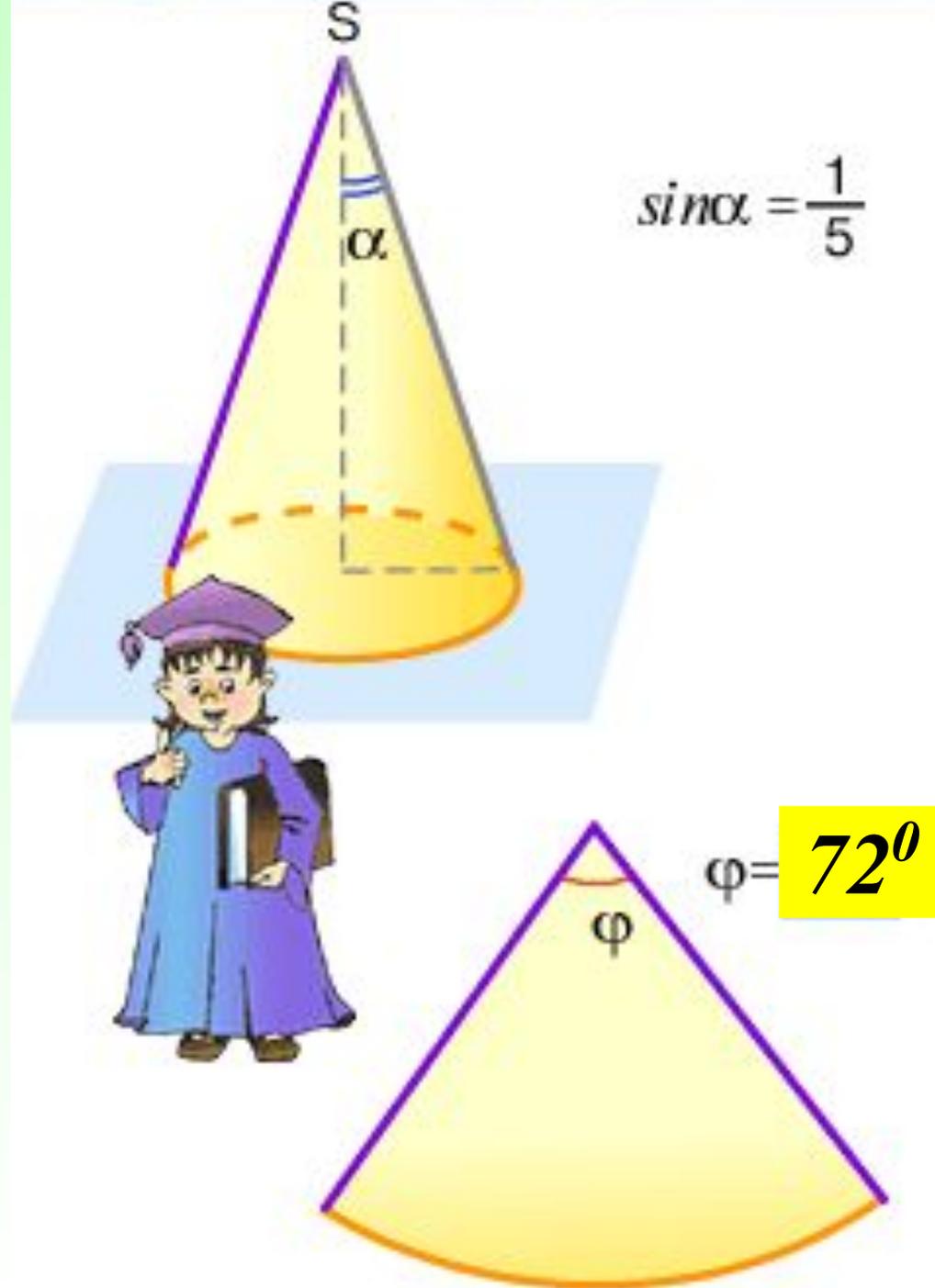


- *Найдем выражение для градусной меры угла развертки конуса.*

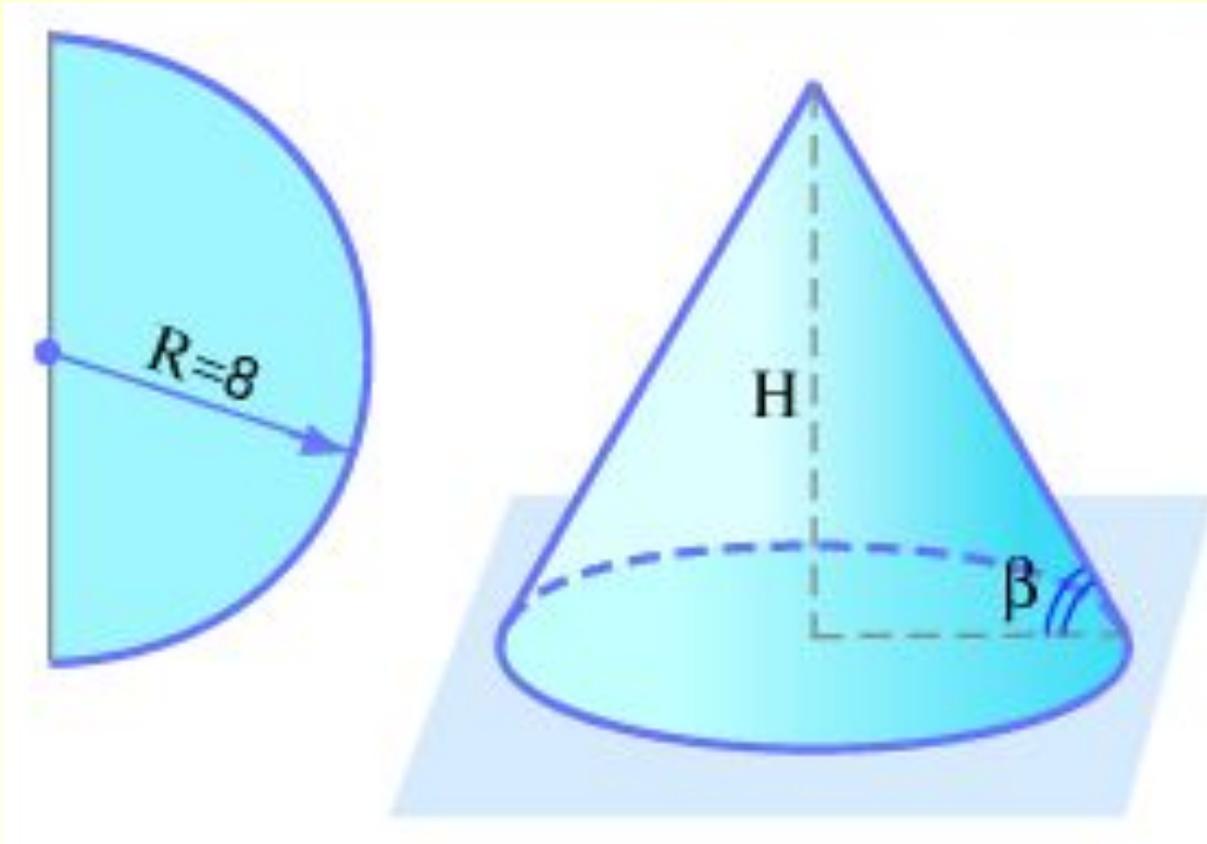




- По данным рисунка определите, чему равен угол развертки этого конуса. Ответ дайте в градусах.



Задача.

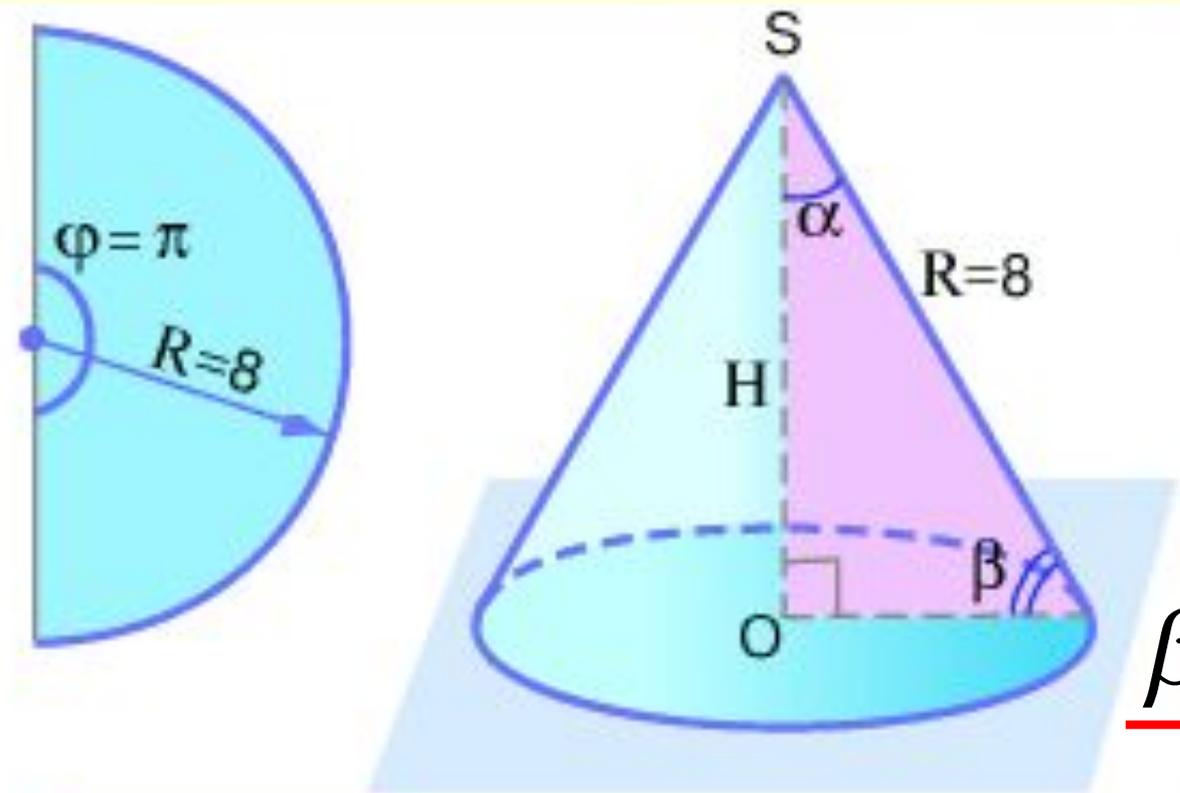


Дано: полукруг радиусом $R = 8$.

Найти: H , β (угол между образующей и основанием.)



1) Используем формулу, связывающую угол кругового сектора развертки с углом между высотой и образующей конуса. Получим угол между высотой и образующей, а затем найдем угол между образующей и основанием конуса.



$$\varphi = \pi$$

$$\pi = 2\pi \cdot \sin \alpha$$

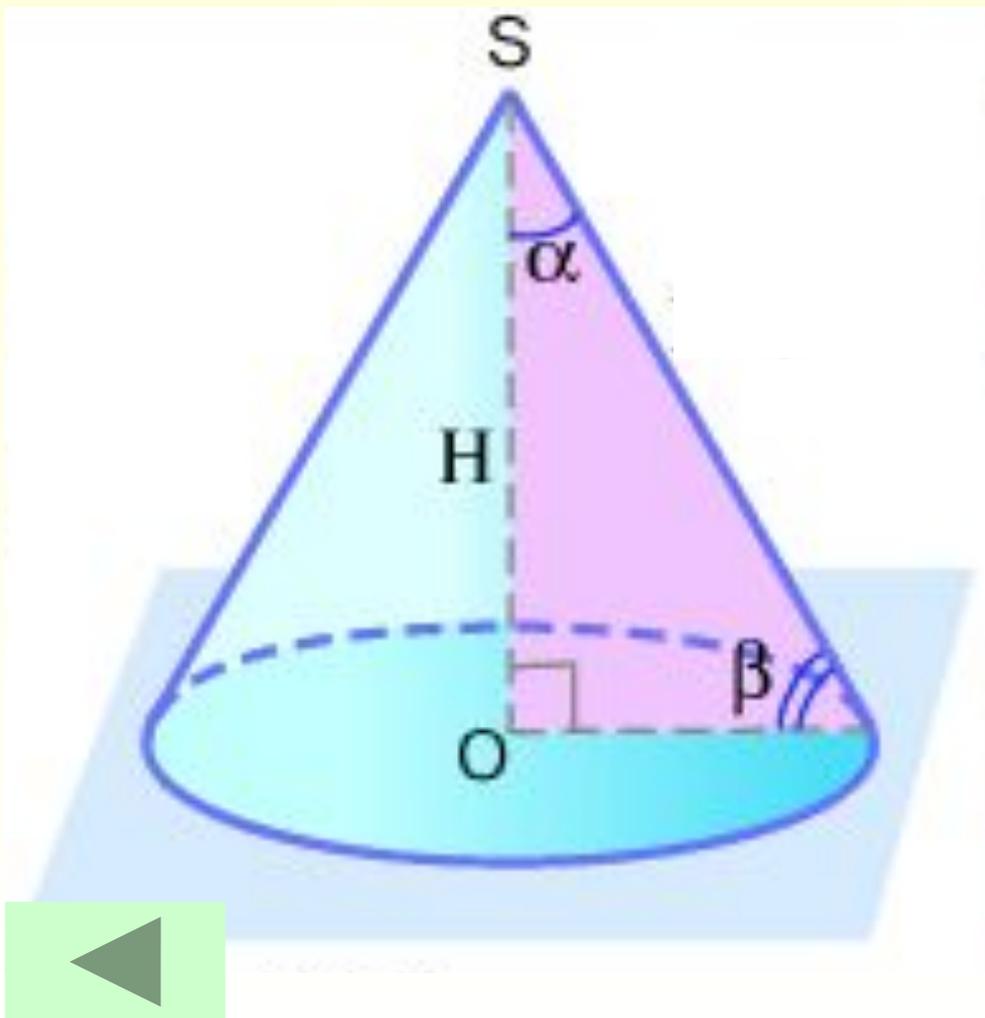
$$\sin \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = 30^{\circ}$$

$$\beta = 90^{\circ} - \alpha = 60^{\circ}$$



2) Найдем высоту конуса, используя определение тангенса угла в прямоугольном треугольнике.



$$\operatorname{tg} \beta = \frac{H}{R}$$

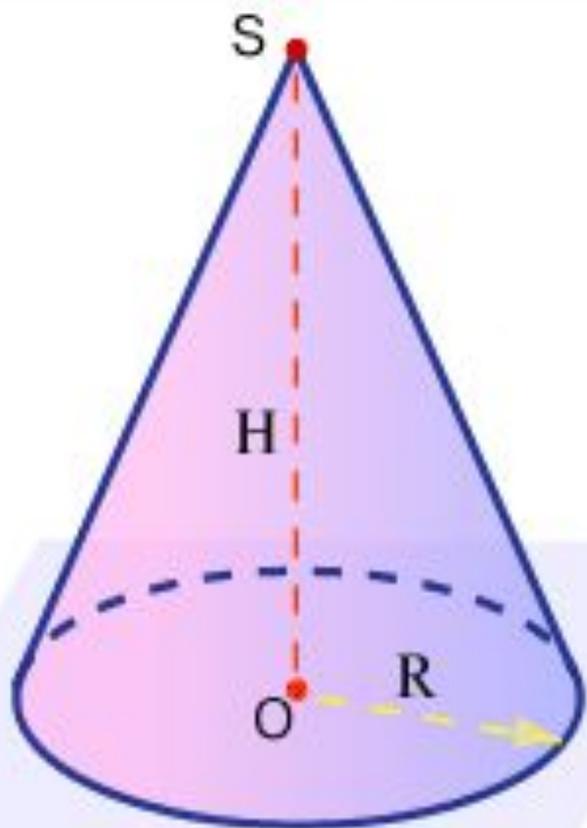
$$\operatorname{tg} 60^{\circ} = \sqrt{3}$$

$$H = R \cdot \operatorname{tg} \beta$$

$$H = 8\sqrt{3}$$

Объем конуса.

Теорема. Объем конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту.

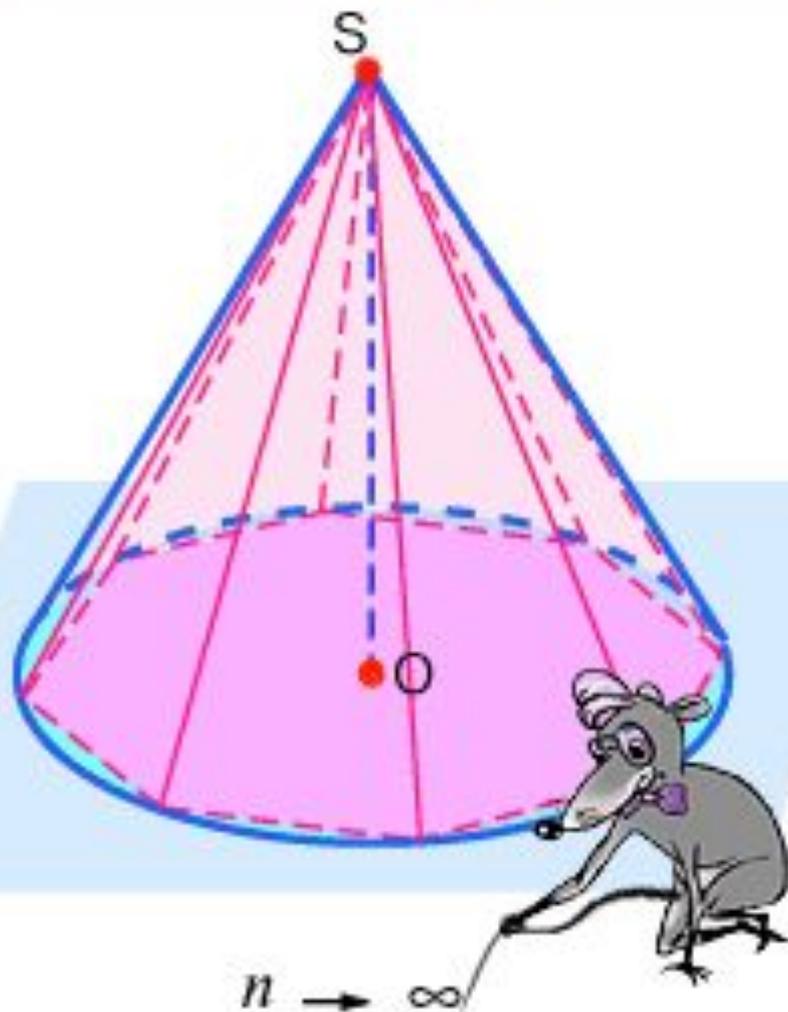


Дано: R – радиус основания
 H – высота конуса

Доказать: $V_{\text{кон.}} = 1/3 S_{\text{осн.}} H$

$$V_{\text{кон.}} = \frac{1}{3} \pi \cdot R^2 \cdot H$$

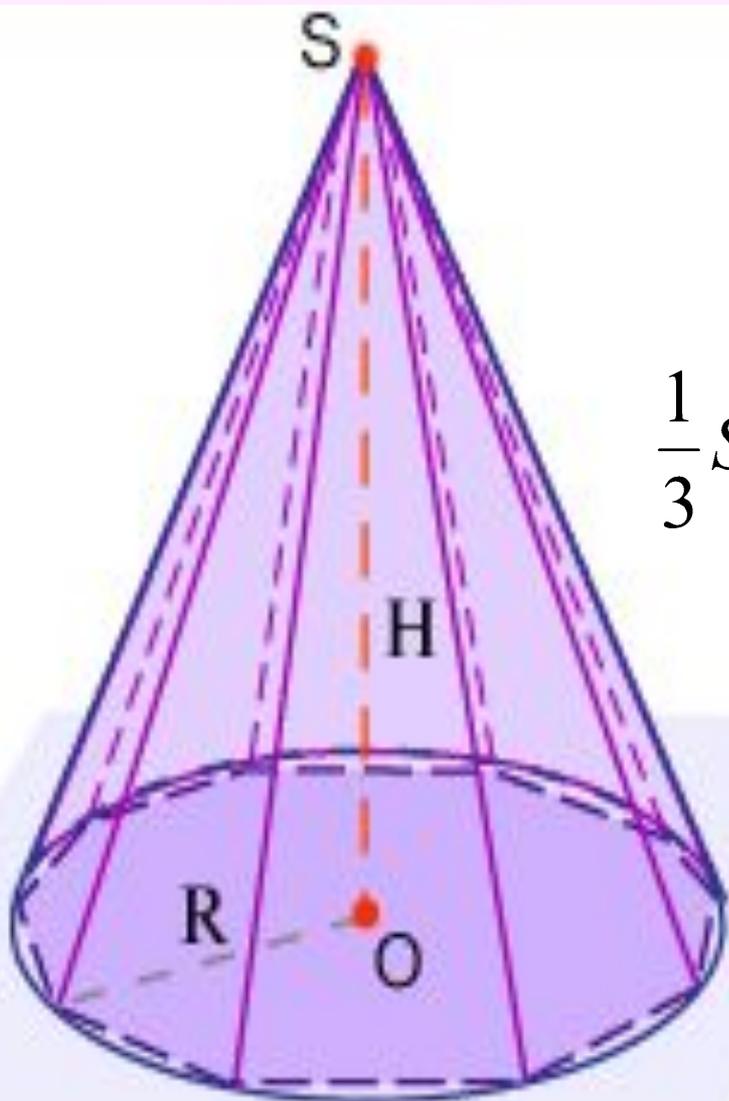
Доказательство:



$$V_{\text{пирамиды}} \rightarrow V_{\text{конуса}}$$

Объемом конуса будем считать предел, к которому стремится объем вписанной в этот конус правильной пирамиды, когда число боковых граней неограниченно увеличивается.

Доказательство:



$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн.пир.}} \cdot H$$

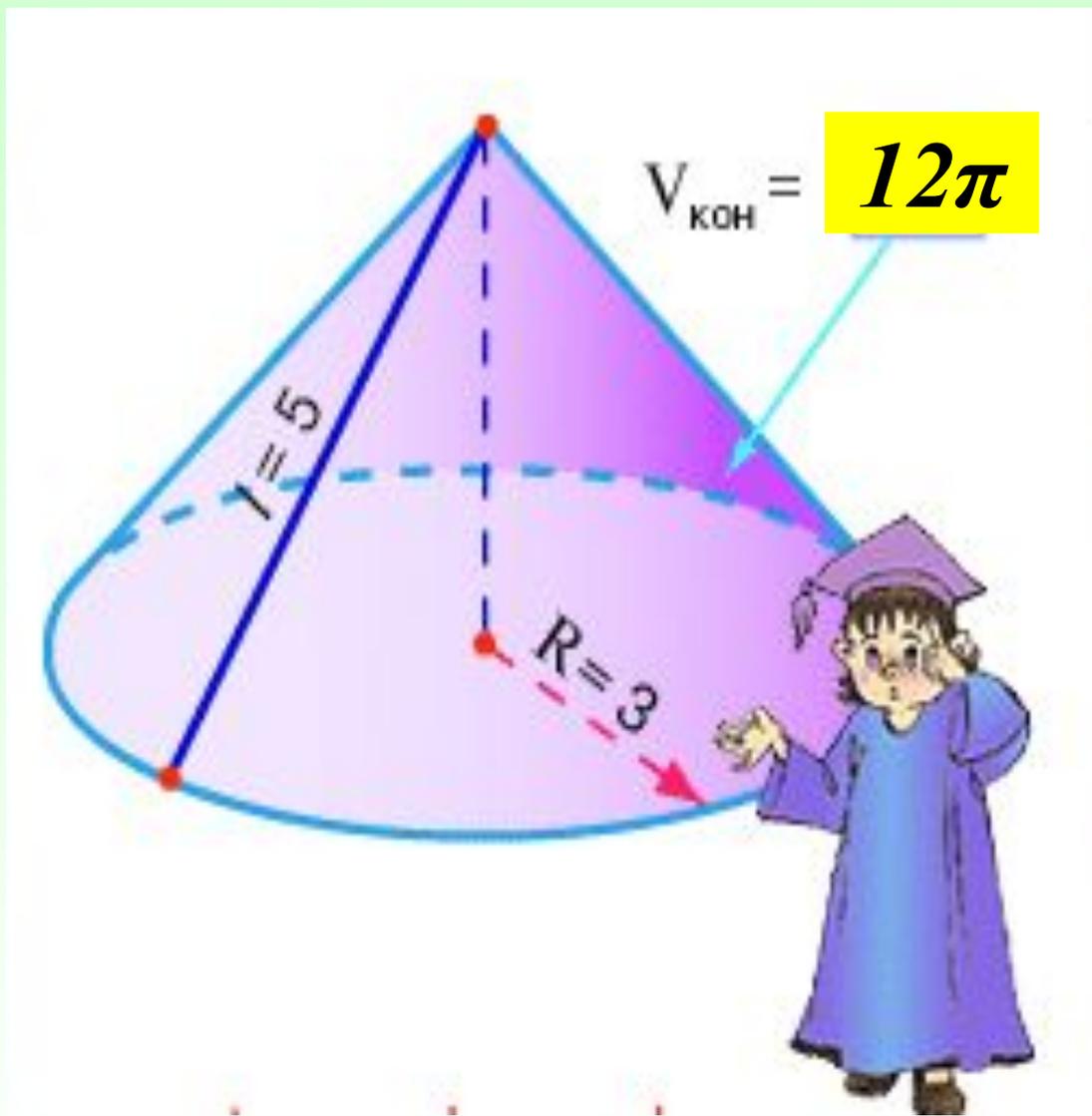
$$S_{\text{осн.пир.}} \rightarrow S_{\text{осн.кон.}} = \pi R^2$$

$$\frac{1}{3} S_{\text{осн.пир.}} H \rightarrow \frac{1}{3} S_{\text{осн.кон.}} H = \frac{1}{3} \pi R^2 H$$

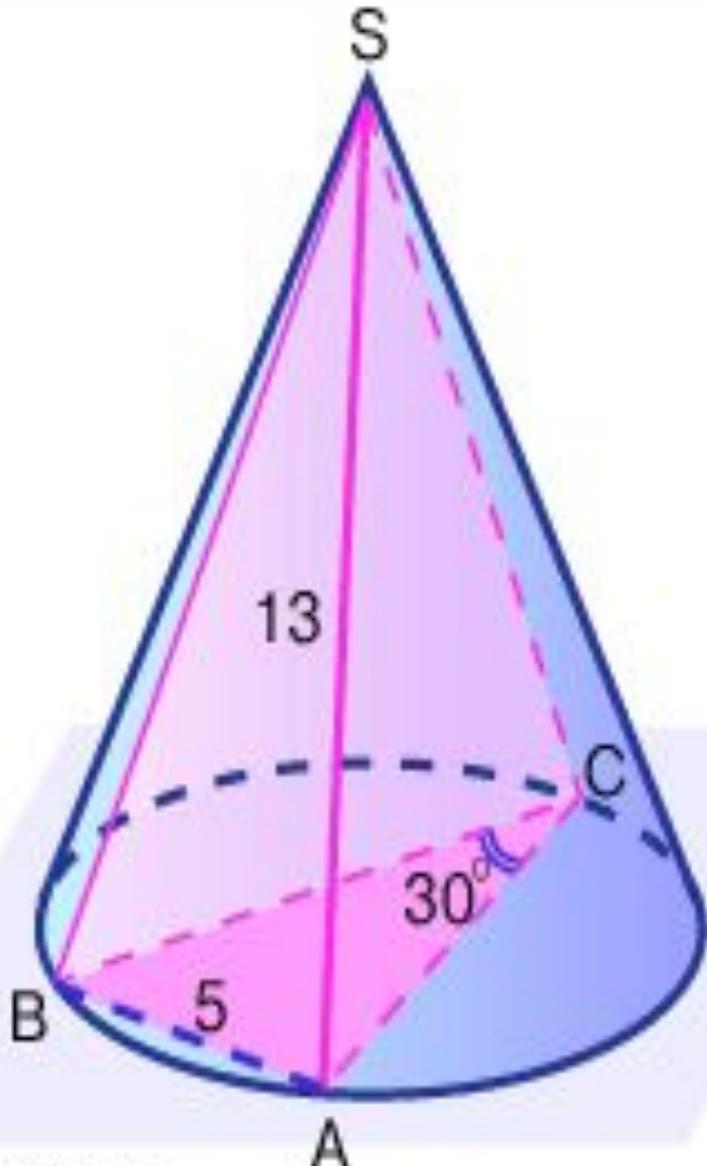
$$V_{\text{кон.}} = \frac{1}{3} \pi R^2 H$$

?

- *Найдите объем конуса, если радиус его основания равен трем, а образующая равна пяти.*



Задача.



Дано:

*$SABC$ – пирамида,
вписанная в конус*

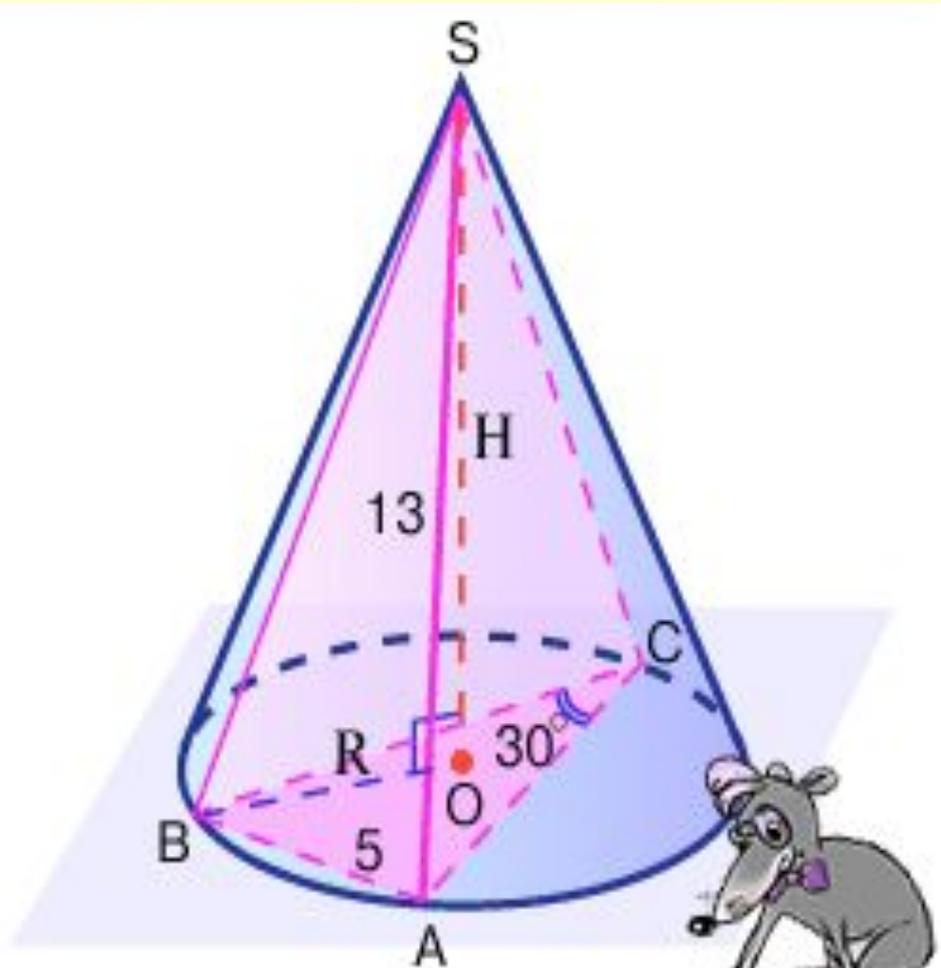
$$SA = 13, AB = 5,$$

$$\angle ACB = 30^\circ.$$

*Найти: V
конуса*



1) Найдем радиус конуса по теореме синусов.



Из $\triangle ABC$:

$$\frac{AB}{\sin \angle ACB} = 2R \text{ (по теореме синусов)}$$

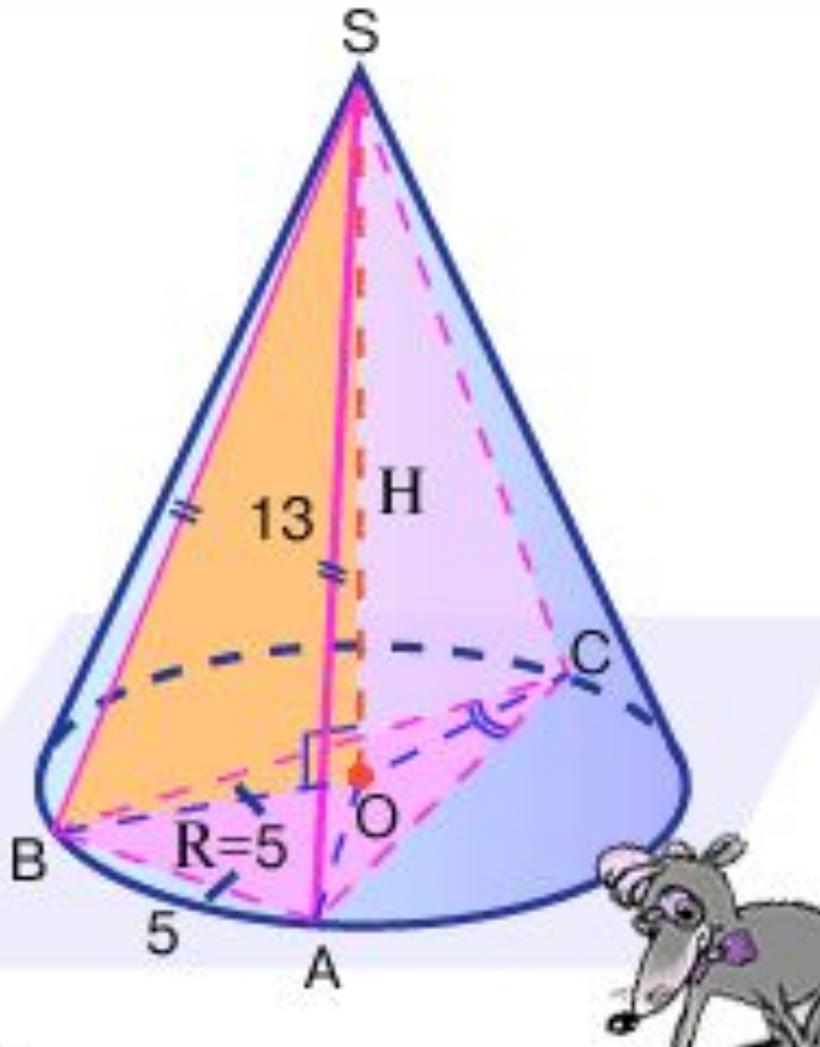
$$\frac{5}{\sin 30^\circ} = 2R$$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\underline{R = 5}$$



2) У пирамиды, вписанной в конус, высота равна высоте конуса и попадает в центр описанной окружности. Найдем высоту пирамиды.



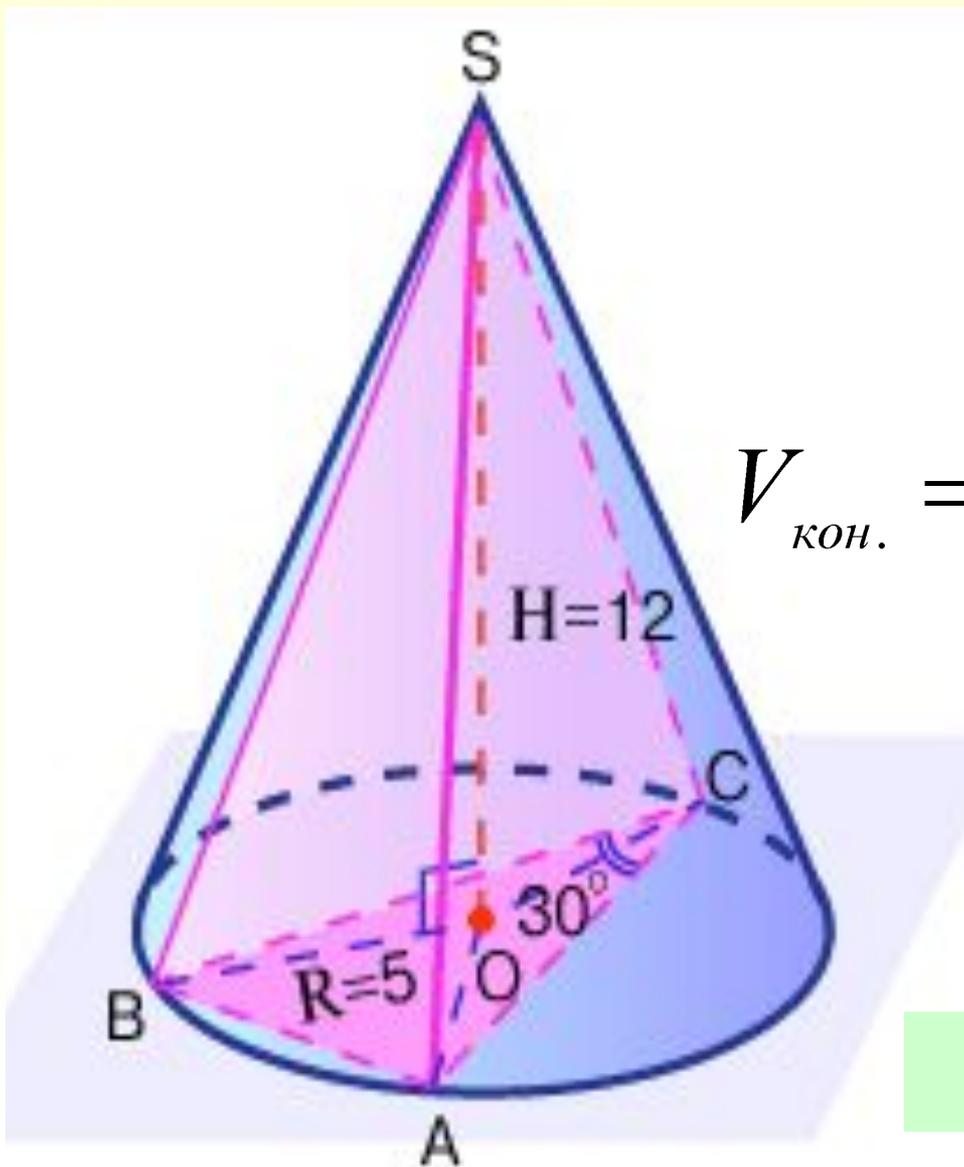
Из $\triangle SOB$:

$$SB^2 = R^2 + H^2$$

$$H = \sqrt{SB^2 - R^2} = 12$$



3) Определим объем конуса.



$$V_{\text{кон.}} = \frac{1}{3} \pi \cdot R^2 \cdot H$$

$$V_{\text{кон.}} = \frac{1}{3} \pi \cdot 5^2 \cdot 12 = \underline{\underline{100\pi}}$$

