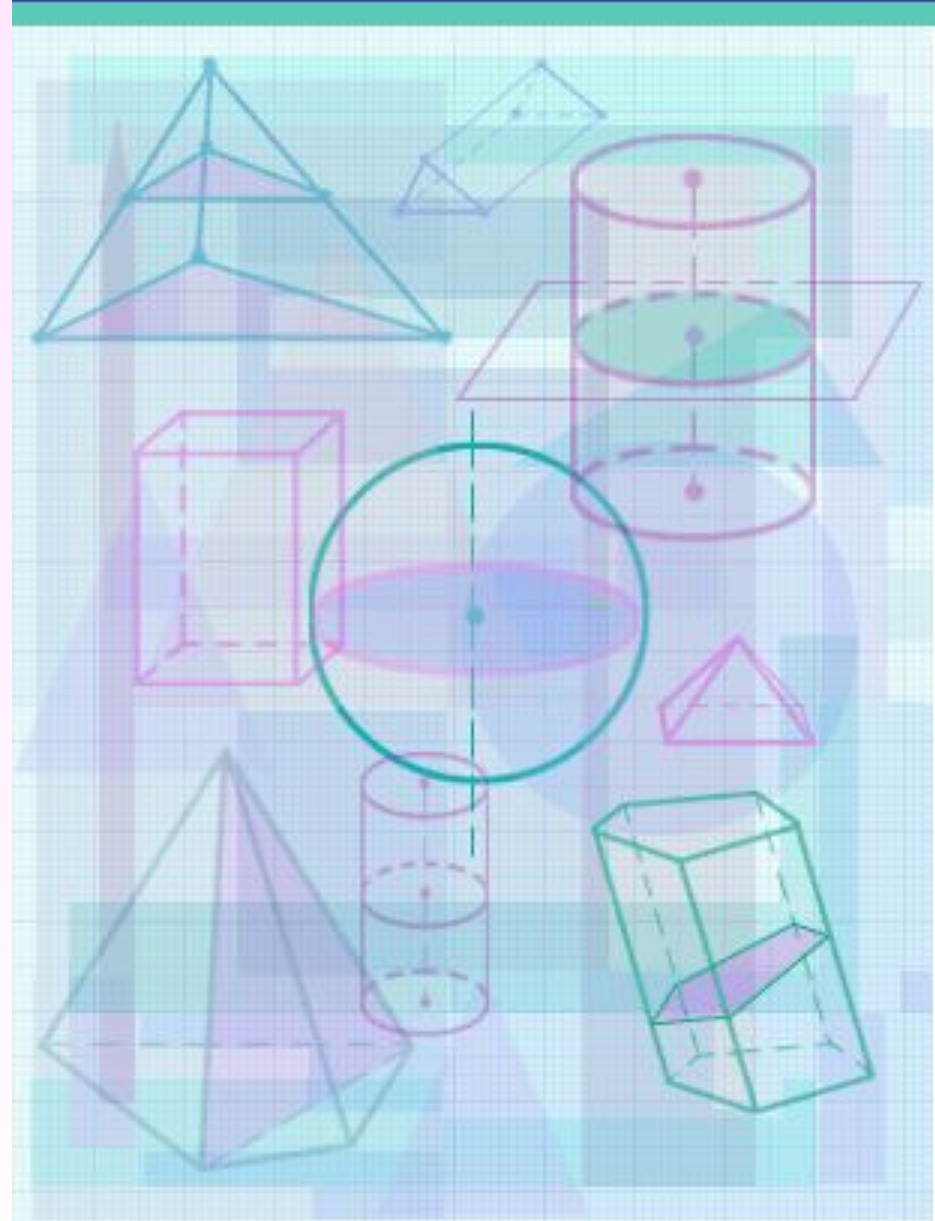
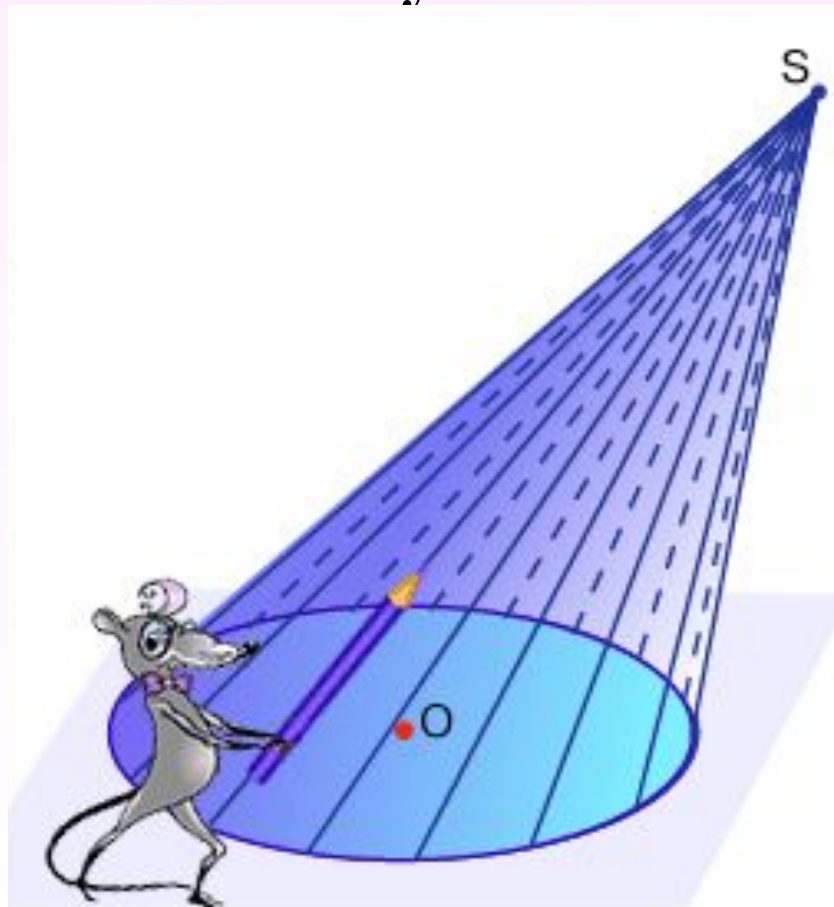


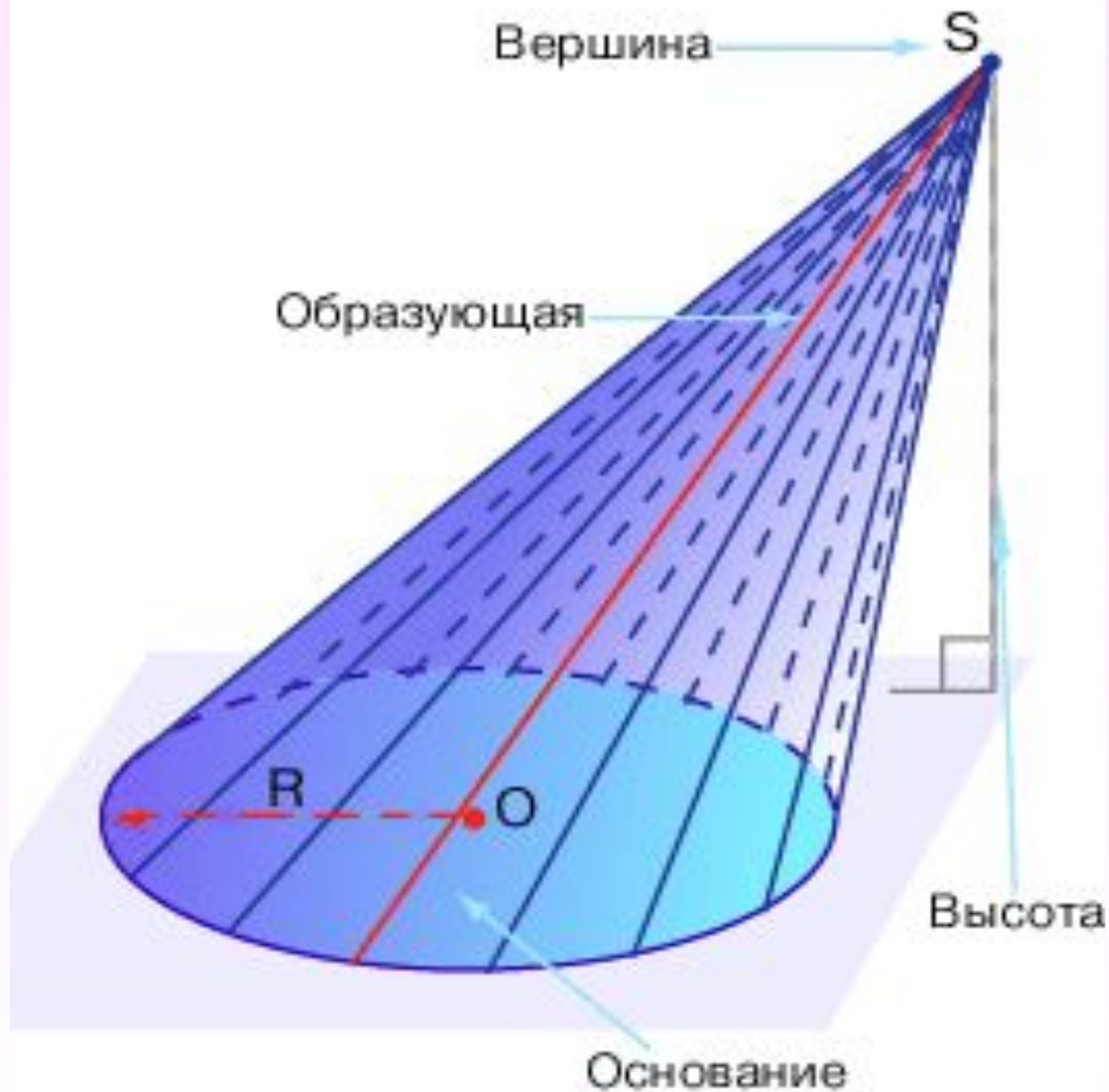
# Определение конуса.



**Круговым конусом** называется тело ограниченное кругом – основанием конуса, и конической поверхностью, образованной отрезками, соединяющими точку, вершину конуса, со всеми точками окружности, ограничивающей основание конуса.

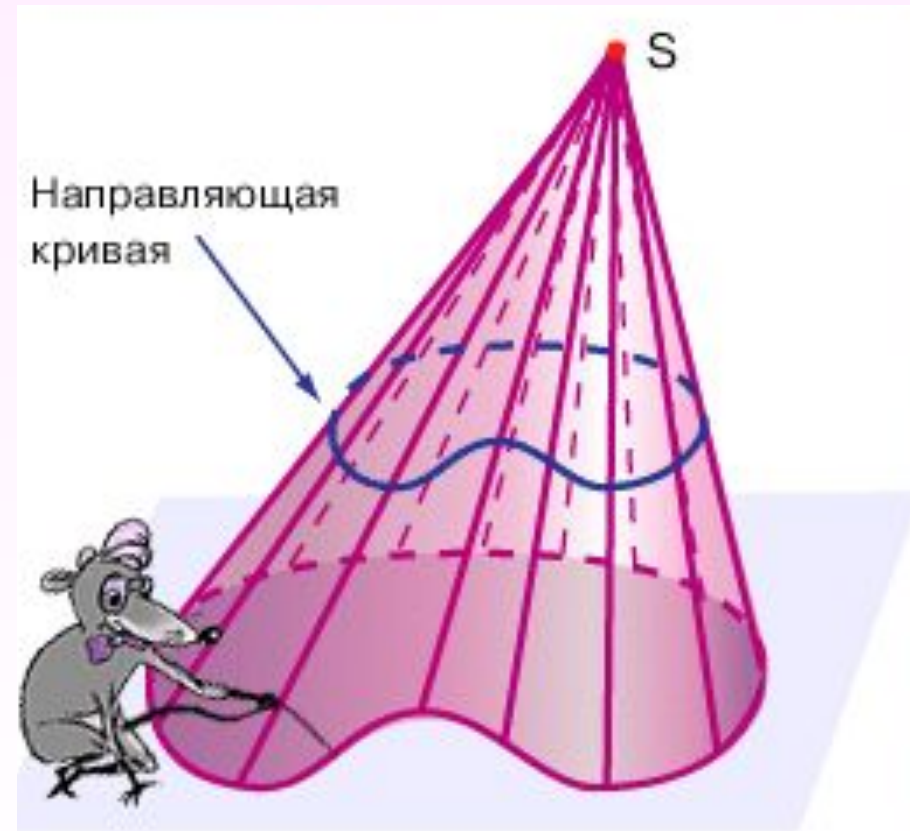
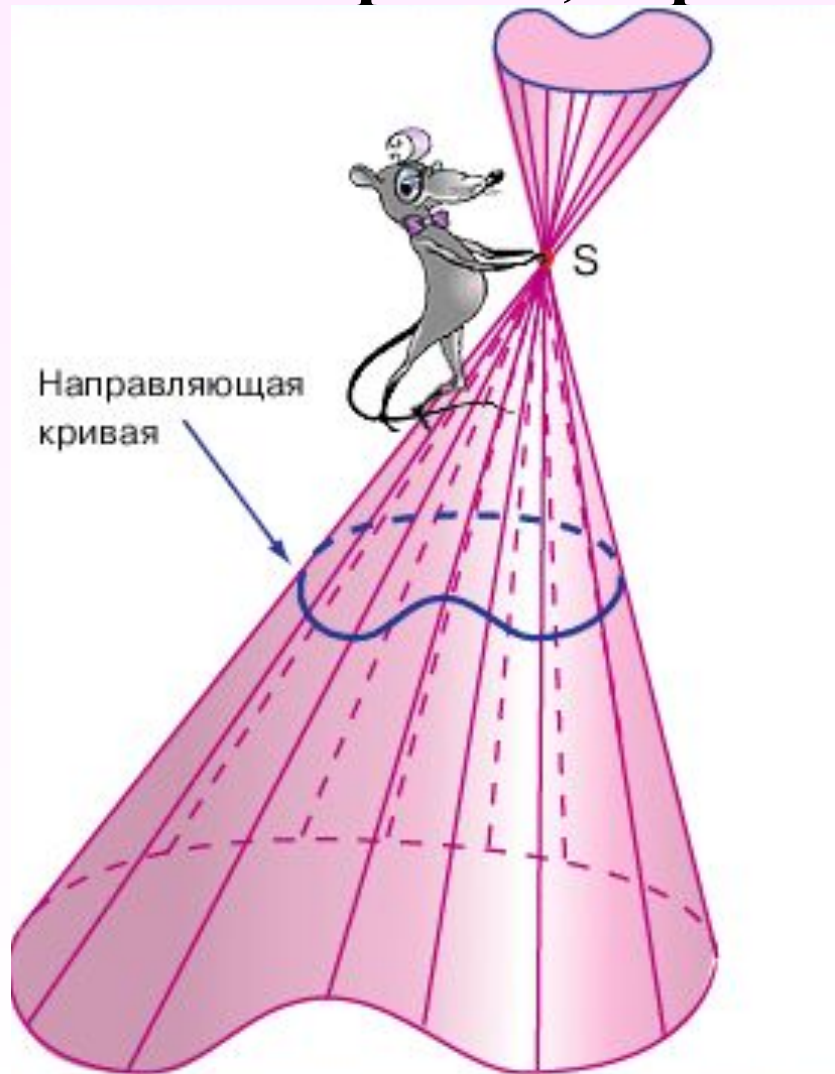


# Элементы конуса.

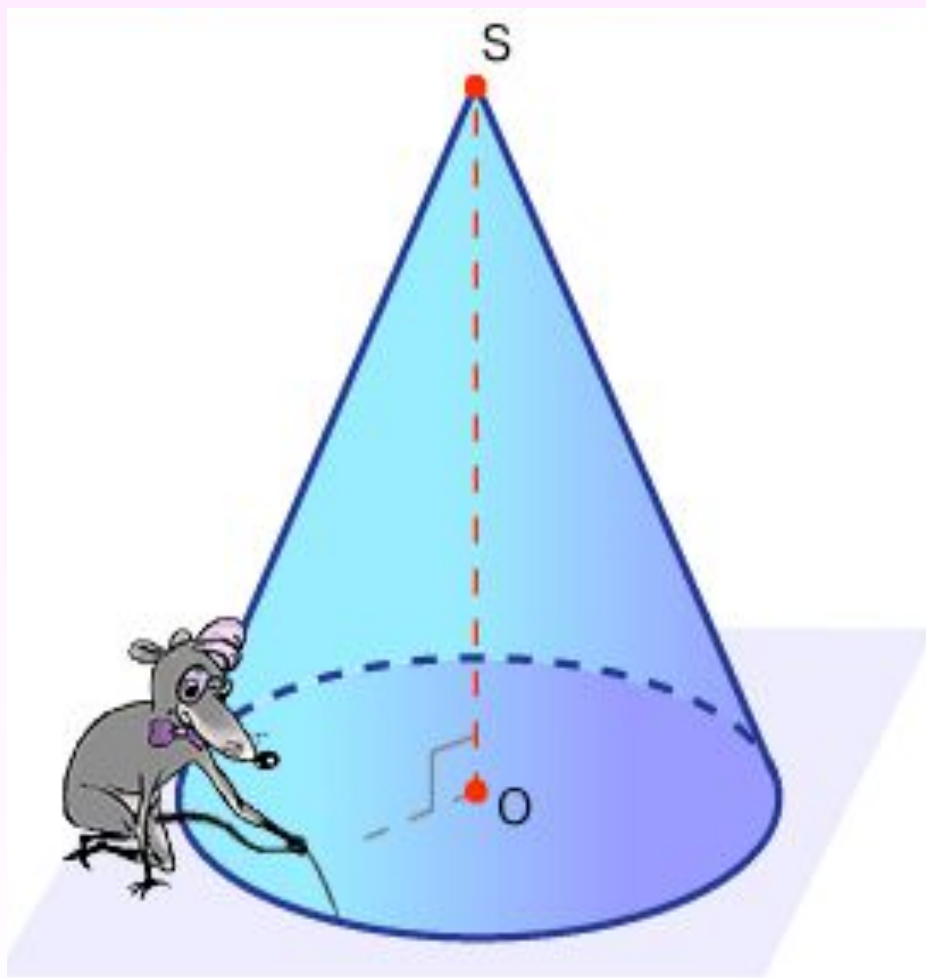


Круговой конус

**Конус** – это тело, которое получается, если коническую поверхность, образованную прямыми, соединяющими фиксированную точку со всеми точками какой-нибудь кривой, ограничить плоскостью.

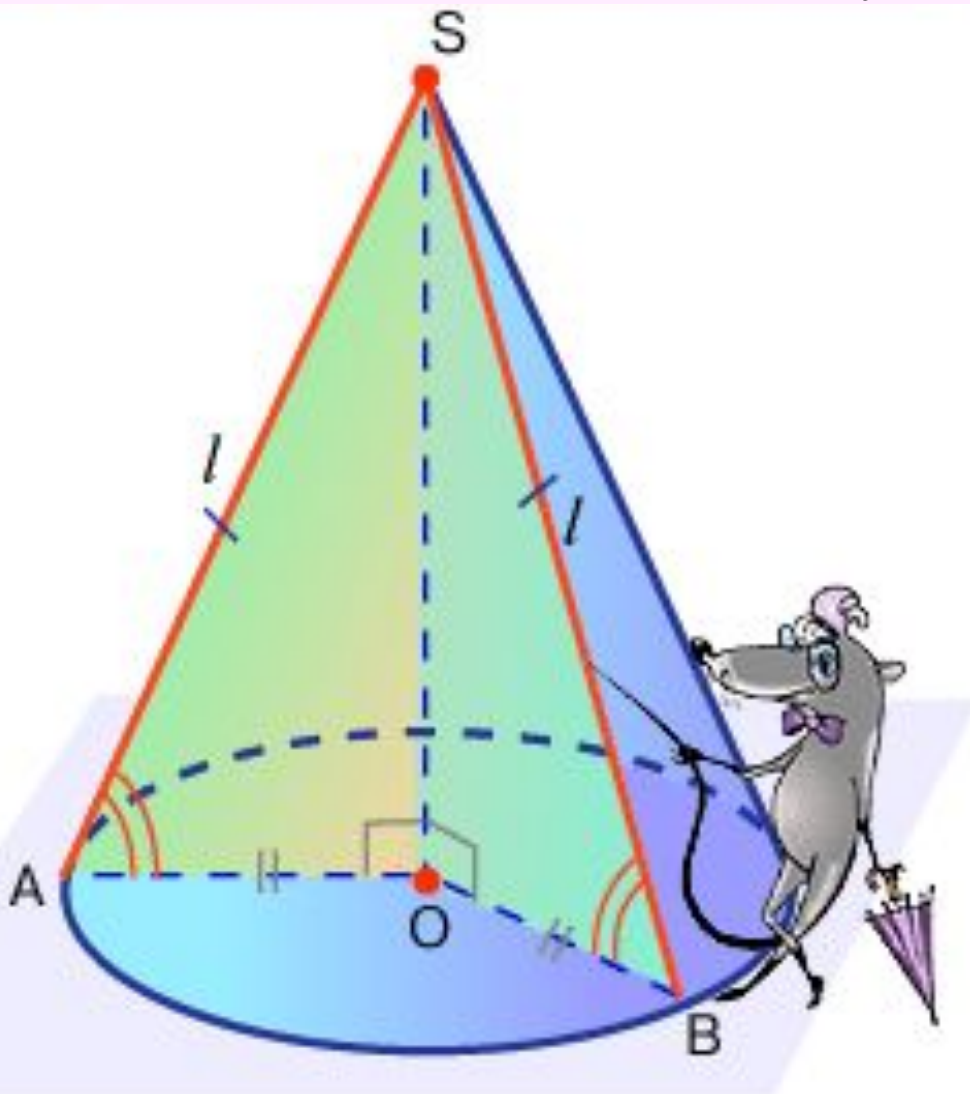


# Прямой круговой конус.



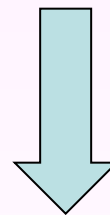
*Круговой конус называется **прямым**, если его высота попадает в центр круга.*

*Все образующие конуса равны между собой и составляют один угол с основанием.*



$$\triangle SOA = \triangle SOB$$

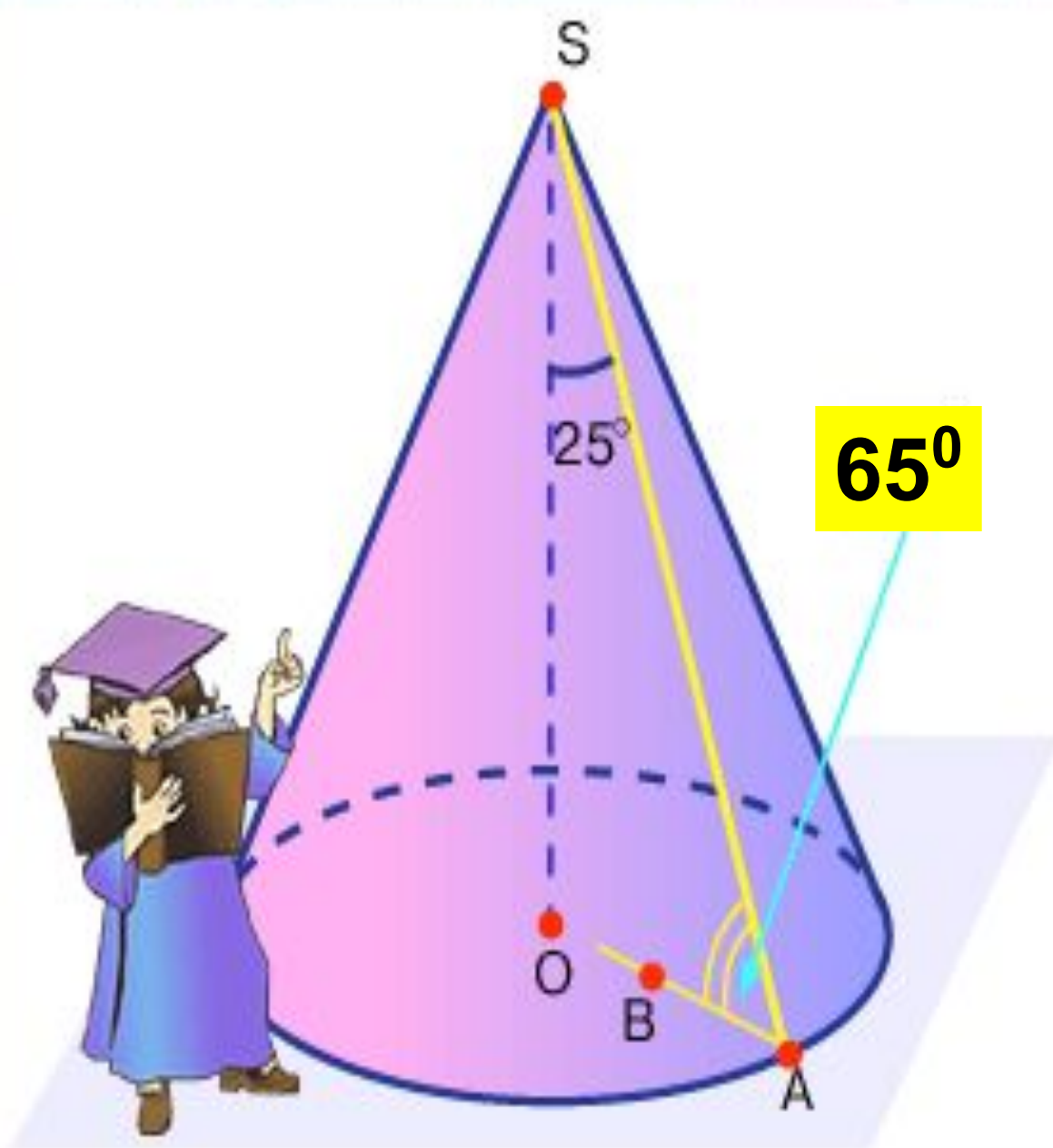
$$SA = SB = l$$



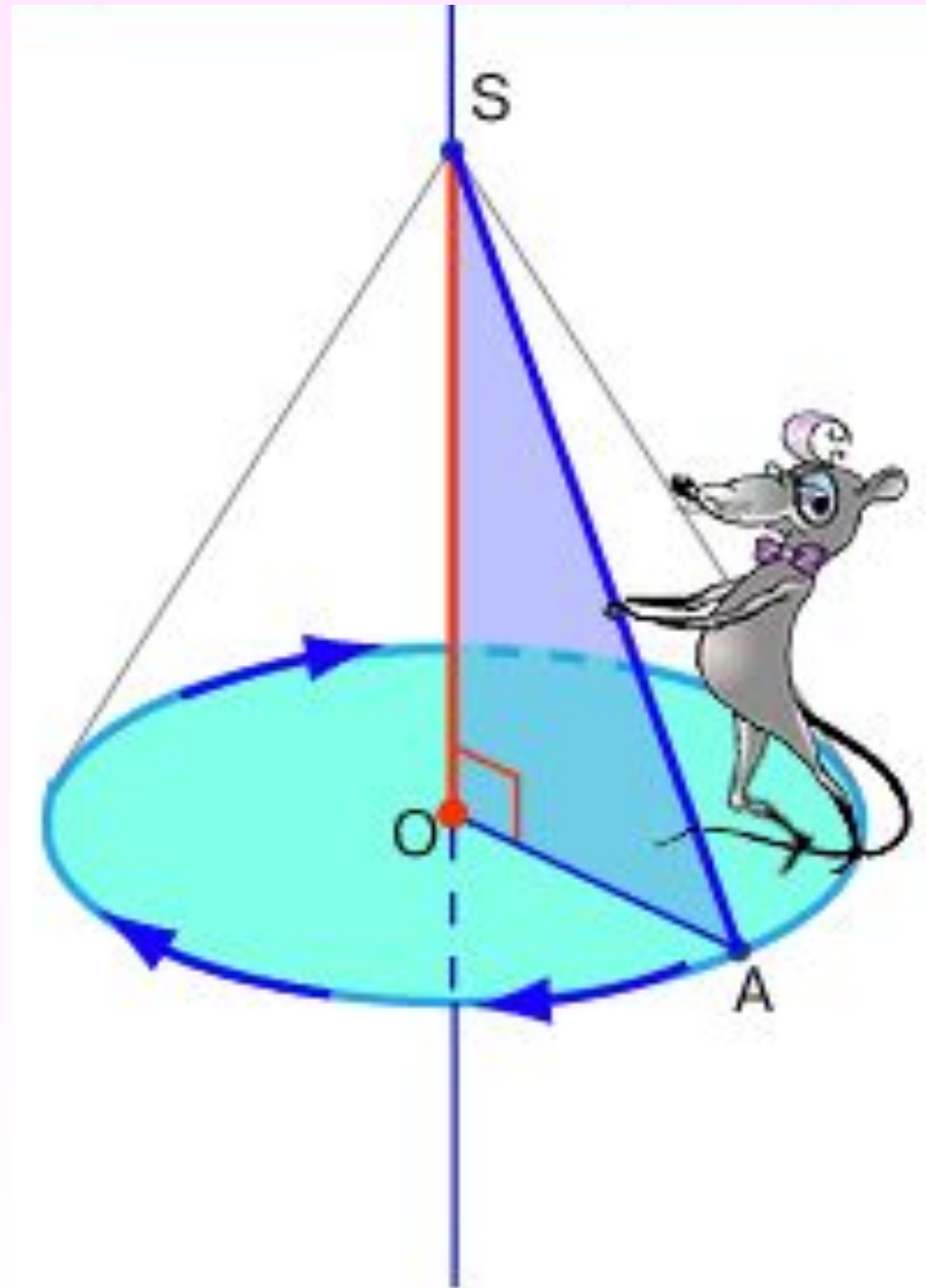
$$\angle SAO = \angle SBO$$



- *Чему равен угол между образующей и основанием конуса, если известен угол между высотой и образующей.*



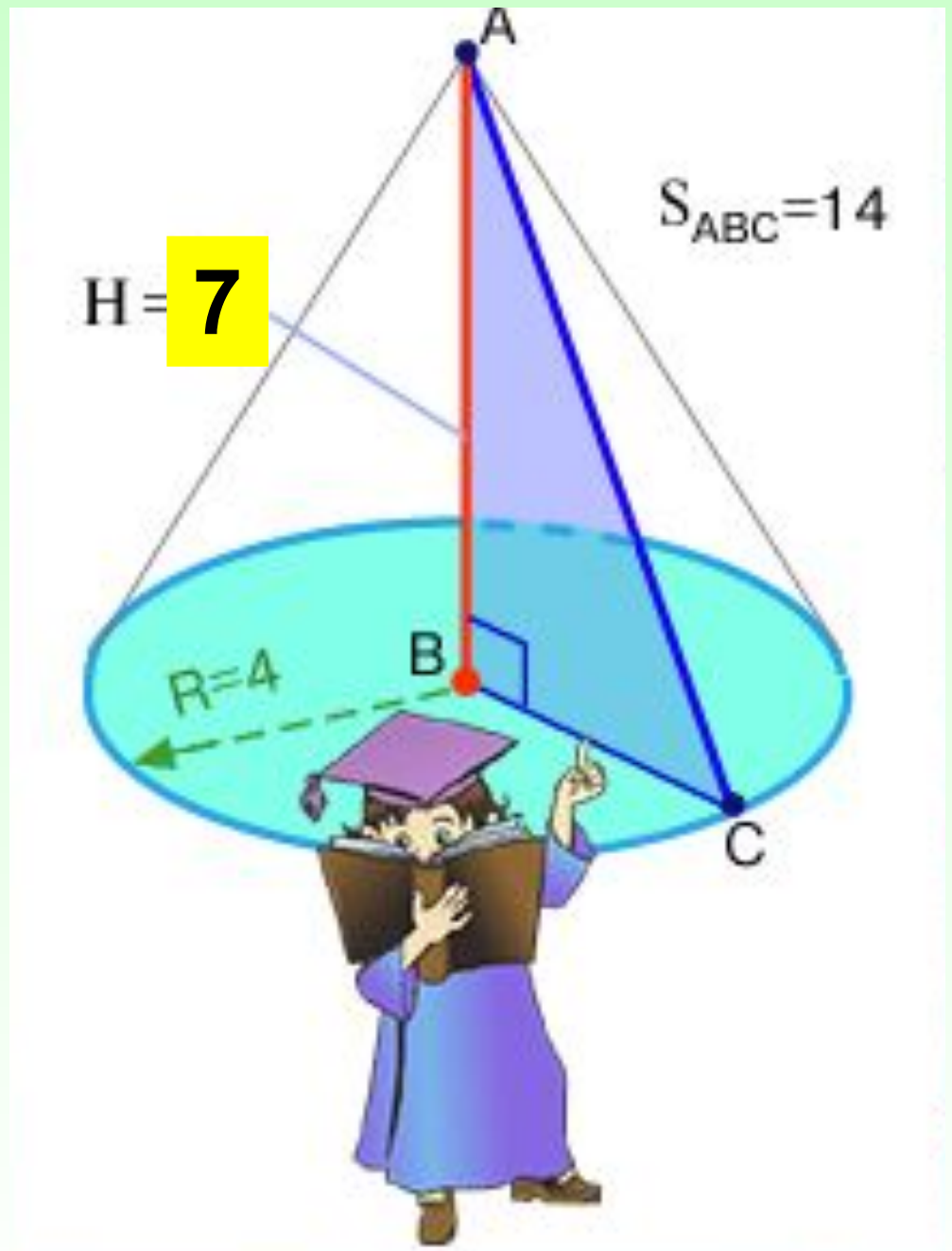
- *Конус можно получить, вращая прямоугольный треугольник вокруг одного из катетов. При этом осью вращения будет прямая, содержащая высоту конуса. Эта прямая так и называется – **осью конуса**.*





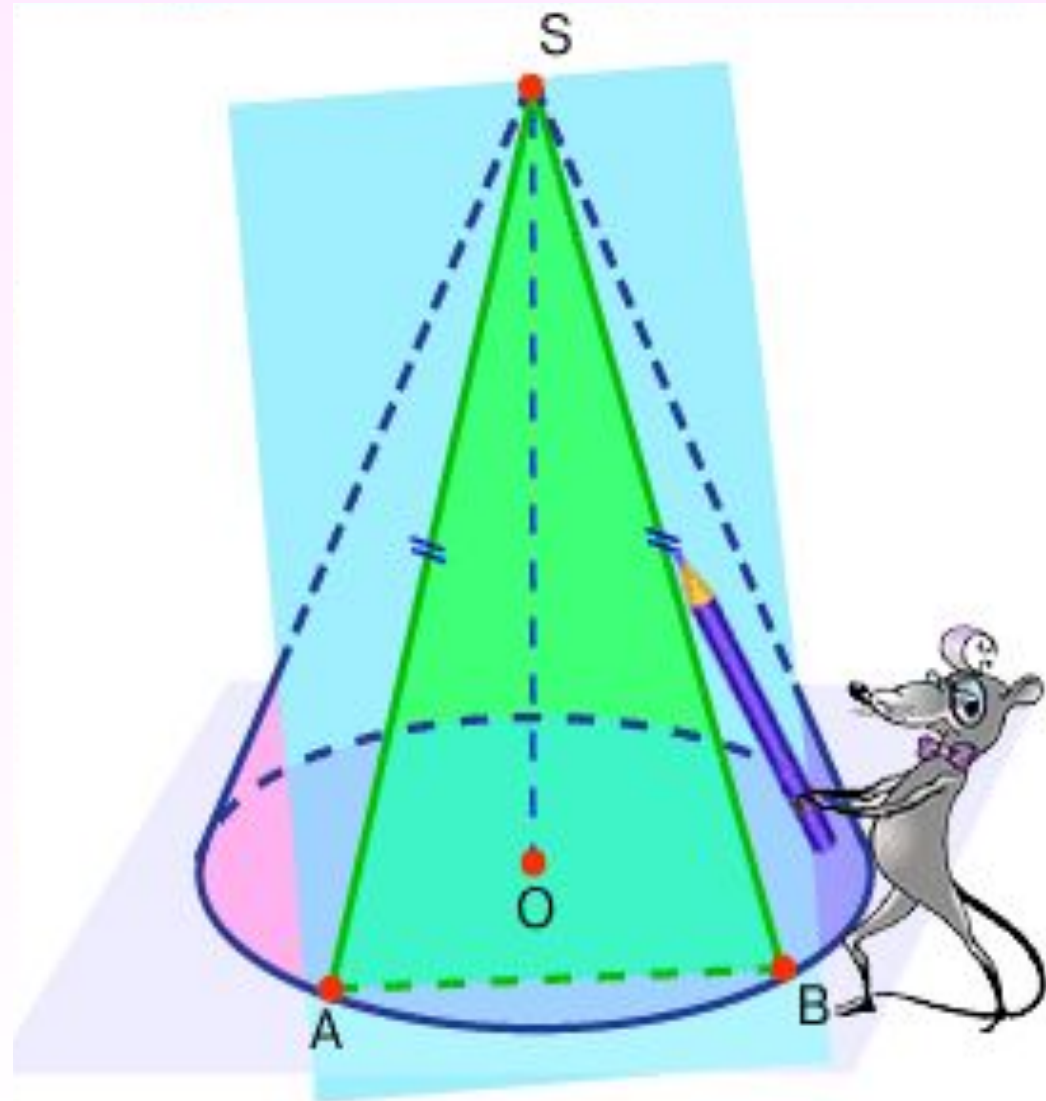


- Конус получен при вращении прямоугольного треугольника  $S = 14$ . Радиус основания конуса равен 4. Определите высоту этого конуса.*



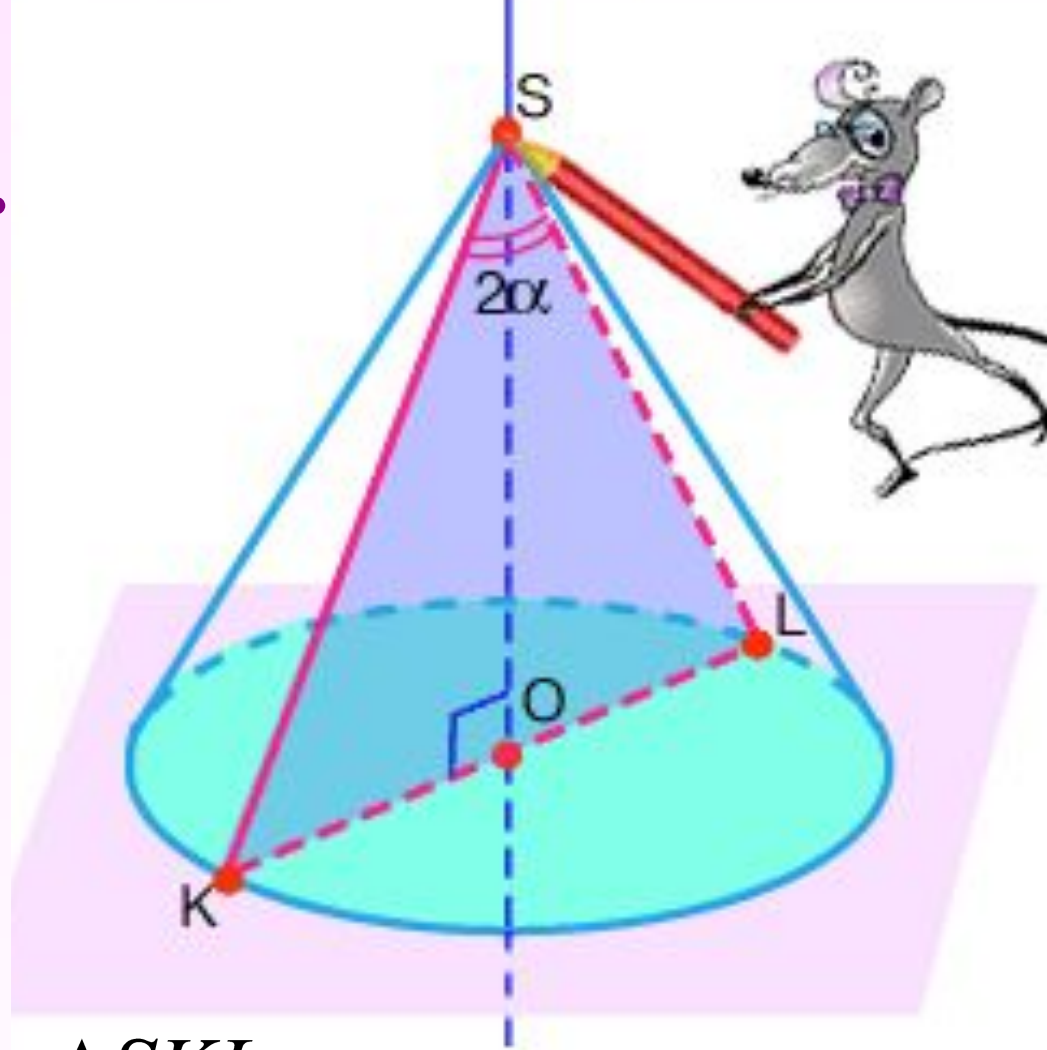
# Сечения конуса.

- *Если через вершину конуса провести плоскость, пересекающую основание, то в сечении получится равнобедренный треугольник.*



# Сечения конуса.

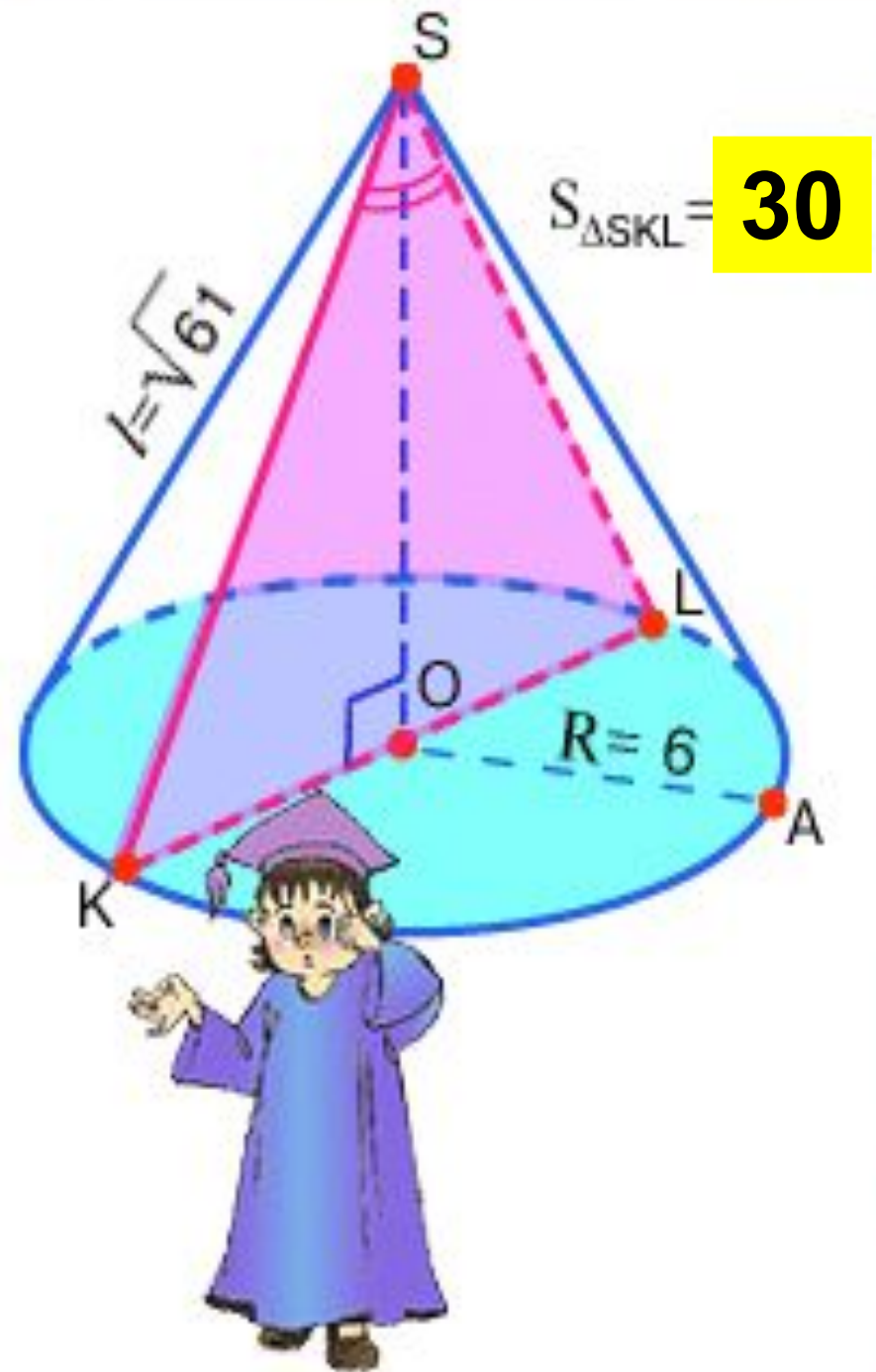
- Сечение конуса, проходящее через ось, называется **осевым**. В основании осевого сечения лежит диаметр – максимальная хорда, поэтому угол при вершине осевого сечения – это максимальный угол между образующими конуса. (**Угол при вершине конуса**).



$\Delta SKL$  – осевое сечение  
 $KL = 2R$  – диаметр  
 $\angle KSL = 2\alpha$  – угол при  
вершине конуса.

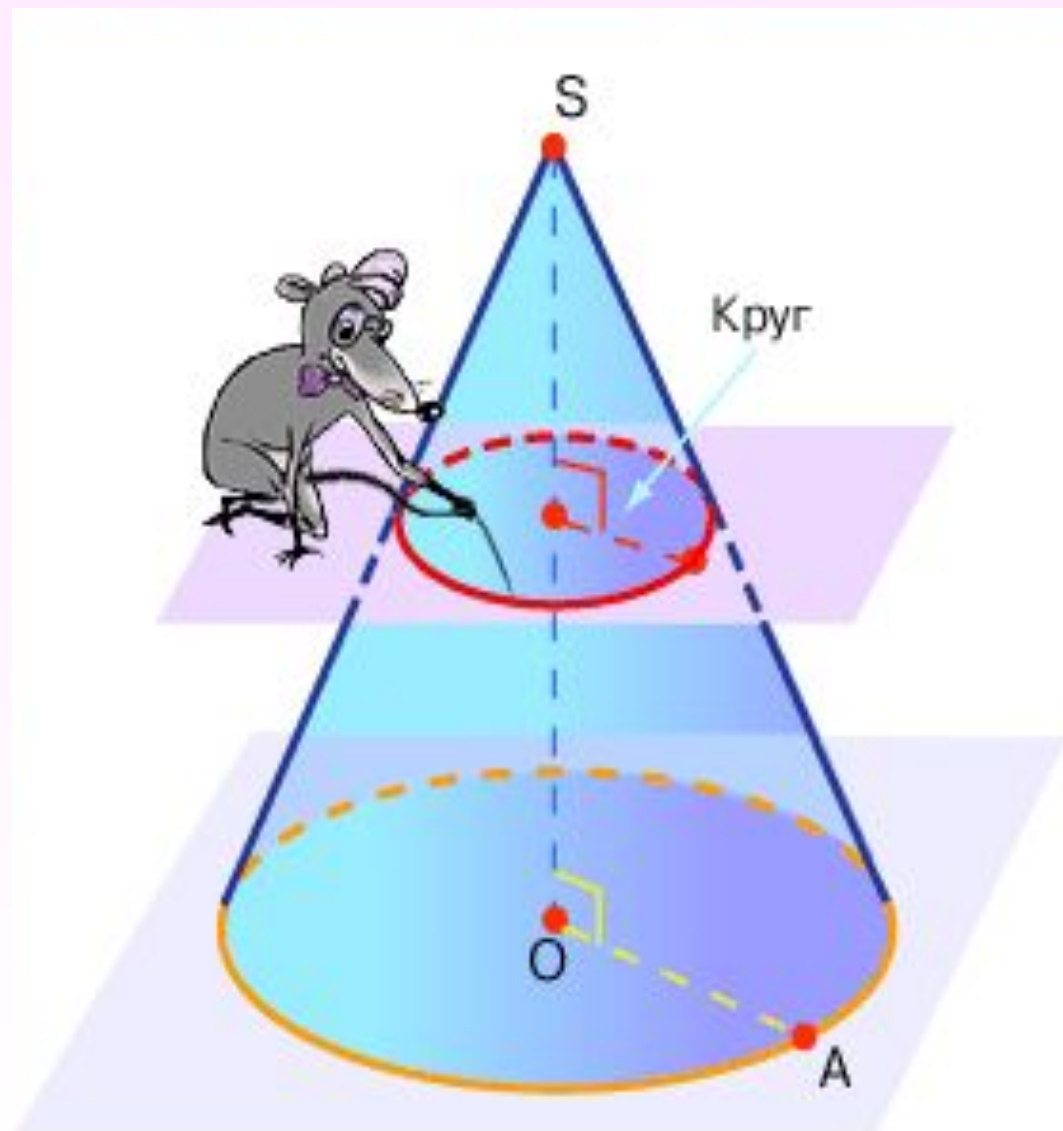


- *Найдите площадь осевого сечения, если известны радиус основания конуса и образующая.*



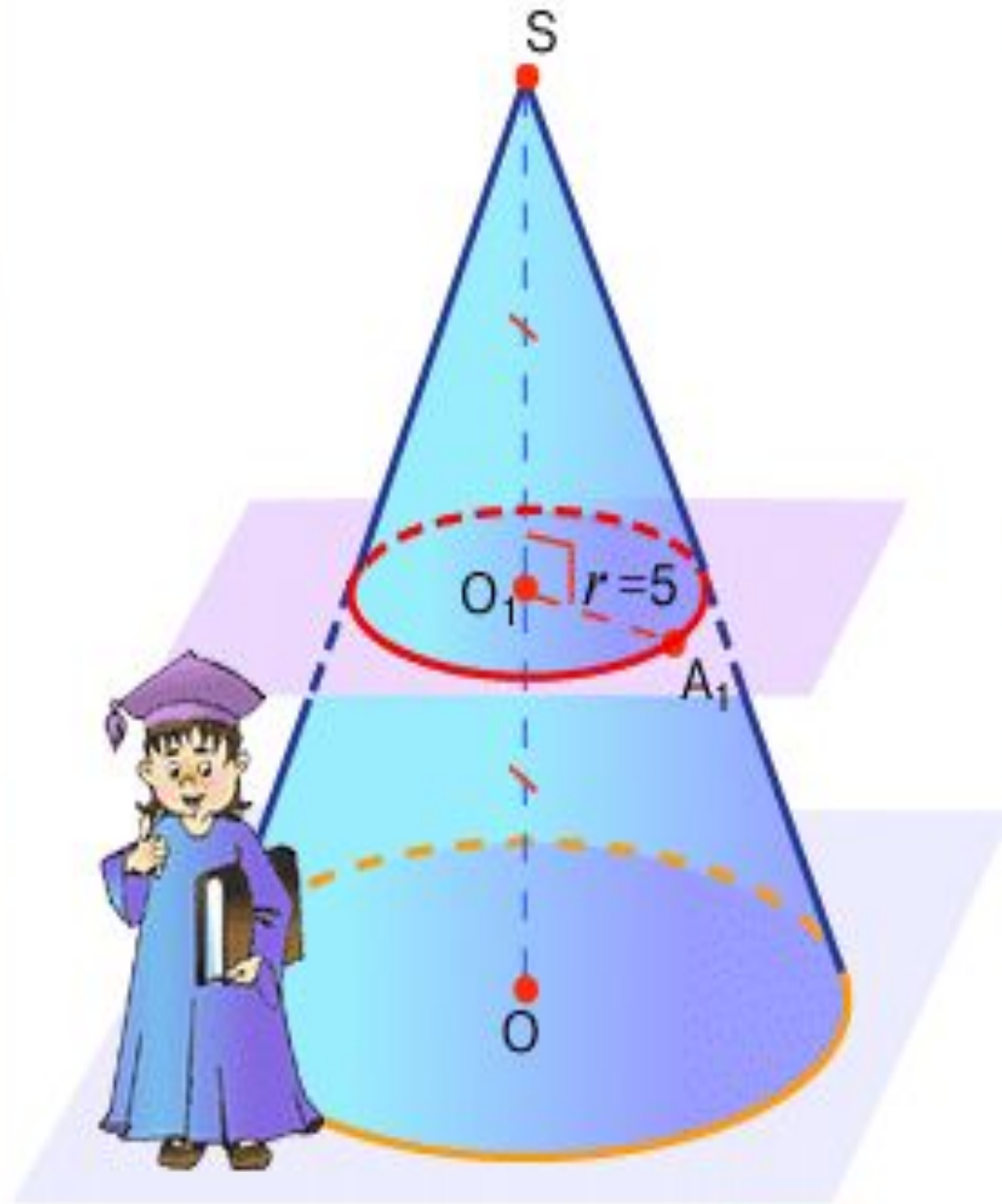
# Сечения конуса.

- Любое сечение конуса плоскостью, параллельной основанию, - это *круг*.





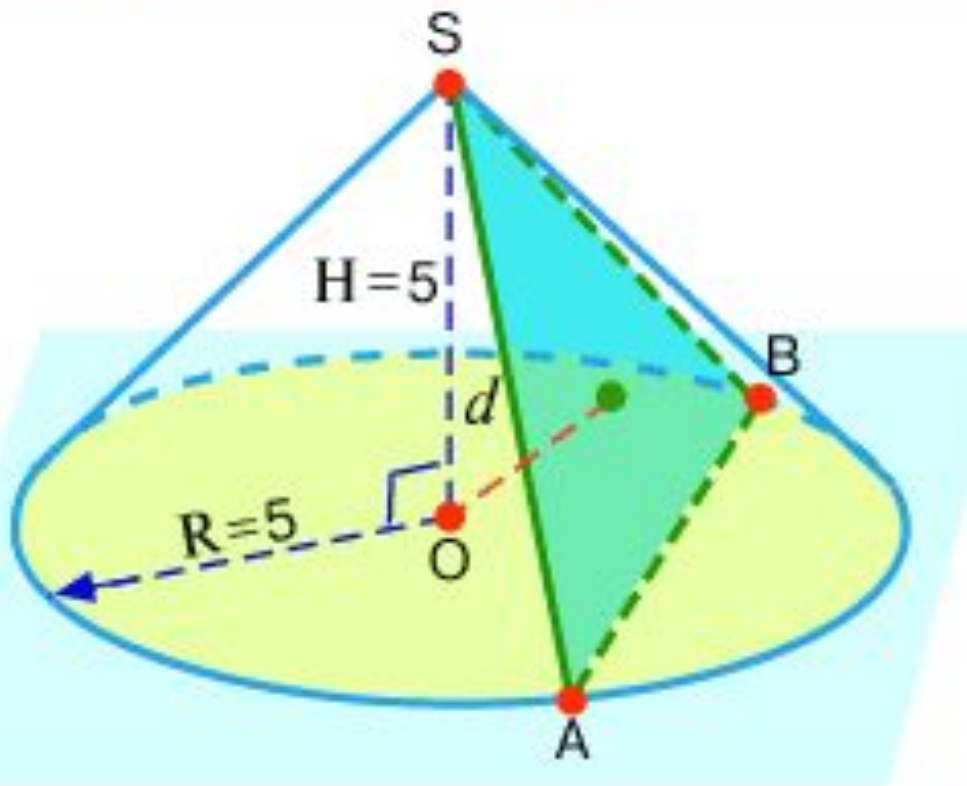
- *Через середину высоты конуса провели плоскость, перпендикулярную оси, и получили круг  $R = 5$ . Чему равна площадь основания конуса?*



$$S_{\text{осн}} = 100\pi$$

# Задача.

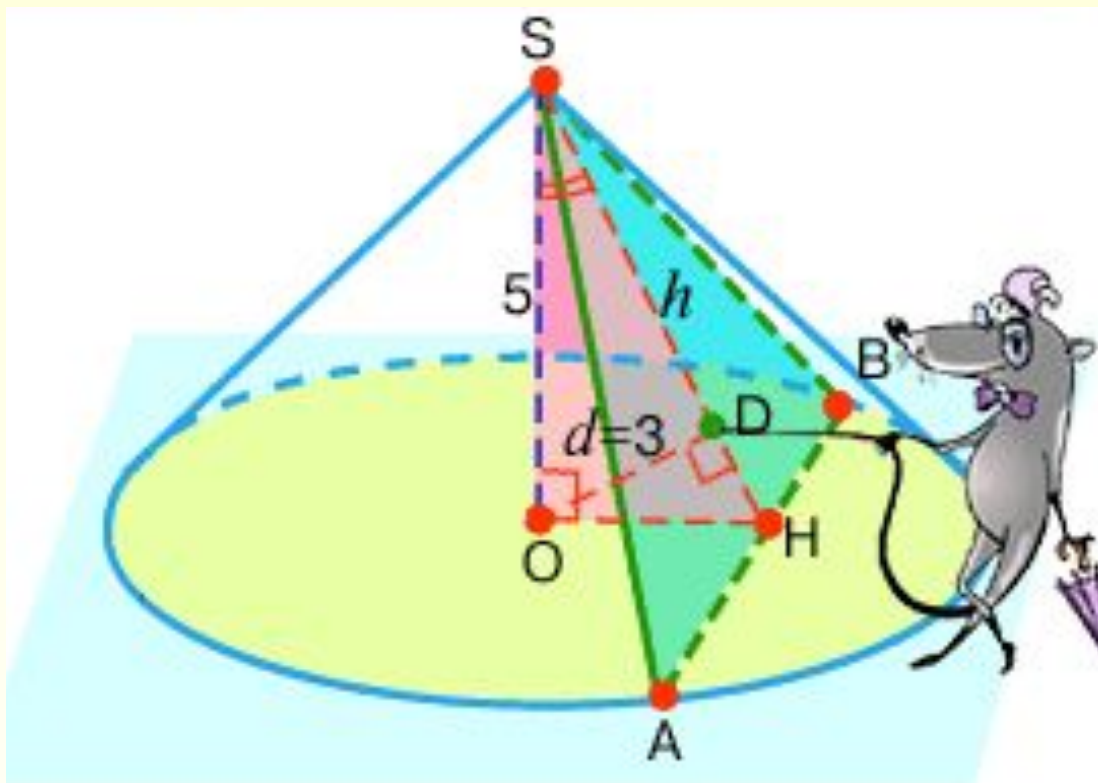
*Дано:  $H = R = 5$ ;  
 $SAB$  – сечение;  
 $d(O, SAB) = 3$ .*



*Найти:  $S_{\Delta SAB}$*



1) В сечении равнобедренный треугольник.  
Найдем его высоту.



$$\triangle SOH \sim \triangle SDO$$

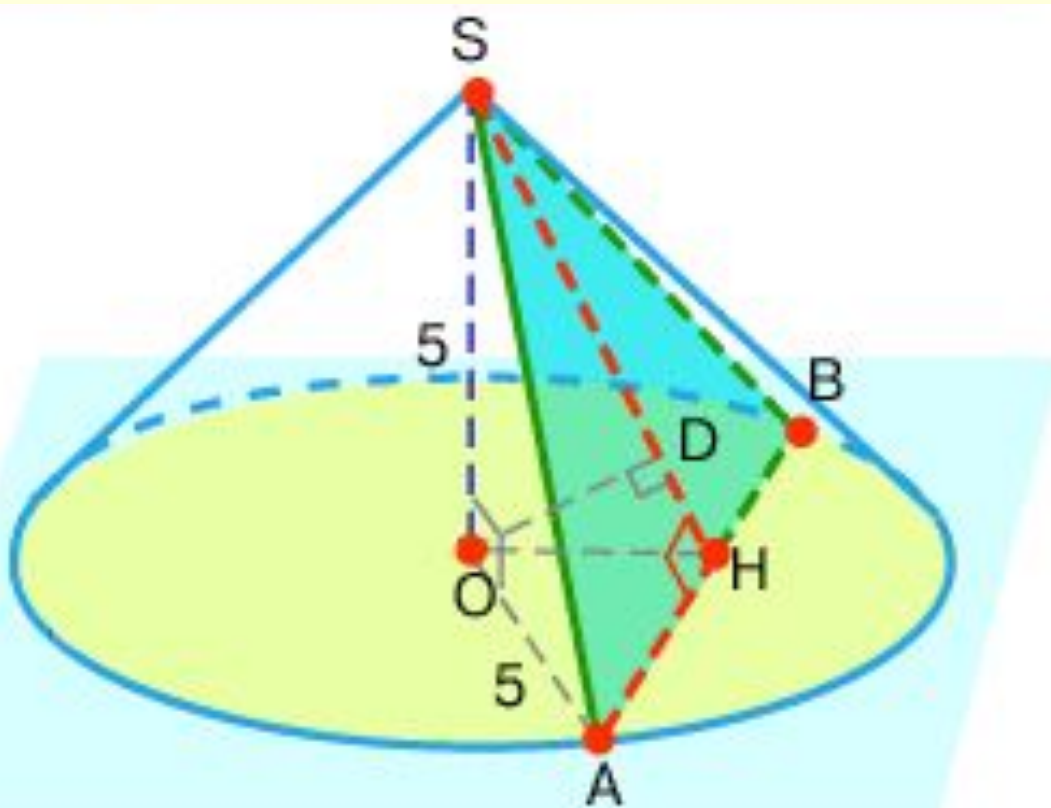
$$\frac{SD}{SO} = \frac{SO}{SH}$$

$$SH = \frac{SO^2}{SD} = \frac{5 \cdot 5}{\sqrt{5^2 - 3^2}} = \frac{25}{4}$$





2) *Определим боковые стороны и основание треугольника, являющегося сечением.*



*Из  $\triangle SOA$ :*

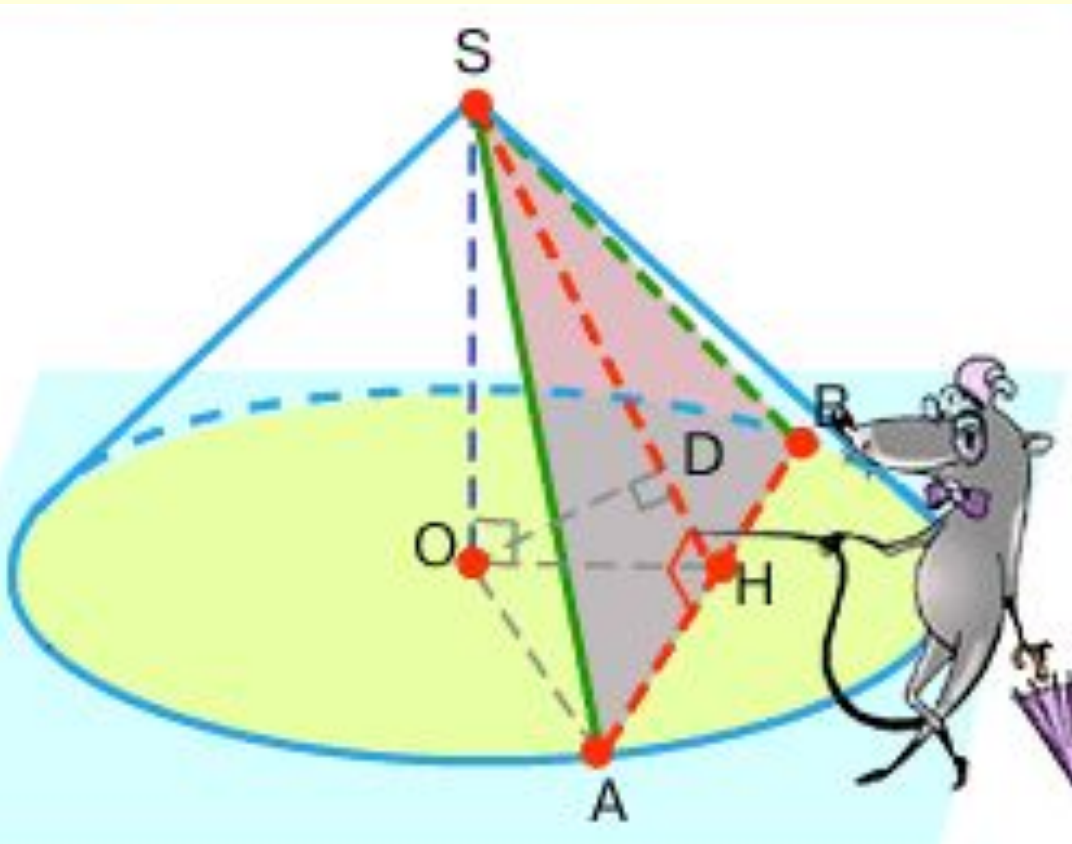
$$SA = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$$

*Из  $\triangle SAH$ :*

$$AH = \sqrt{SA^2 - SH^2} = \frac{\sqrt{175}}{4} = \frac{5\sqrt{7}}{4}$$



### 3) Вычислим площадь треугольника.



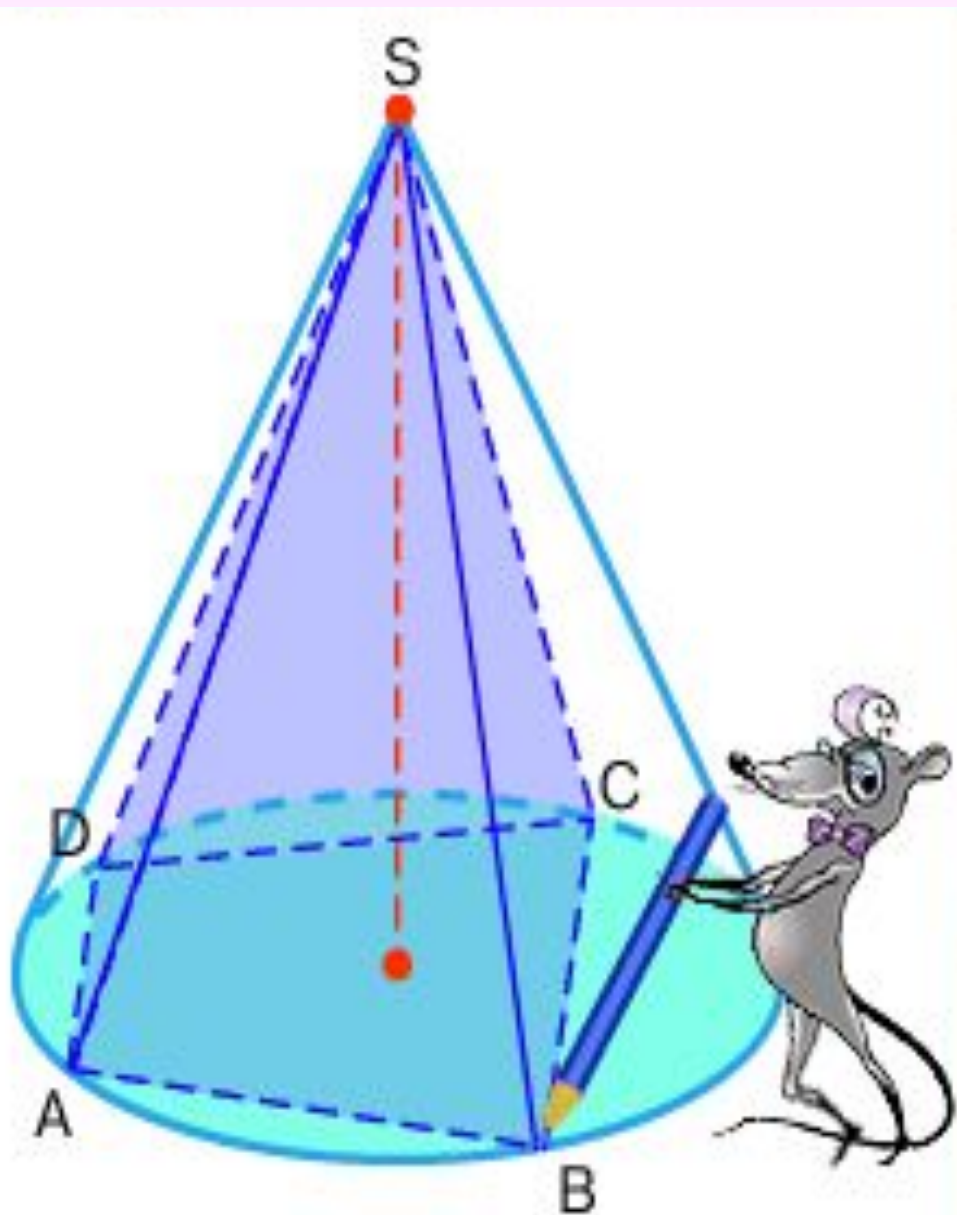
$$SH = \frac{25}{4} \quad AH = \frac{5\sqrt{7}}{4}$$

$$AB = 2 \cdot AH = \frac{5\sqrt{5}}{2}$$

$$S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2} SH \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{4} \cdot \frac{5\sqrt{7}}{2} = \frac{125\sqrt{7}}{16}$$



# Вписанная и описанная пирамиды.



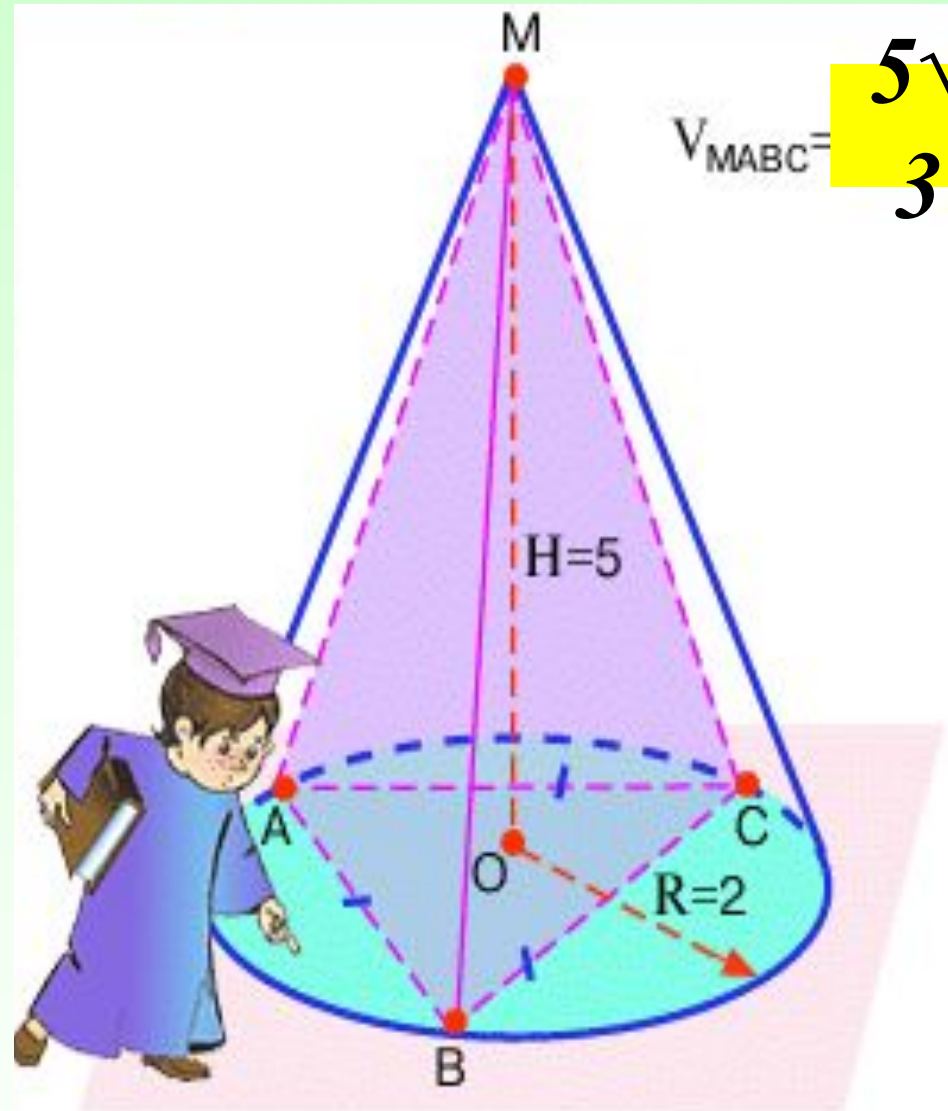
*Пирамидой, вписанной в конус, называется такая пирамида, основание которой – многоугольник, вписанный в основание конуса, а вершина совпадает с вершиной конуса.*



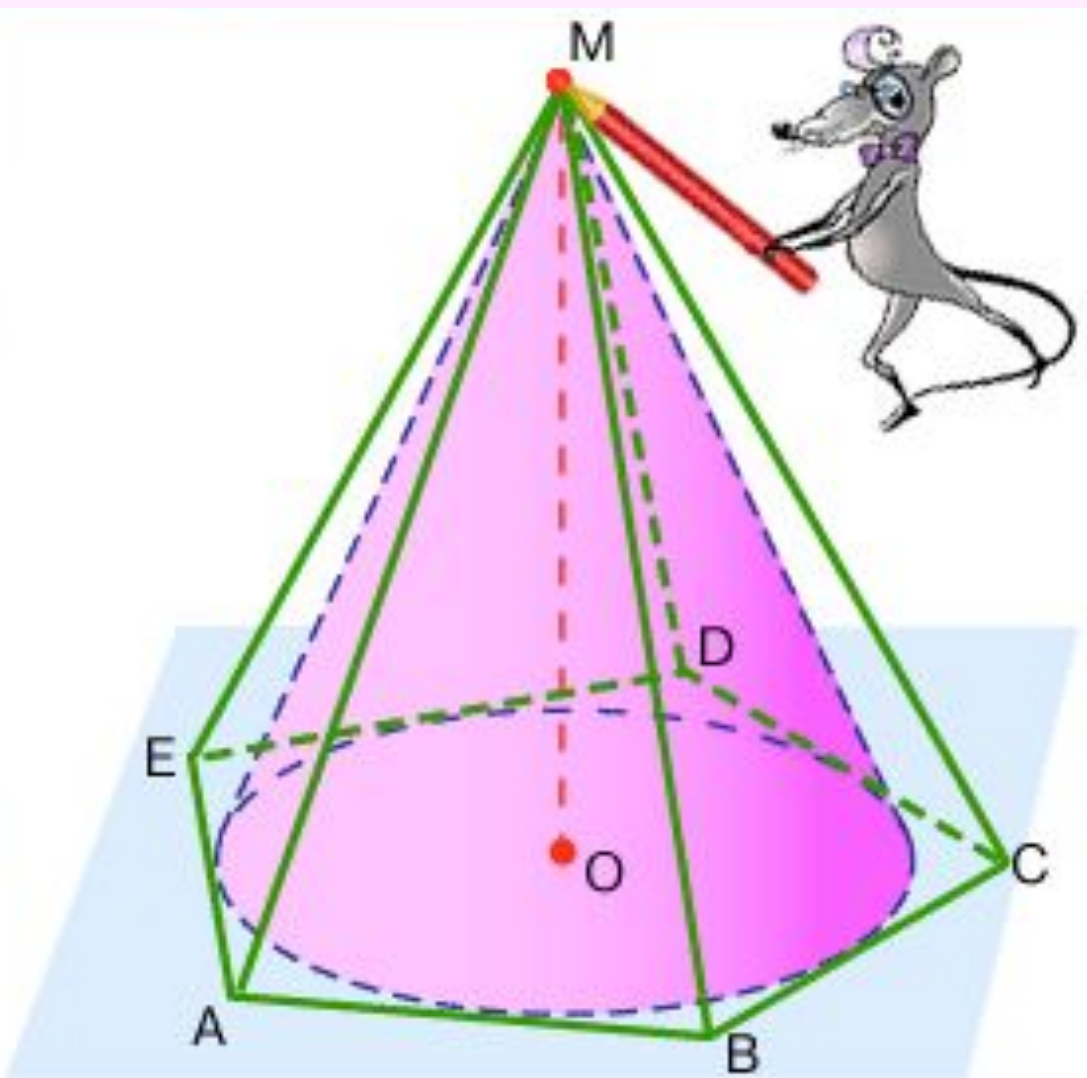
- Пусть высота конуса равна 5, а радиус основания – 2.

*В конус вписана правильная треугольная пирамида.*

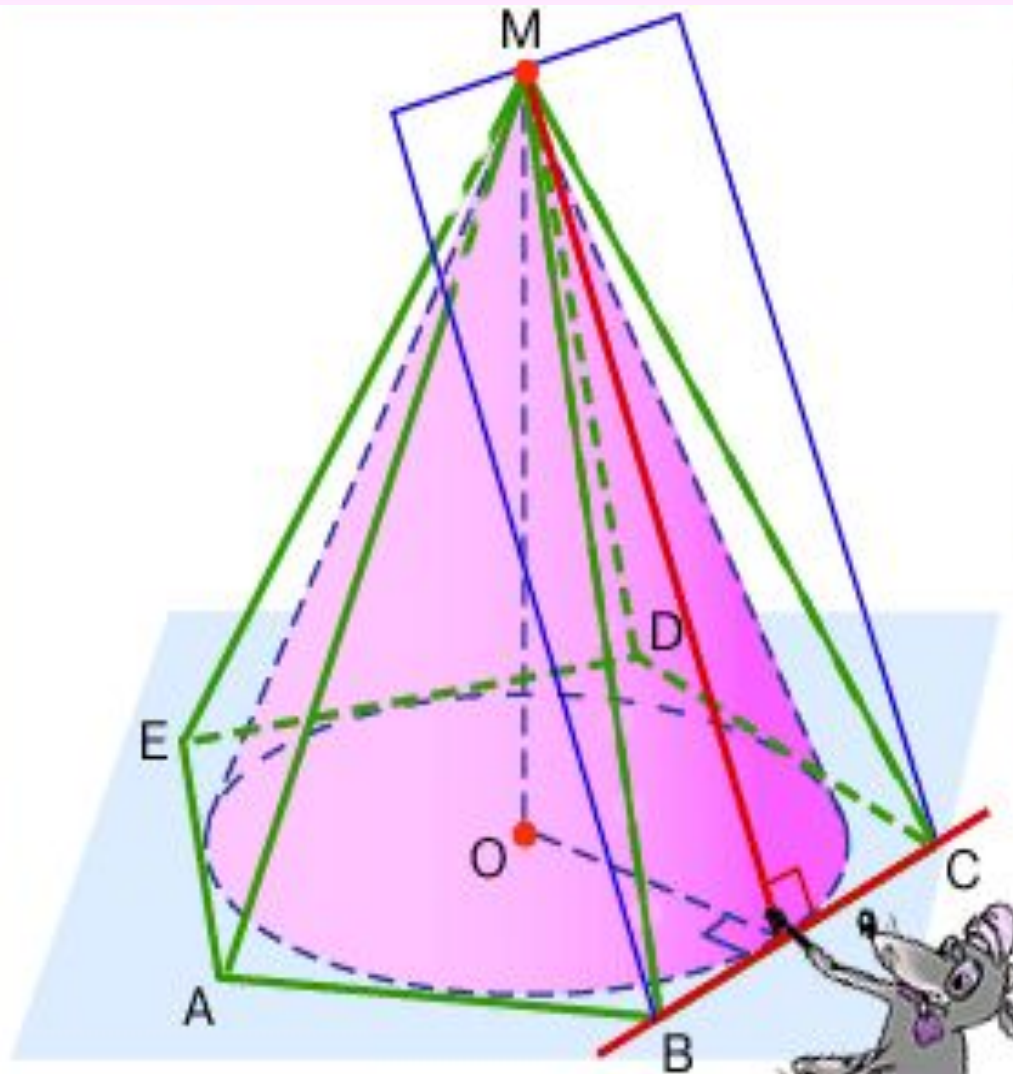
*Определите ее объем.*



# Вписанная и описанная пирамиды.



*Пирамида называется описанной около конуса, если ее основание – это многоугольник, описанный около основания конуса, а вершина совпадает с вершиной конуса.*

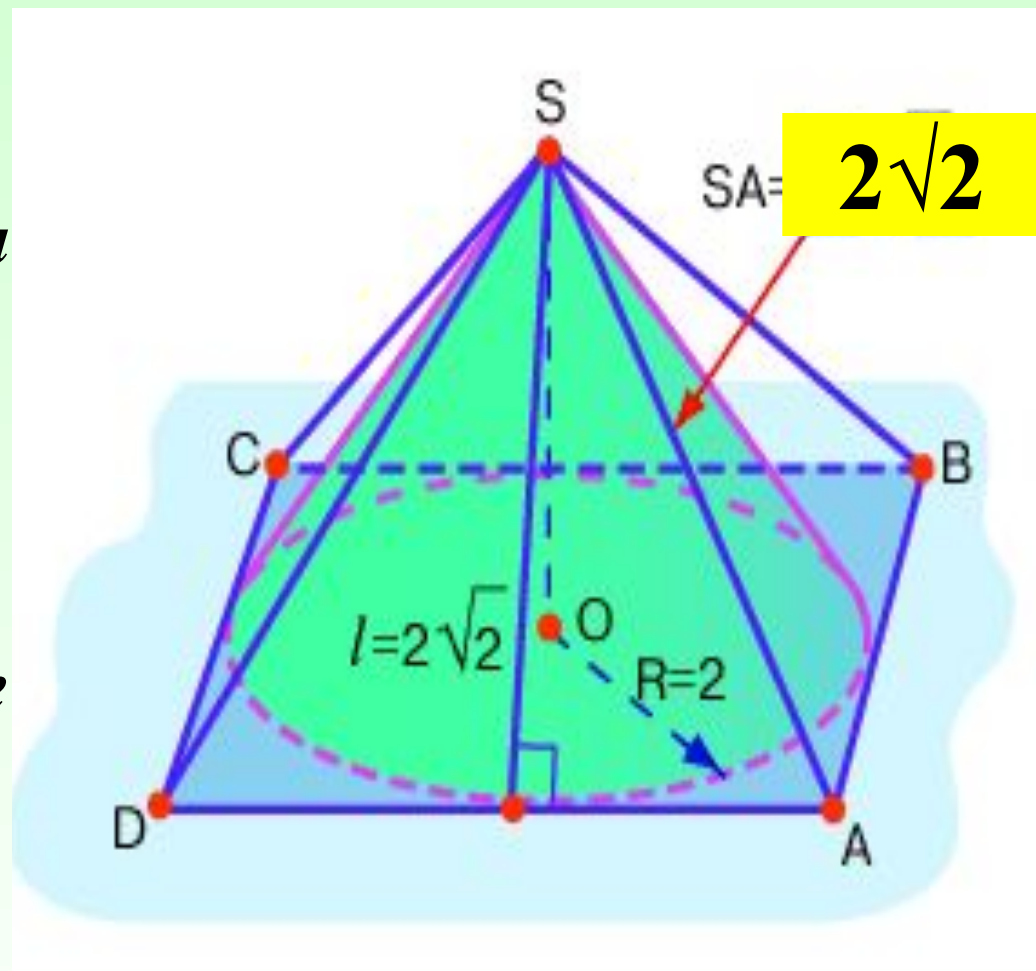


Плоскости граней касаются поверхности конуса.

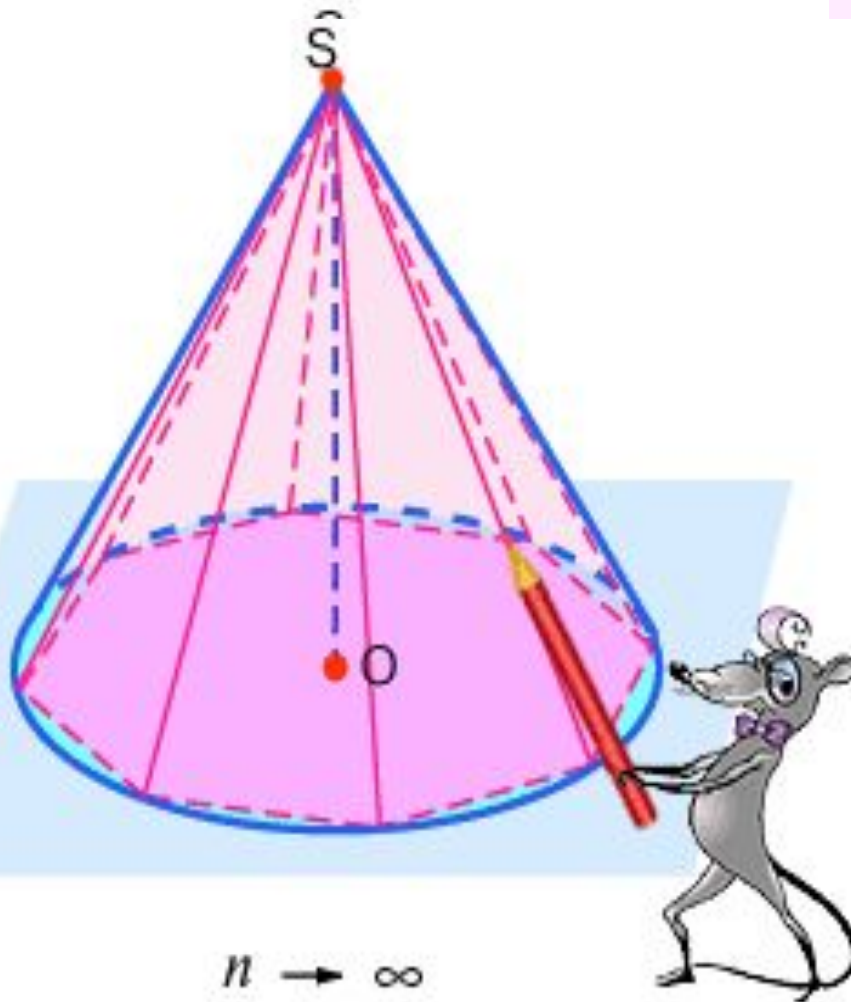
*Плоскости боковых граней описанной пирамиды проходят через образующую конуса и касательную к окружности основания, т.е. касаются боковой поверхности конуса.*

?

- *Вокруг конуса описана правильная четырехугольная пирамида. Радиус основания и образующая конуса известны. Найдите боковое ребро пирамиды.*



# Боковая поверхность конуса.

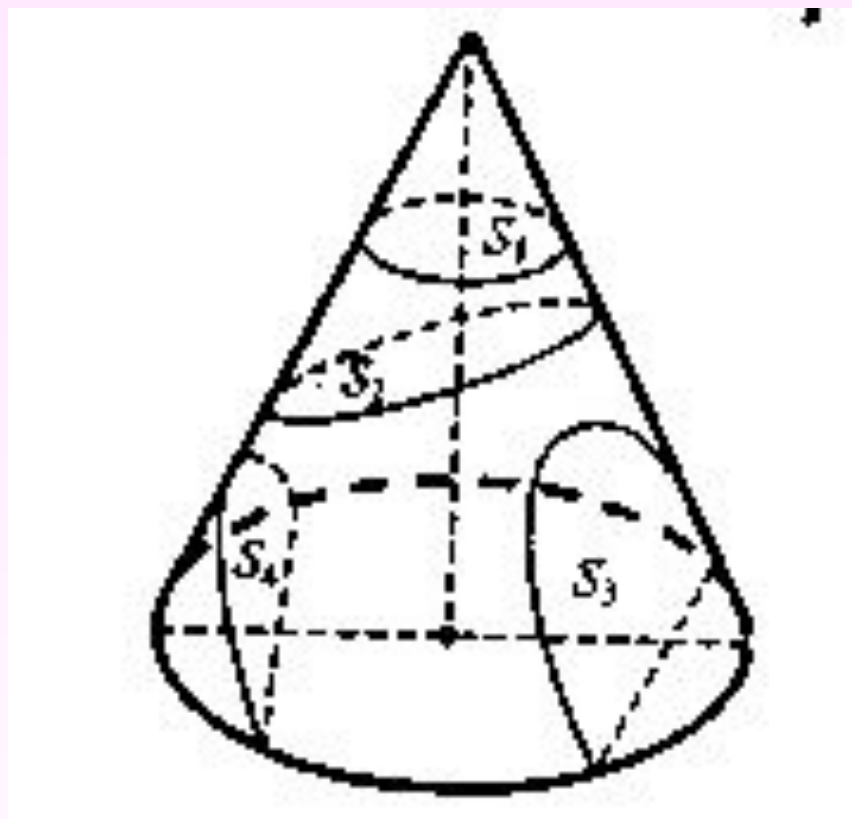


*Под боковой поверхностью конуса мы будем понимать предел, к которому стремится боковая поверхность вписанной в этот конус правильной пирамиды, когда число боковых граней неограниченно увеличивается.*

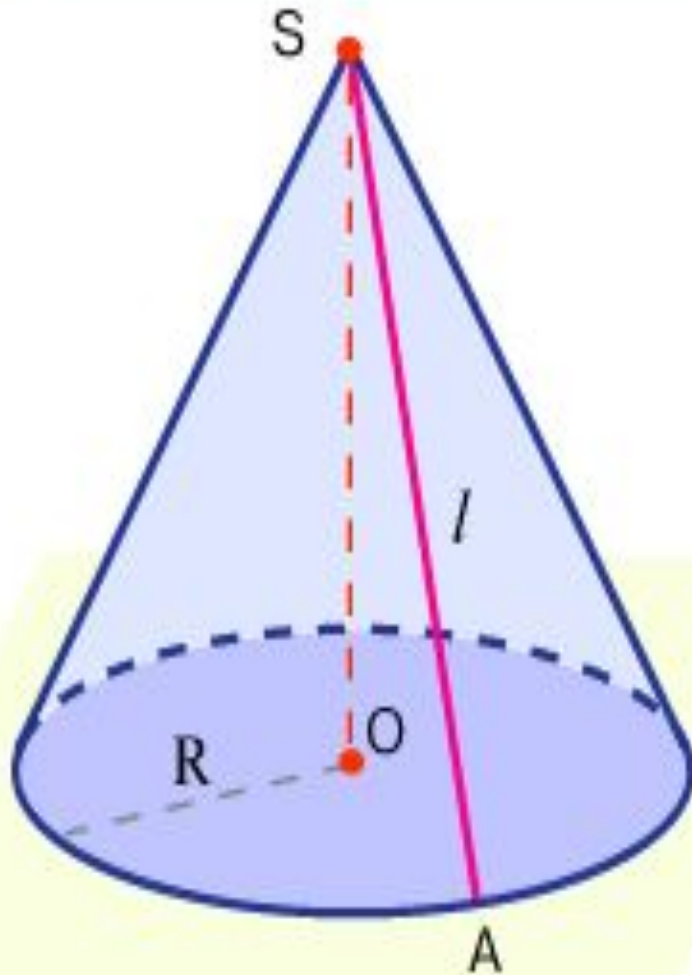
$n \rightarrow \infty$   
Сбок. пов. пирамиды  $\rightarrow$  Сбок. пов. конуса







***Теорема.*** *Площадь боковой поверхности конуса равна половине произведения длины окружности основания на образующую.*



***Дано:***

***R – радиус основания конуса,***

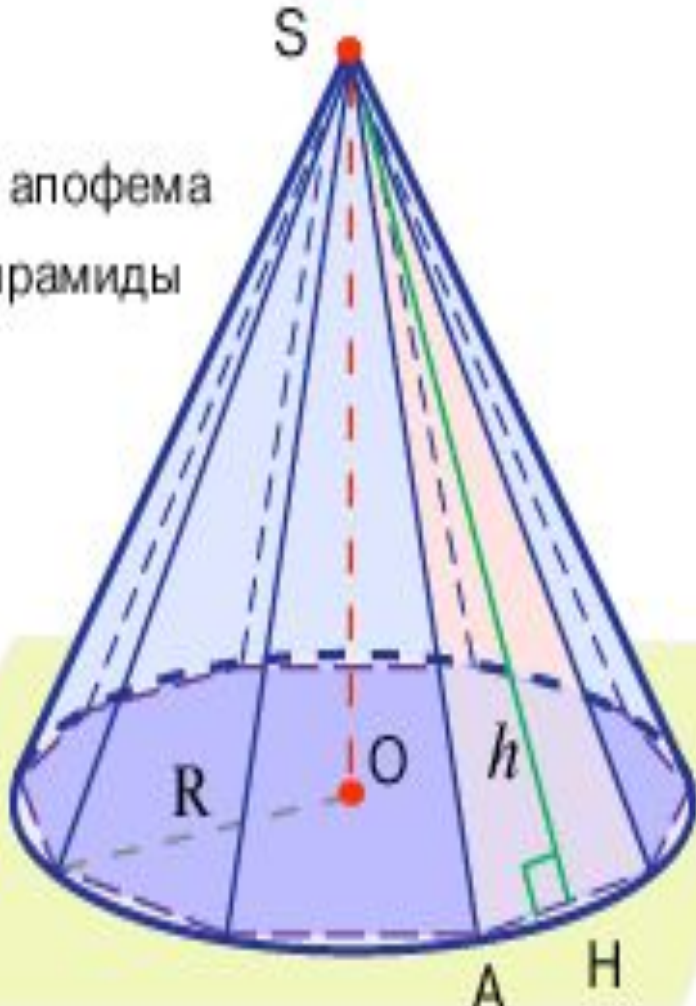
***l – образующая конуса.***

***Доказать:***

$$S_{\text{бок.кон.}} = \pi Rl$$

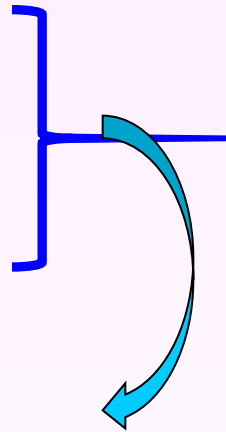
# Доказательство:

$h$  – апофема пирамиды



$$S_{\text{бок.пир.}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн.пир.}} \cdot h$$

$$\begin{array}{l} h \rightarrow l \\ P_{\text{осн.пир.}} \rightarrow 2\pi R \end{array}$$

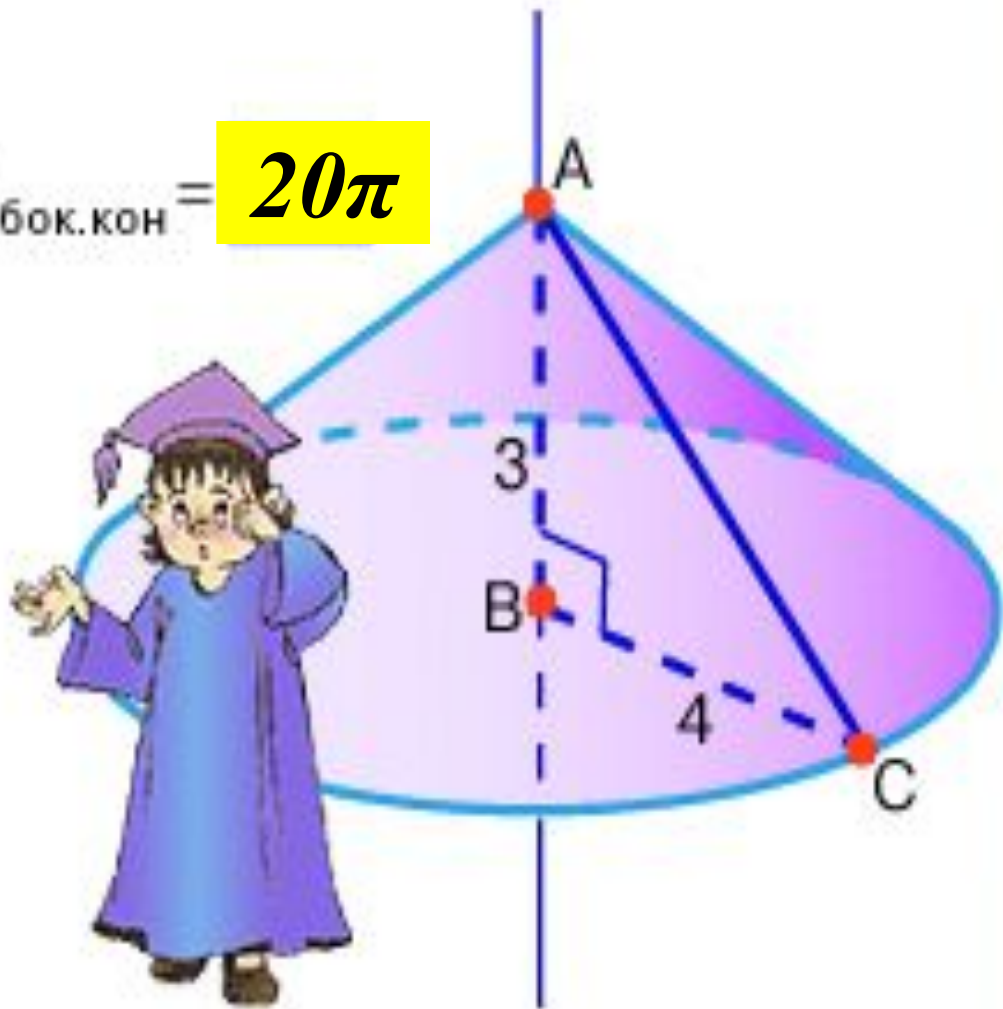


$$\underline{S_{\text{бок.кон.}}} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot Rl = \underline{\pi Rl}$$

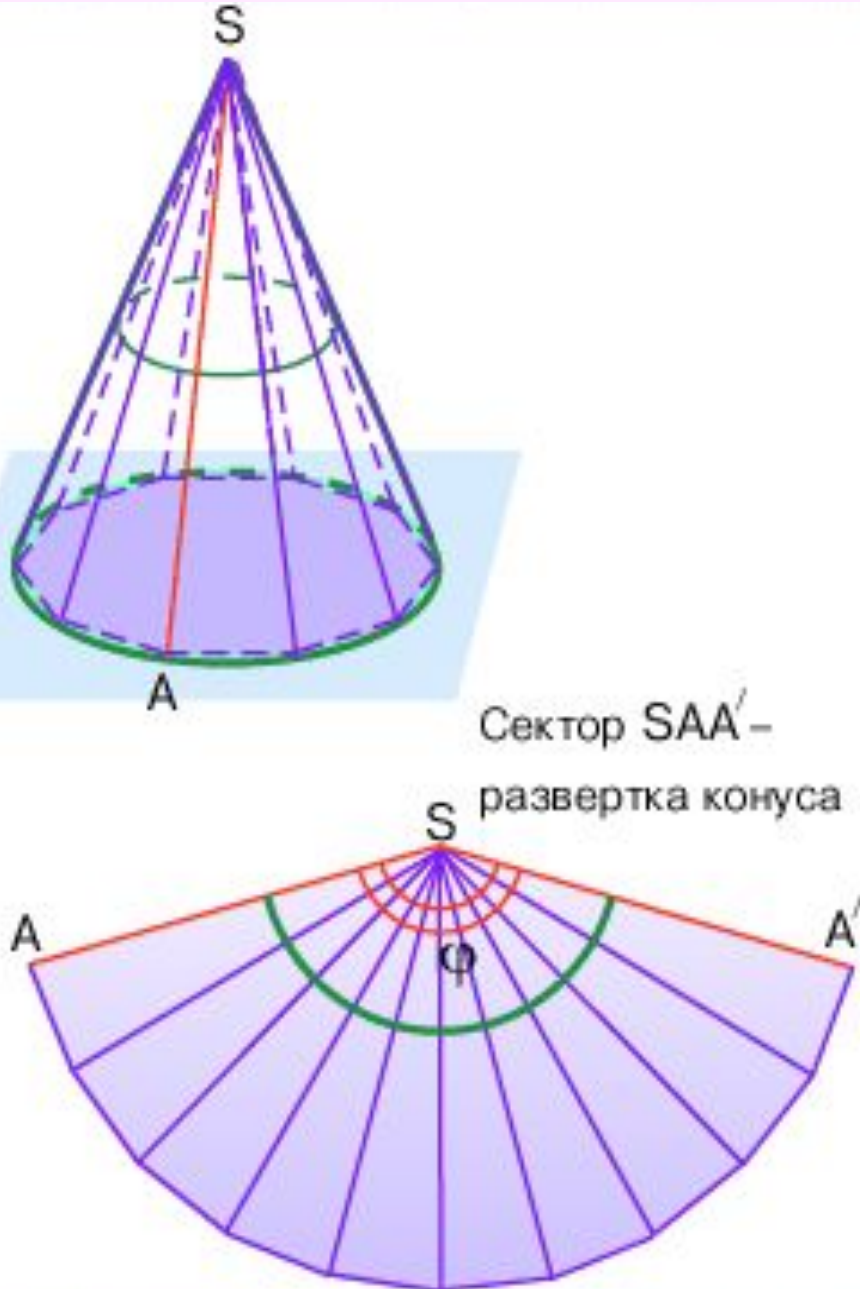
?

- Пусть конус будет получен от вращения прямоугольного треугольника с известными катетами. Найдите боковую поверхность этого конуса.

$$S_{\text{бок.кон}} = 20\pi$$

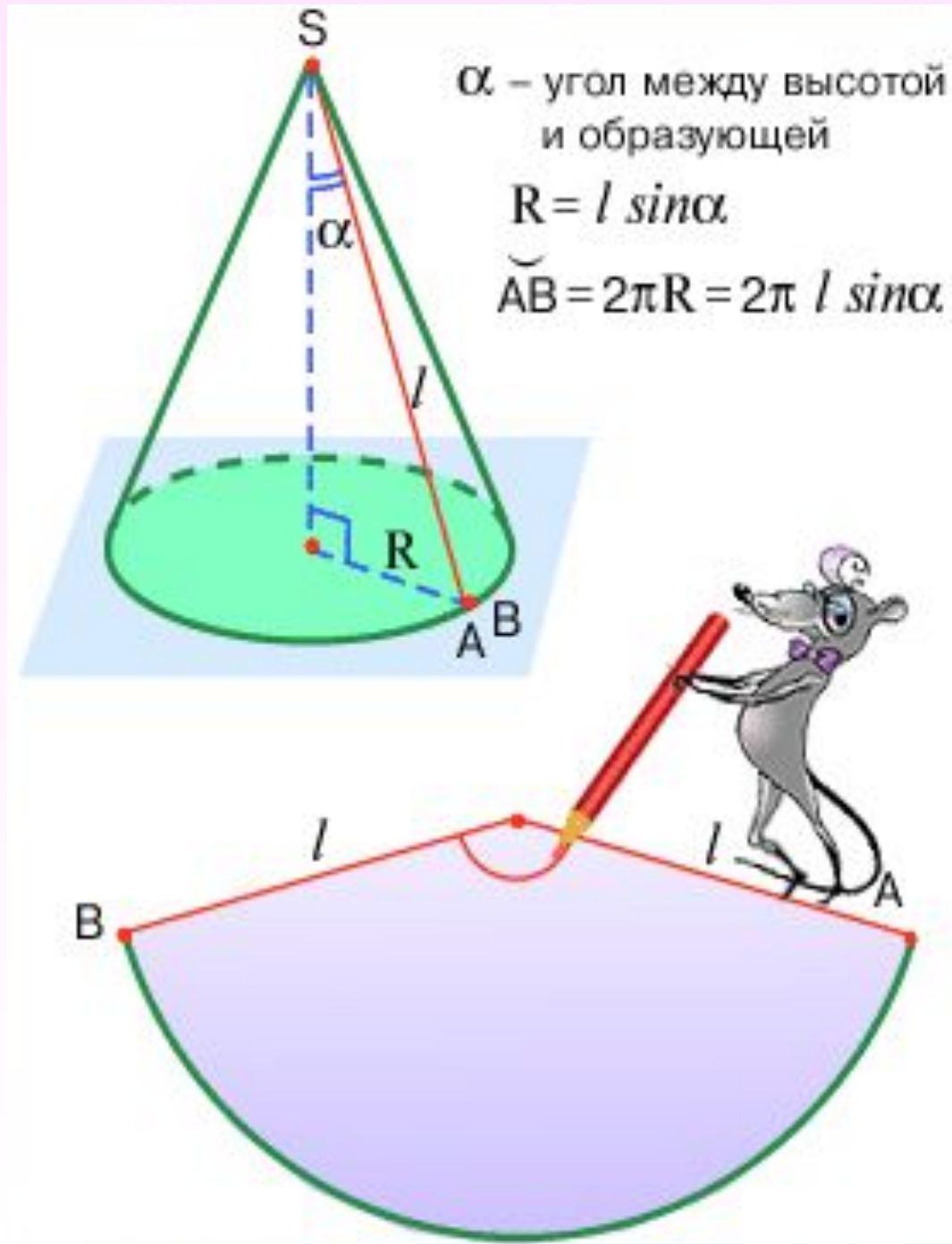


# Развертка конуса.

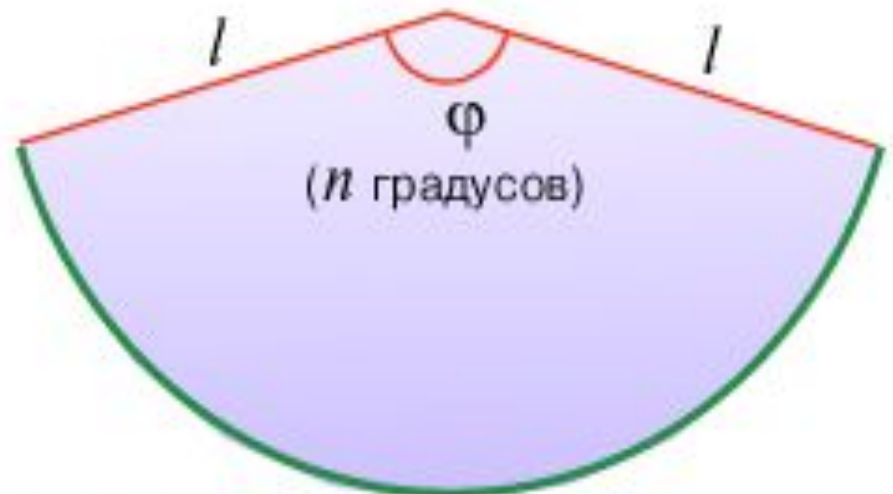
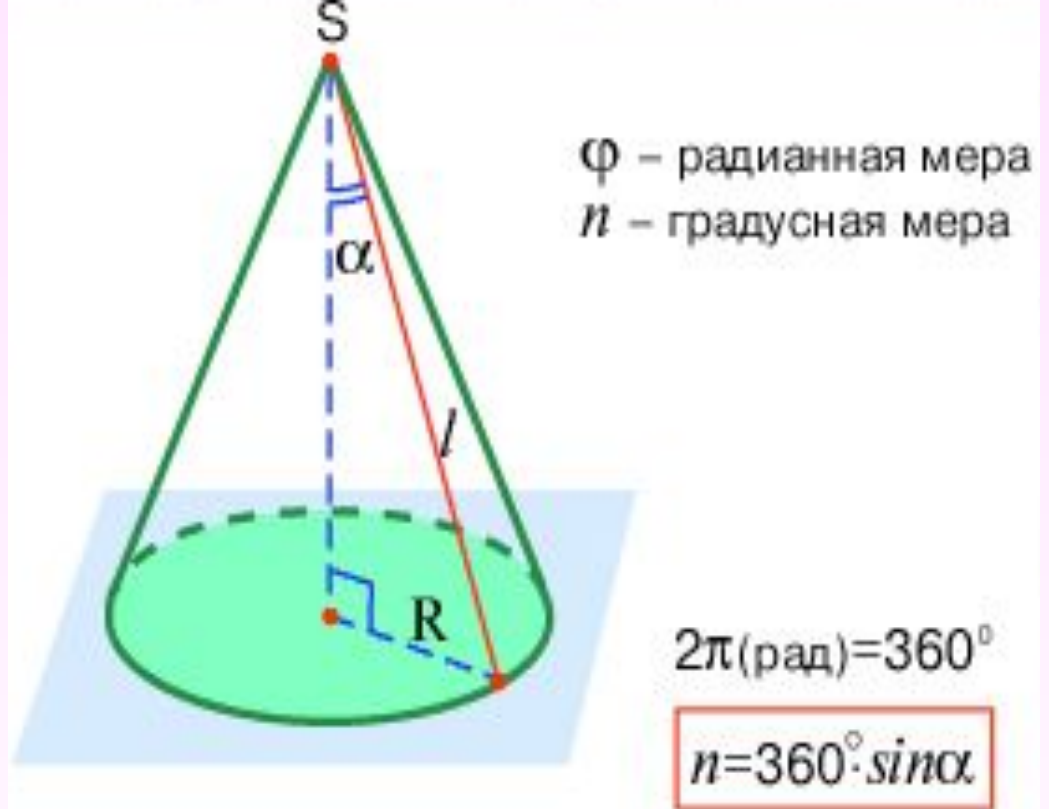


*Развертка конуса – это круговой сектор. Его можно рассматривать как развертку боковой поверхности вписанной правильной пирамиды, у которой число боковых граней бесконечно увеличивается.*

- *Зная угол, образованный высотой и образующей конуса, можно вычислить угол сектора, полученного при развертке конуса, и наоборот.*

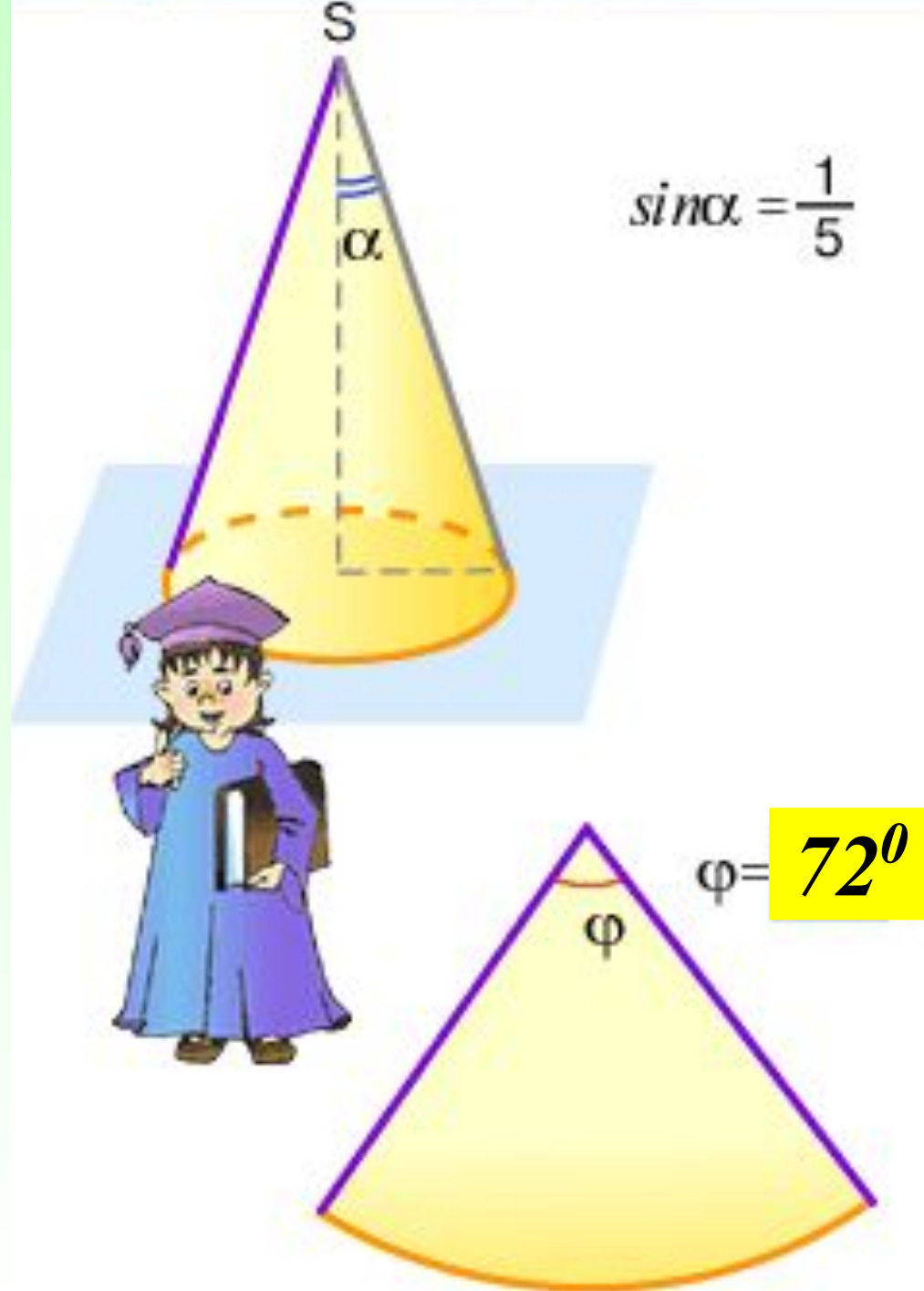


- *Найдем выражение для градусной меры угла развертки конуса.*



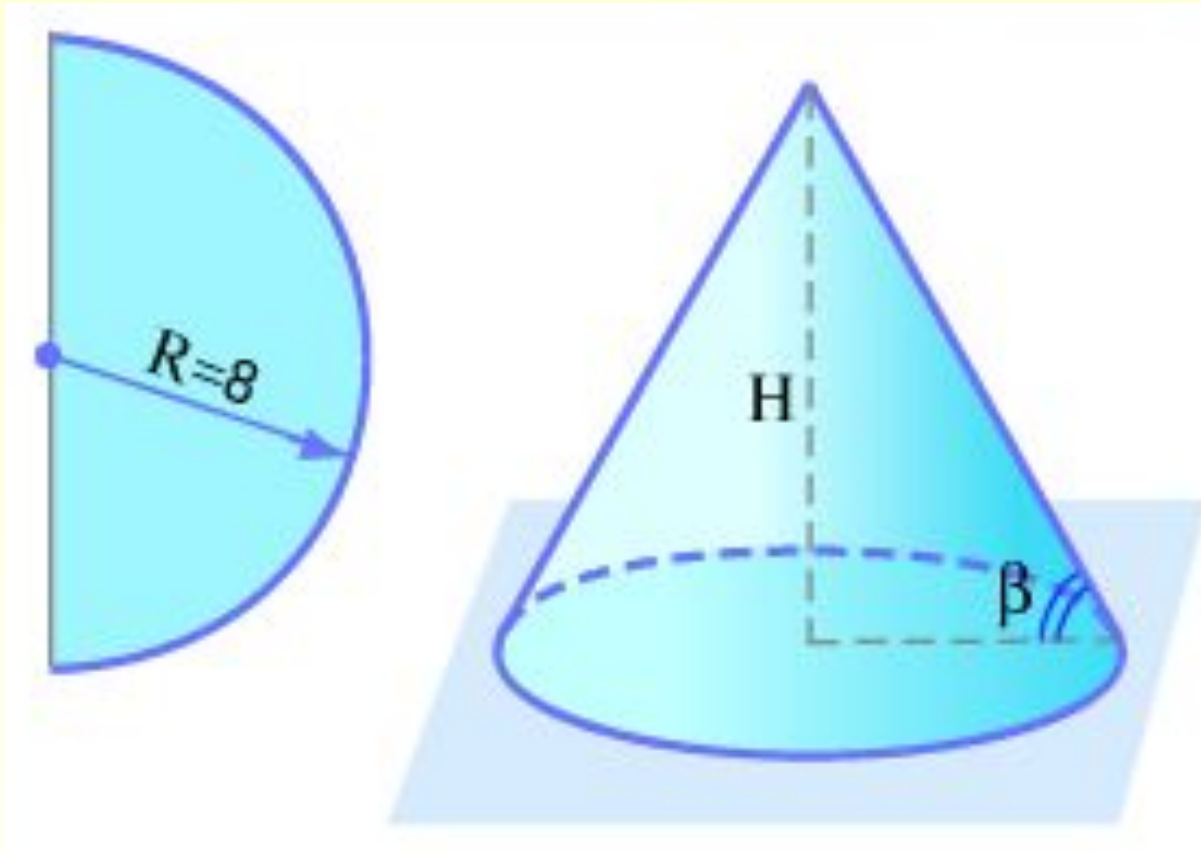


- По данным рисунка определите, чему равен угол развертки этого конуса. Ответ дайте в градусах.





# Задача.

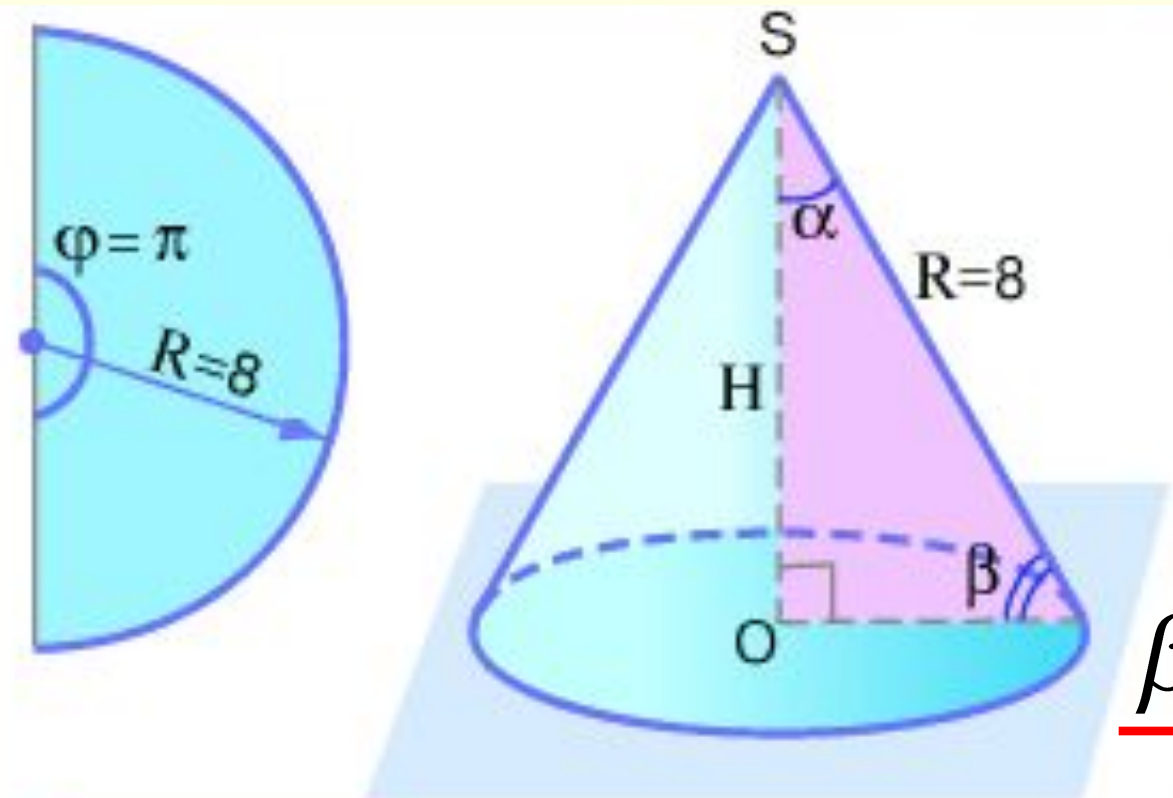


*Дано: полукруг радиусом  $R = 8$ .*

*Найти:  $H$ ,  $\beta$  (угол между образующей и основанием.)*



1) Используем формулу, связывающую угол кругового сектора развертки с углом между высотой и образующей конуса. Получим угол между высотой и образующей, а затем найдем угол между образующей и основанием конуса.



$$\varphi = \pi$$

$$\pi = 2\pi \cdot \sin \alpha$$

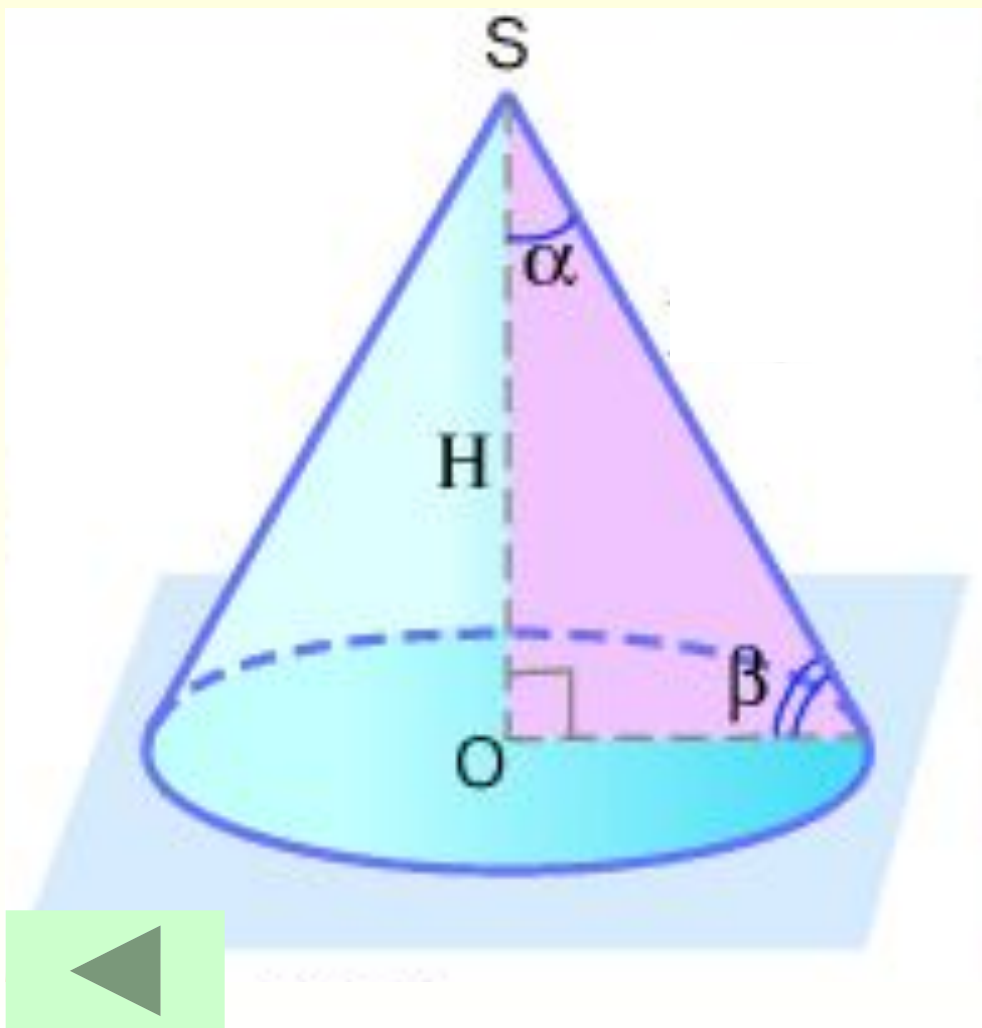
$$\sin \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$\beta = 90^\circ - \alpha = 60^\circ$$



**2) Найдем высоту конуса, используя определение тангенса угла в прямоугольном треугольнике.**



$$\operatorname{tg} \beta = \frac{H}{R}$$

$$\operatorname{tg} 60^{\circ} = \sqrt{3}$$

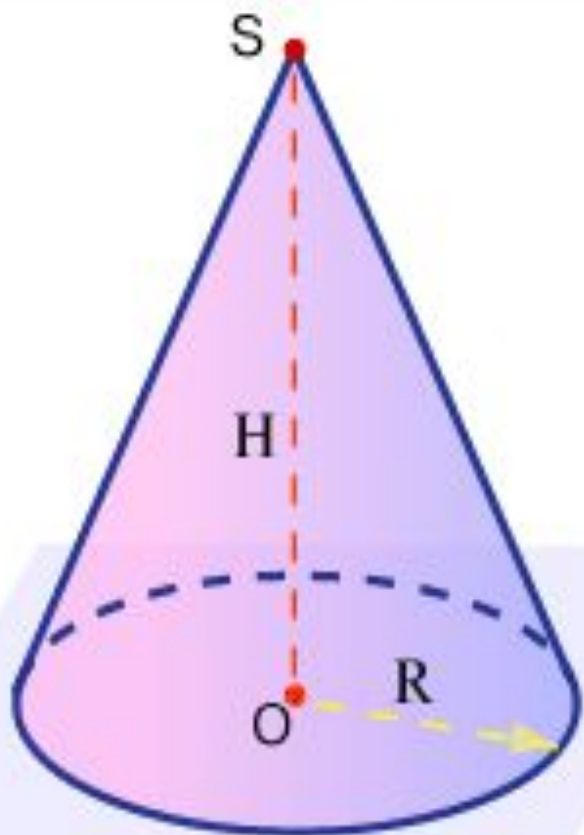
$$H = R \cdot \operatorname{tg} \beta$$

$$H = 8\sqrt{3}$$

---

# Объем конуса.

**Теорема.** Объем конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту.

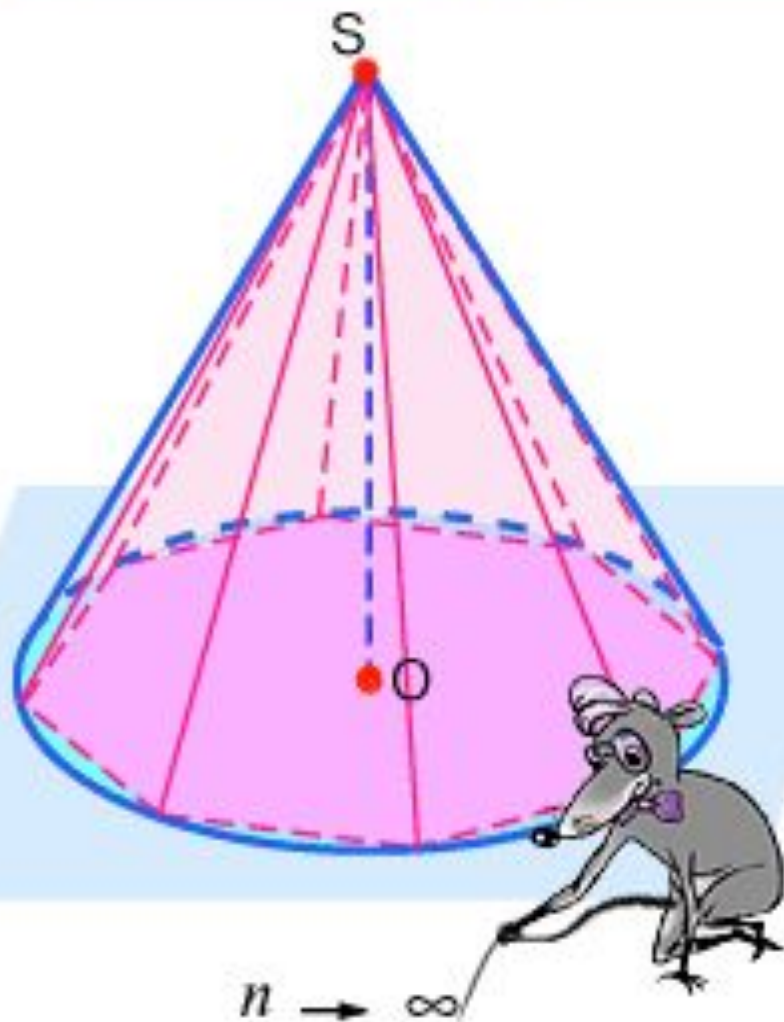


**Дано:**  $R$  – радиус основания  
 $H$  – высота конуса

**Доказать:**  $V_{\text{кон.}} = 1/3 S_{\text{осн.}} H$

$$V_{\text{кон.}} = \frac{1}{3} \pi \cdot R^2 \cdot H$$

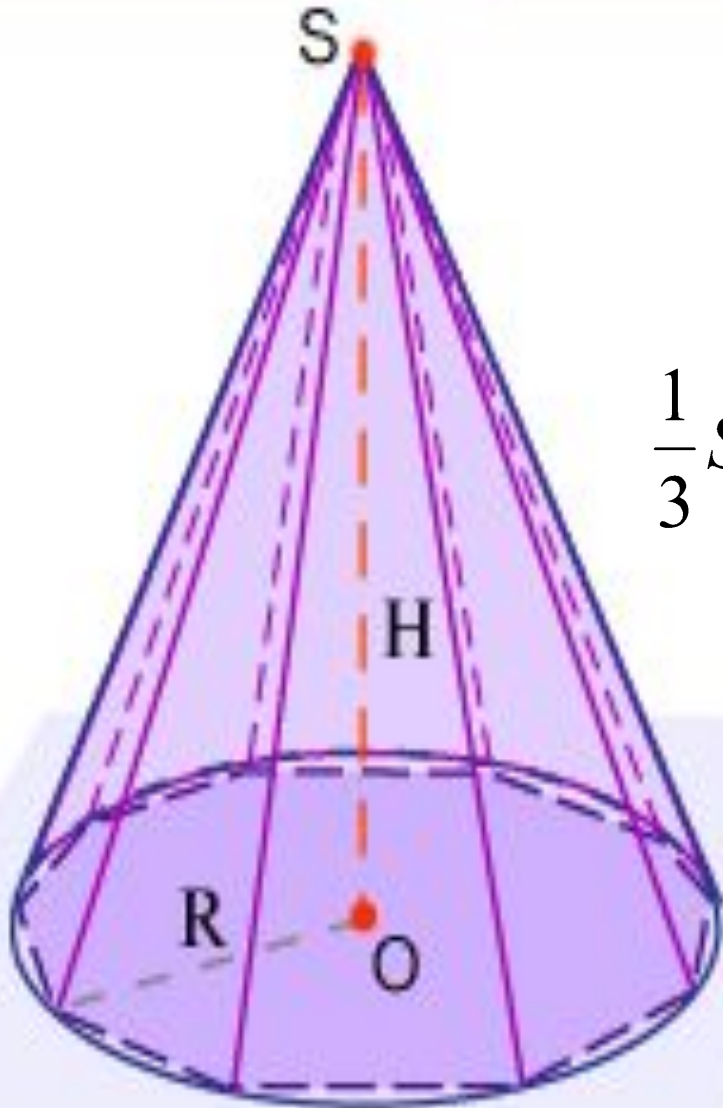
## *Доказательство:*



$$V_{\text{пирамиды}} \rightarrow V_{\text{конуса}}$$

*Объемом конуса будем считать предел, к которому стремится объем вписанной в этот конус правильной пирамиды, когда число боковых граней неограниченно увеличивается.*

## Доказательство:



$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн.пир.}} \cdot H$$

$$S_{\text{осн.пир.}} \rightarrow S_{\text{осн.кон.}} = \pi R^2$$

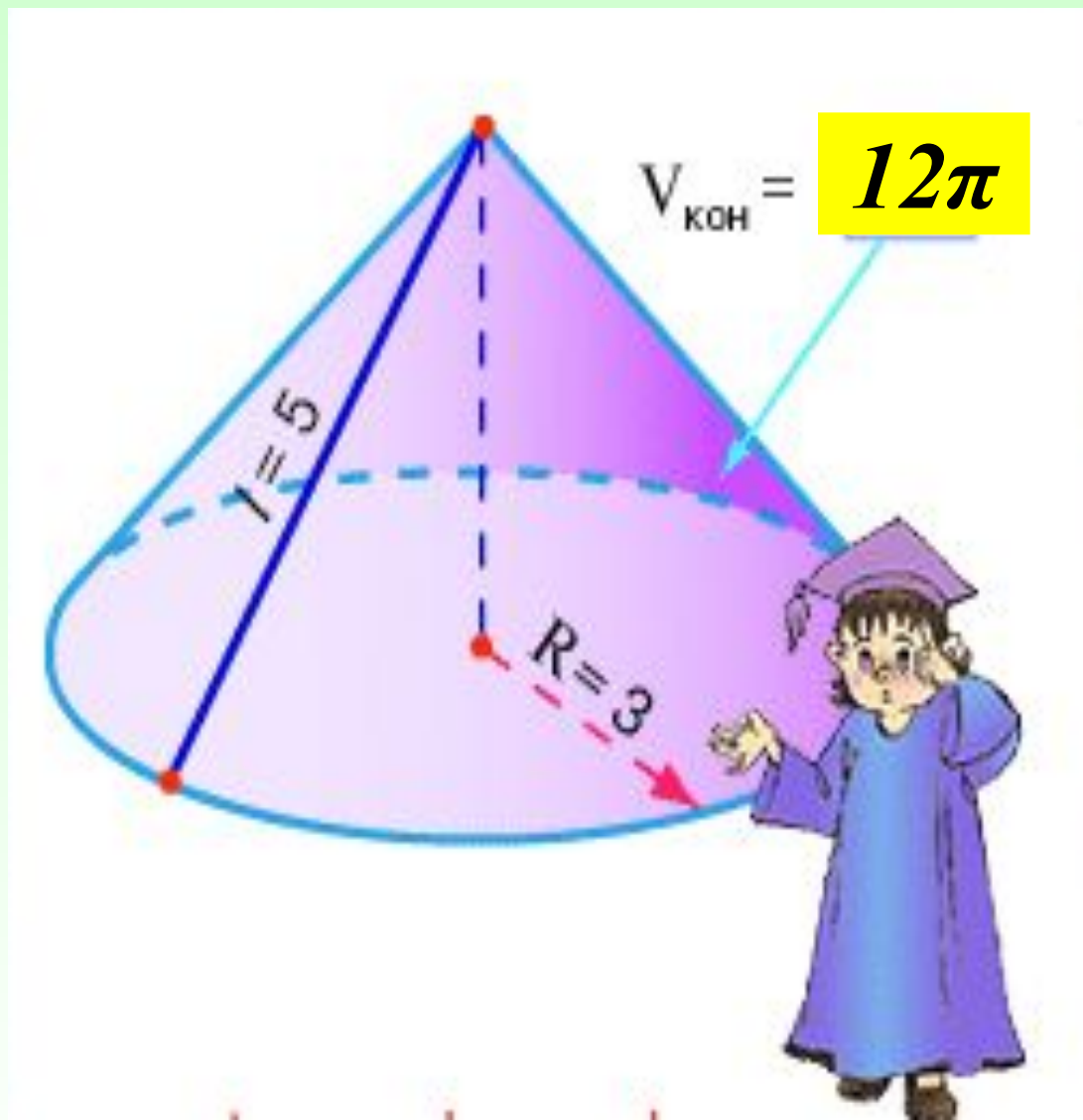
$$\frac{1}{3} S_{\text{осн.пир.}} H \rightarrow \frac{1}{3} S_{\text{осн.кон.}} H = \frac{1}{3} \pi R^2 H$$

$$V_{\text{кон.}} = \frac{1}{3} \pi R^2 H$$

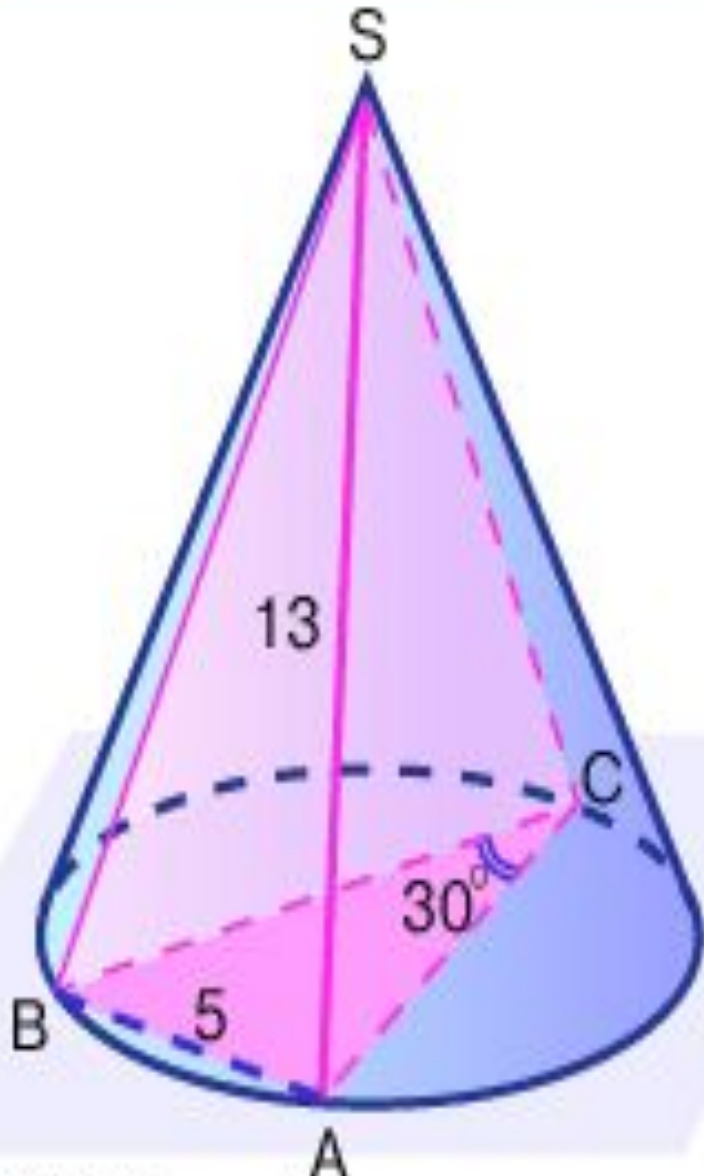
---

?

- *Найдите объем конуса, если радиус его основания равен трем, а образующая равна пяти.*



# Задача.



*Дано:*

*$SABC$  – пирамида,  
вписанная в конус*

$$SA = 13, AB = 5,$$

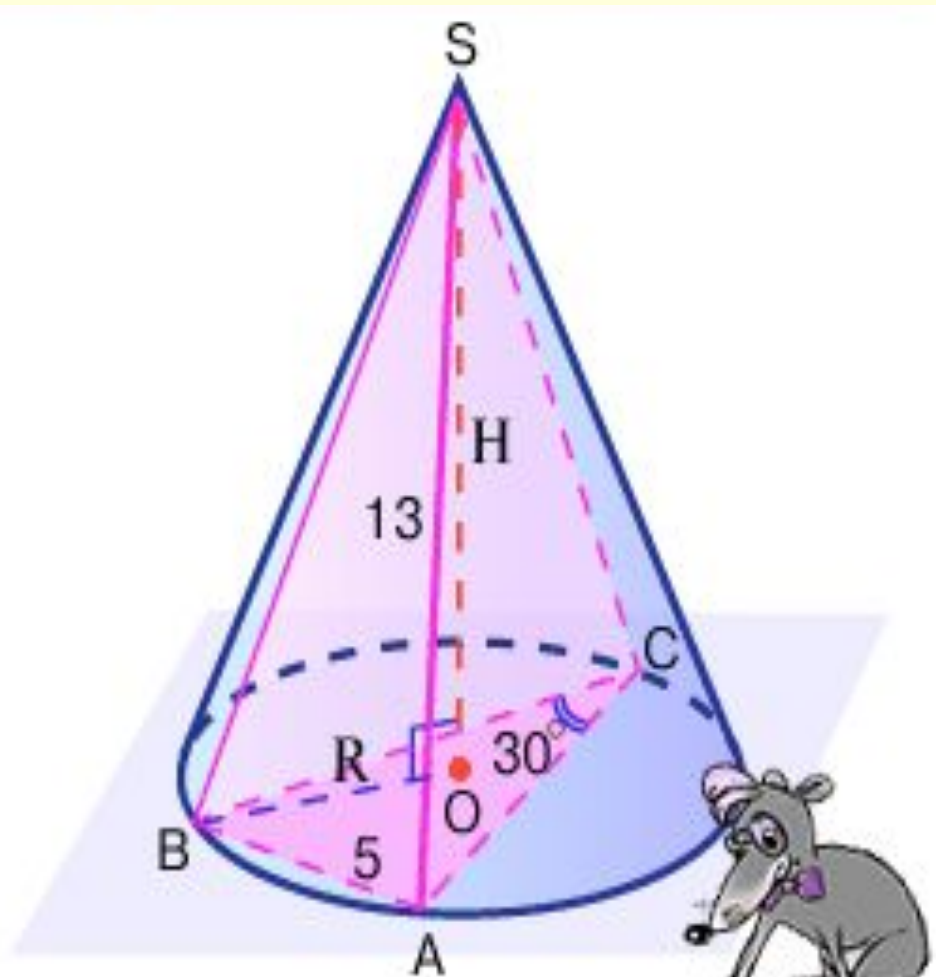
$$\angle ACB = 30^\circ.$$

*Найти:  $V$   
конуса*





*1) Найдем радиус конуса по теореме синусов.*



$$\frac{5}{\sin 30^{\circ}} = 2R$$

$$\sin 30^{\circ} = \frac{1}{2}$$

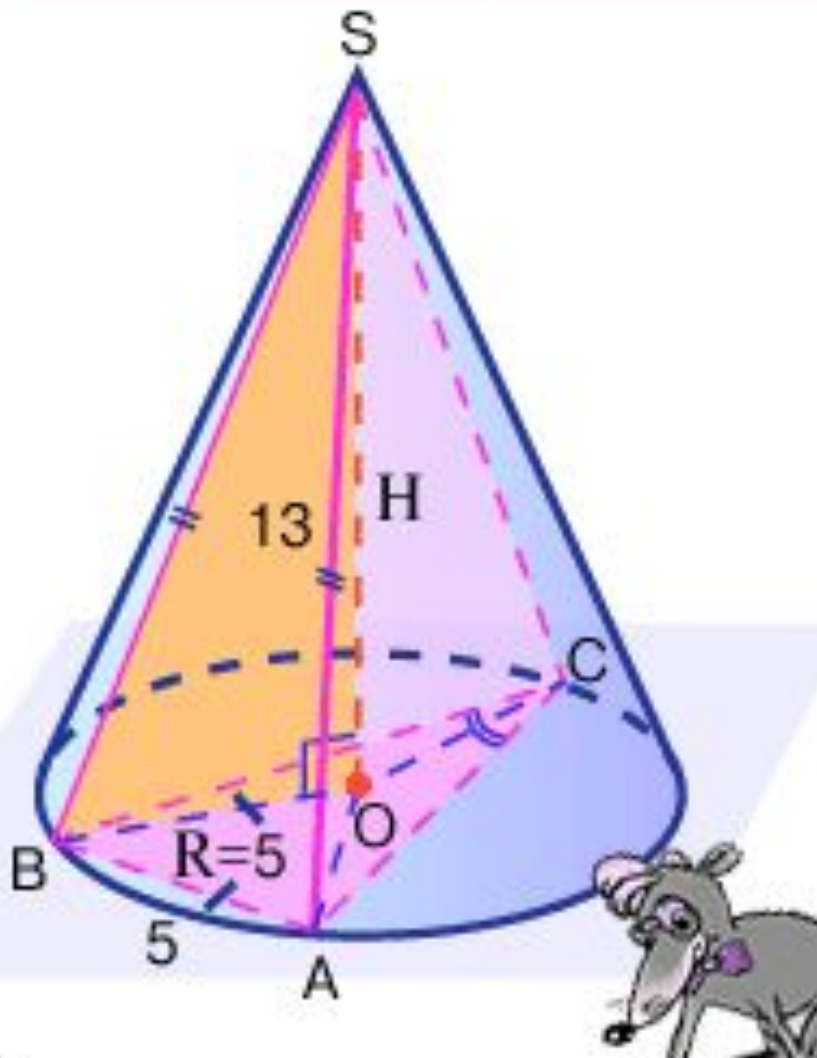
$$\underline{R = 5}$$

Из  $\triangle ABC$ :

$$\frac{AB}{\sin \angle ACB} = 2R \text{ (по теореме синусов)}$$



**2) У пирамиды, вписанной в конус, высота равна высоте конуса и попадает в центр описанной окружности. Найдем высоту пирамиды.**



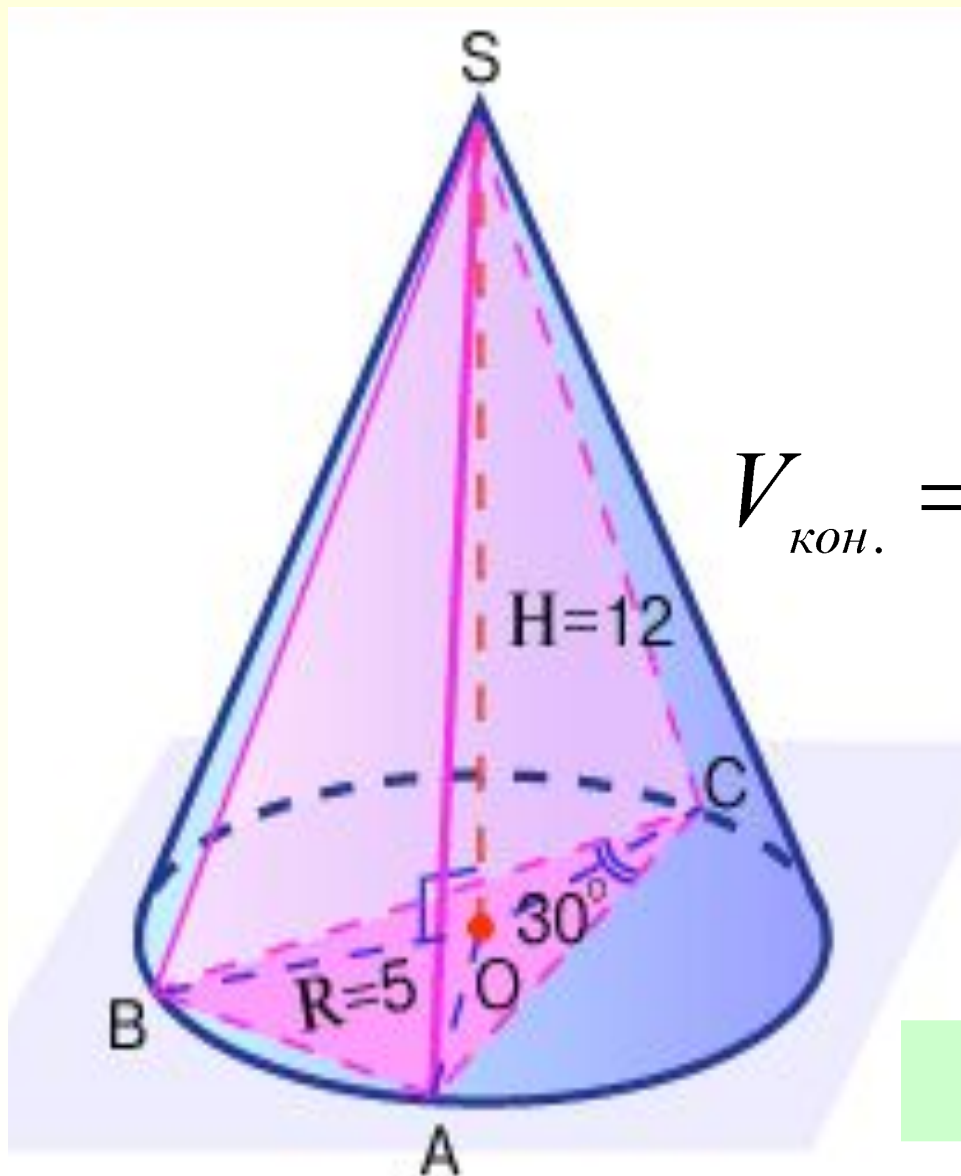
Из  $\triangle SOB$  :

$$SB^2 = R^2 + H^2$$

$$H = \sqrt{SB^2 - R^2} = 12$$



3) Определим объем конуса.



$$V_{\text{кон.}} = \frac{1}{3} \pi \cdot R^2 \cdot H$$

$$V_{\text{кон.}} = \frac{1}{3} \pi \cdot 5^2 \cdot 12 = \underline{\underline{100\pi}}$$

