

Савченко Е.М., учитель математики, МОУ гимназия № , д. Полярные Зори, Мурманской обл.



# Соотношения между сторонами и углами треугольника

Л.С. Атанасян "Геометрия 7-9"

**№ 1021** Докажите, что площадь параллелограмма равна произведению двух его смежных на синус угла между ними.

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \alpha$$

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} ab \sin \alpha$$

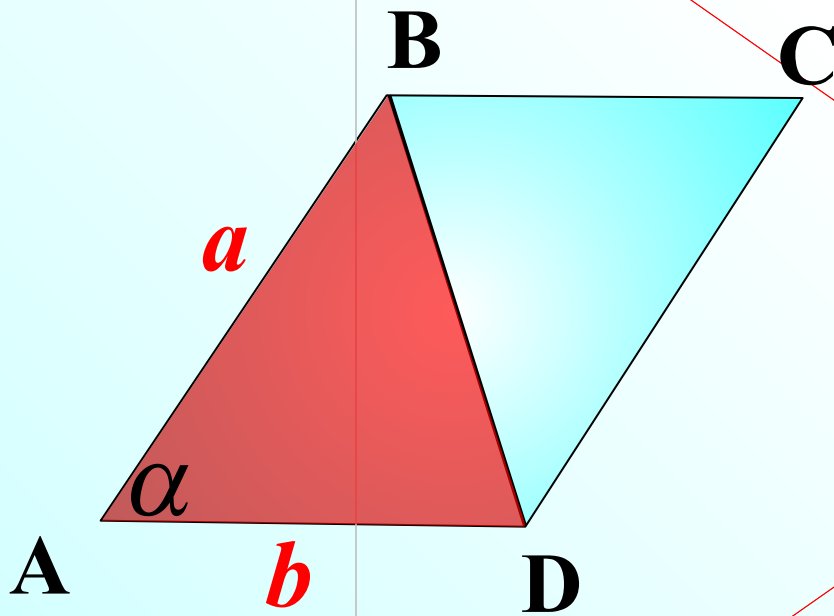
$$\Delta ABD = \Delta CBD$$

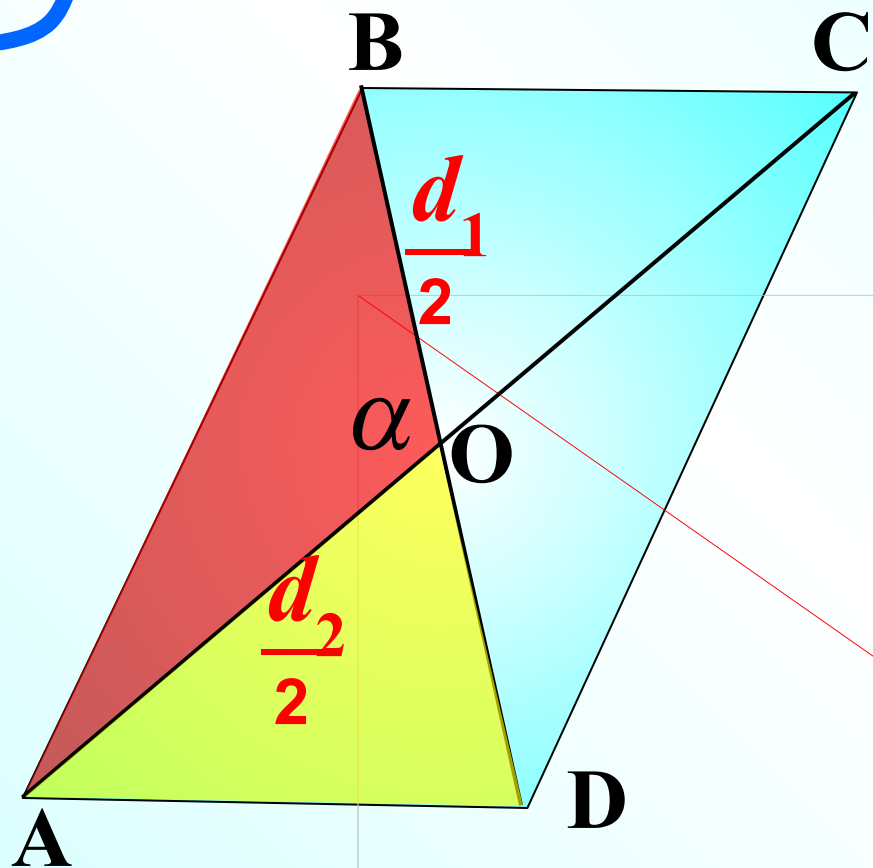
$$S_{ABD} = S_{CBD}$$

$$S_{ABCD} = 2 \cdot S_{ABD}$$

$$S_{ABCD} = 2 \cdot \frac{1}{2} ab \sin \alpha$$

$$S = ab \sin \alpha$$





Докажите, что площадь параллелограмма равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \alpha$$

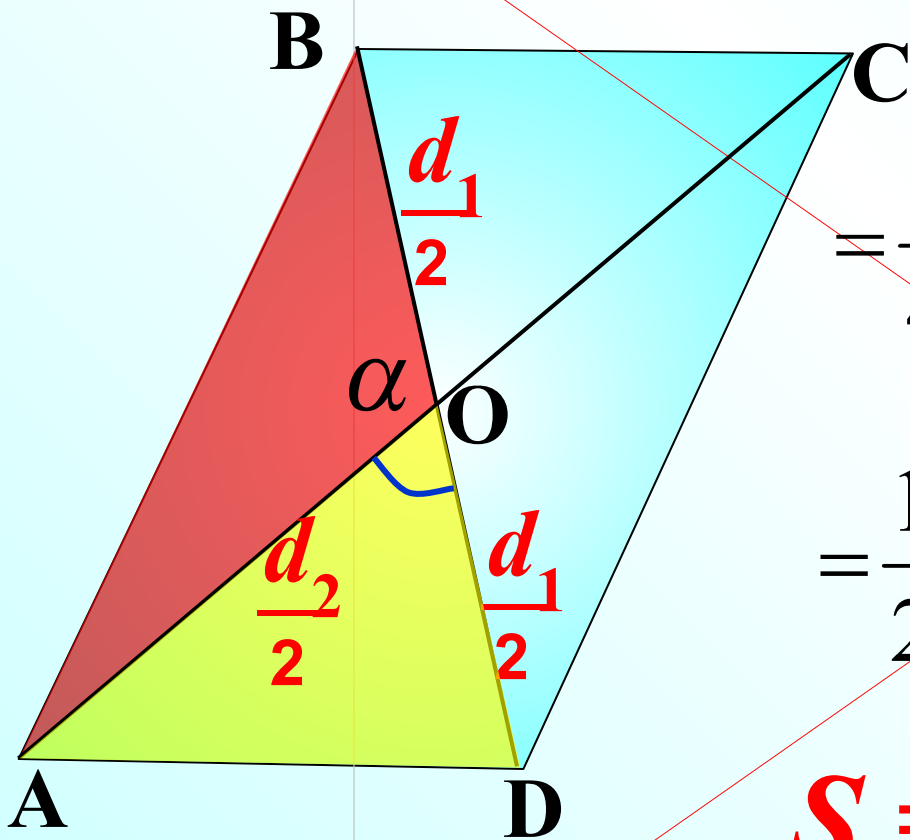
$$\Delta AOB = \Delta COD \Rightarrow S_{AOB} = S_{COD}$$

$$\Delta AOD = \Delta COB \Rightarrow S_{AOD} = S_{COB}$$

$$S_{ABCD} = 2S_{AOB} + 2S_{AOD}$$

$$S_{ABCD} = 2S_{AOB} + 2S_{AOD} =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2} \sin \alpha + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2} \overbrace{\sin(180^\circ - \alpha)}^{\sin \alpha} =$$



$$= \frac{1}{4} d_1 d_2 \sin \alpha + \frac{1}{4} d_1 d_2 \sin \alpha$$

$$= \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \alpha$$

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \alpha$$

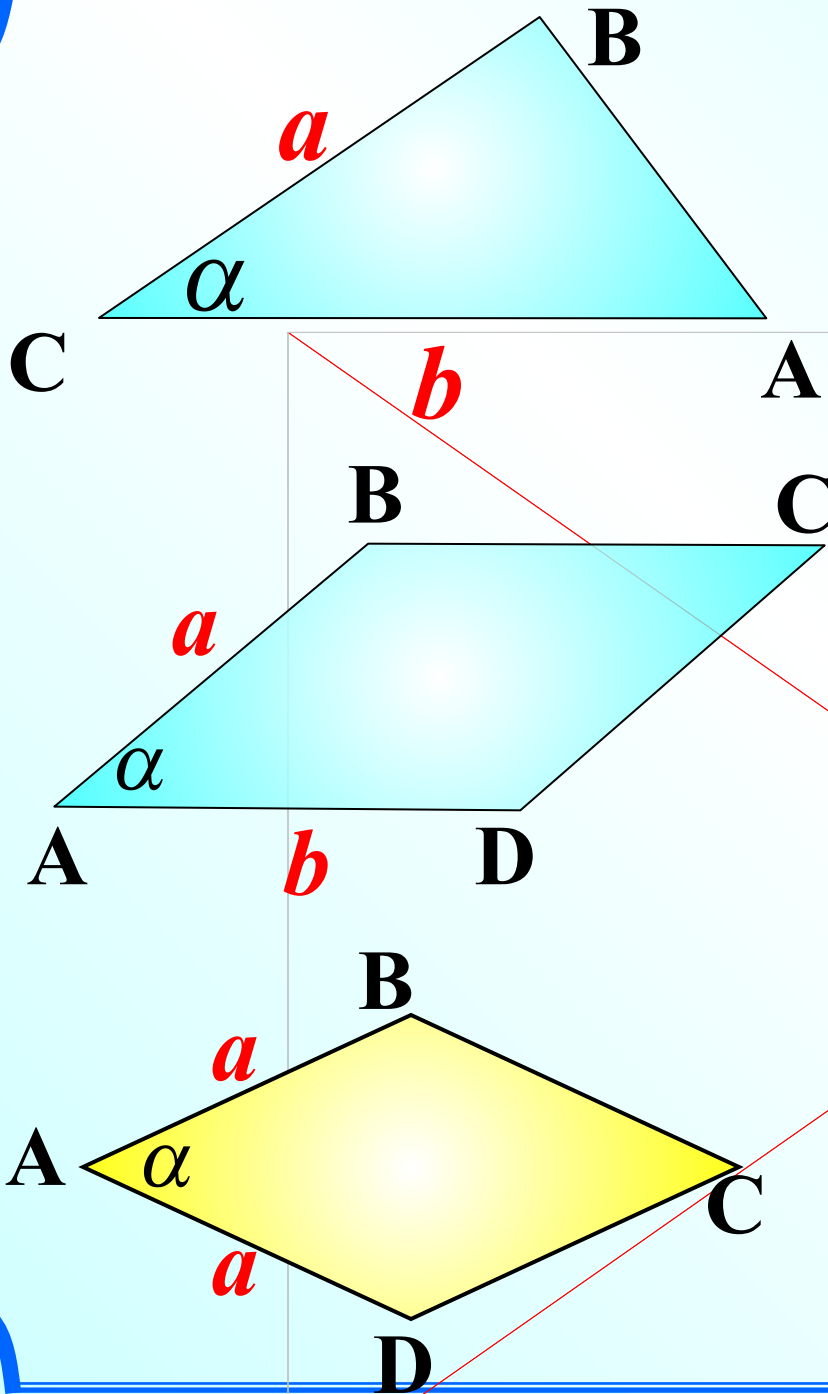
$$S = \frac{1}{2} ab \sin \alpha$$

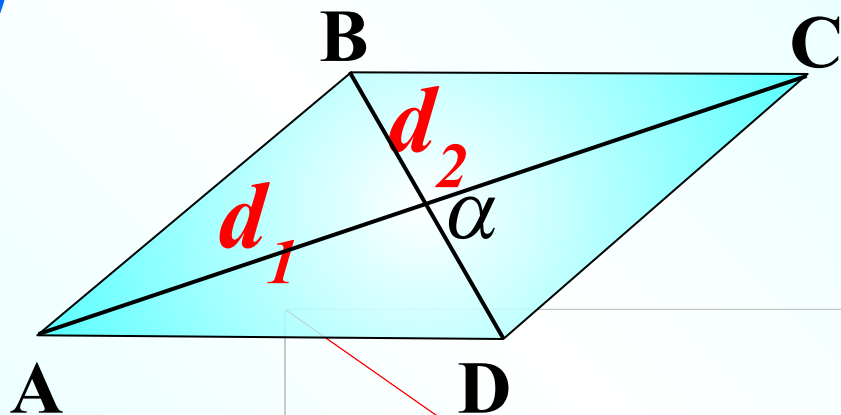
параллелограмм

$$S = ab \sin \alpha$$

ромб

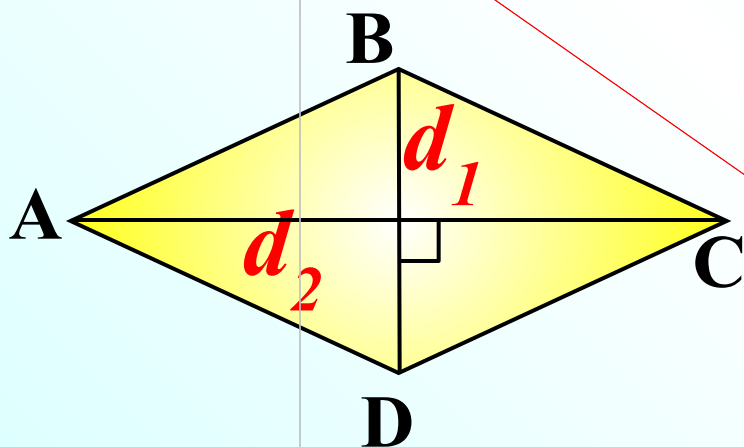
$$S = a^2 \sin \alpha$$





параллелограмм

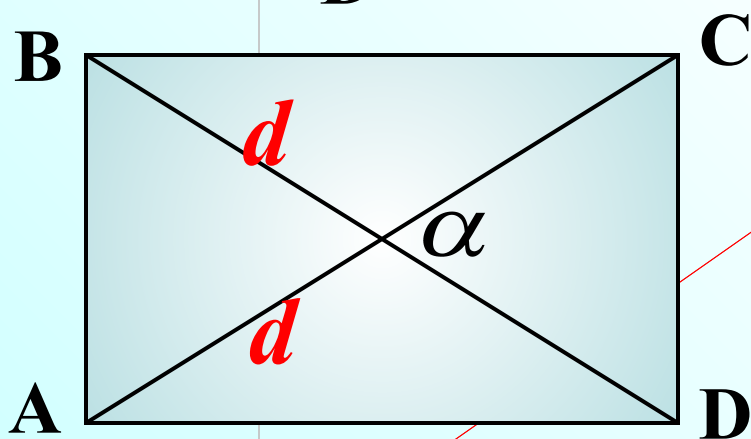
$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \alpha$$



ромб

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2$$

1



прямоугольник

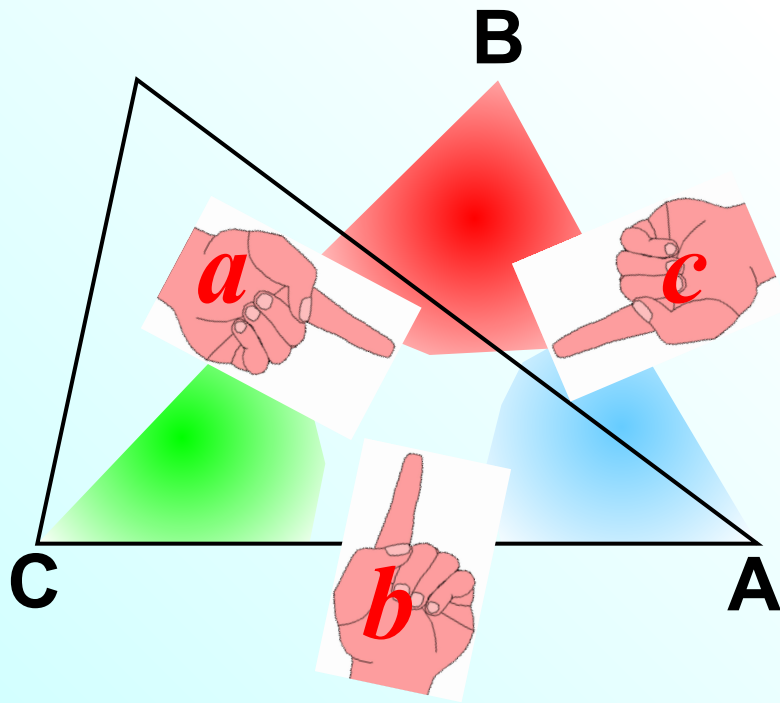
$$S = \frac{1}{2} d^2 \sin \alpha$$



## Теорема синусов.

Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$



$$(1) S = \frac{1}{2} ab \sin C$$
$$(2) S = \frac{1}{2} bc \sin A$$
$$(3) S = \frac{1}{2} ca \sin B$$



$$S = \frac{1}{2} ab \sin C; \quad S = \frac{1}{2} bc \sin A; \quad S = \frac{1}{2} ca \sin B$$

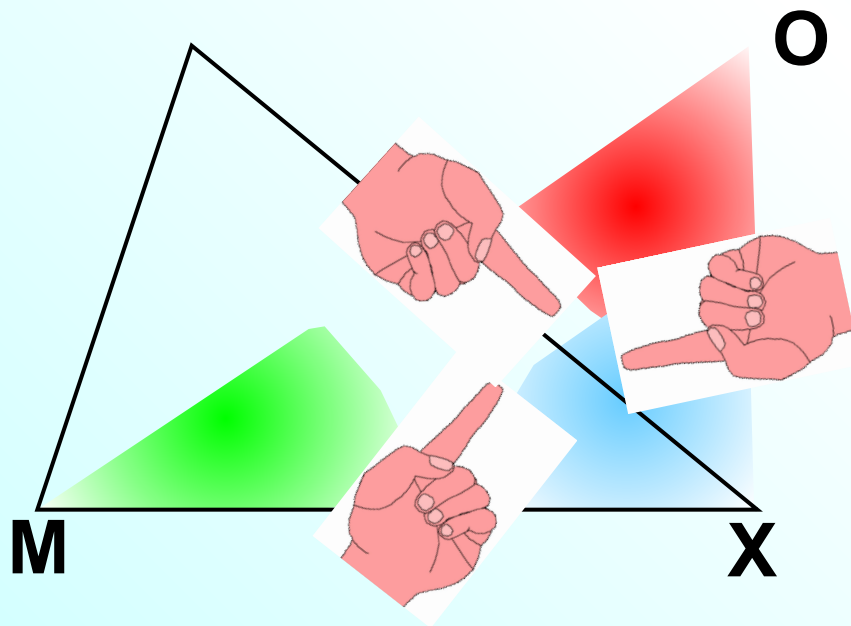
$$\frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} bc \sin A$$

$$\frac{ab \sin C}{\cancel{\sin C} \sin A} = \frac{bc \sin A}{\cancel{\sin A} \sin C} \quad /: \sin C \sin A$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$

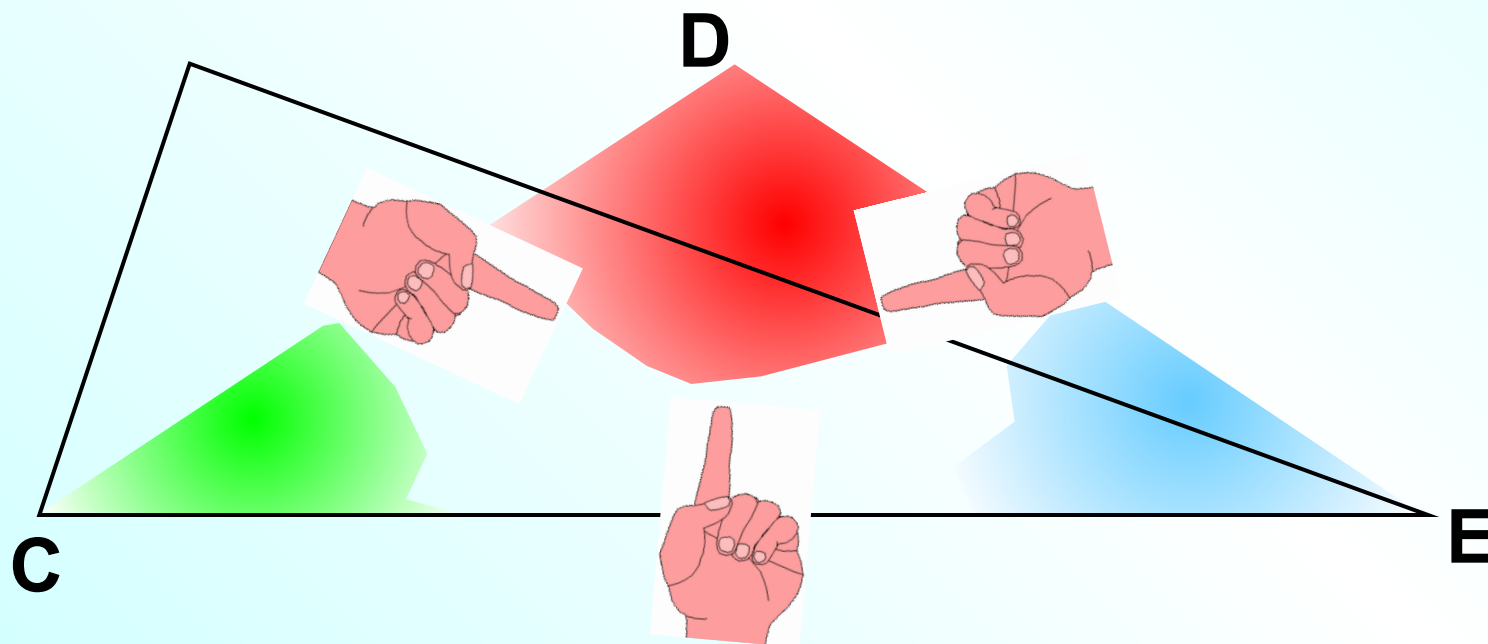
Стороны треугольника пропорциональны синусам  
противолежащих углов.

$$\frac{MO}{\sin X} = \frac{MX}{\sin O} = \frac{OX}{\sin C}$$



Стороны треугольника пропорциональны синусам  
противолежащих углов.

$$\frac{CD}{\sin E} = \frac{EC}{\sin D} = \frac{DE}{\sin C}$$



Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B}$$

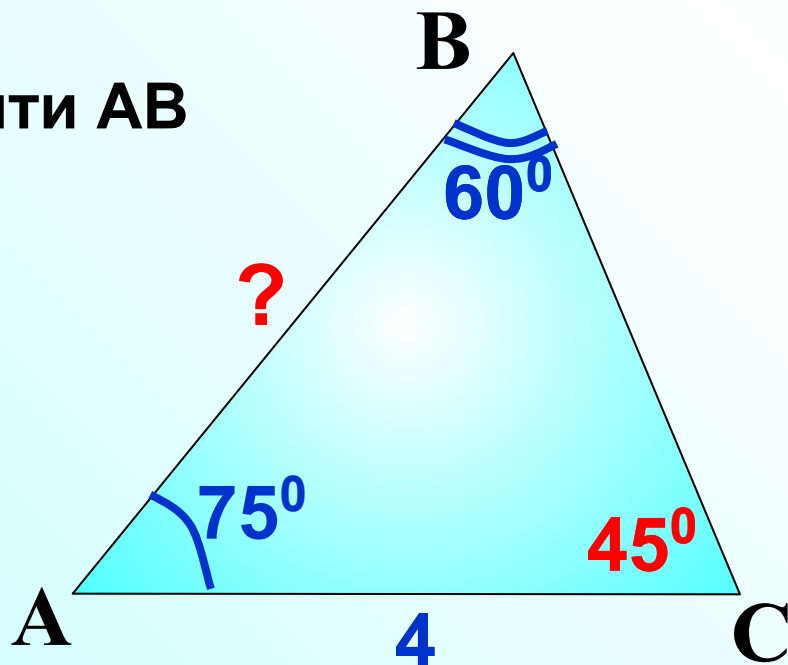
$$\frac{AB}{\sin 45^\circ} = \frac{4}{\sin 60^\circ}$$

$$AB = 4 \cdot \sin 45^\circ : \sin 60^\circ$$

$$AB = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$AB = \frac{4 \cdot \sqrt{2} \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

Найти AB



Стороны треугольника пропорциональны синусам  
противолежащих углов.

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B}$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sin 135^\circ} = \frac{2}{\sin B}$$

$$\sin B = 2 \cdot \sin 45^\circ : (2\sqrt{2})$$

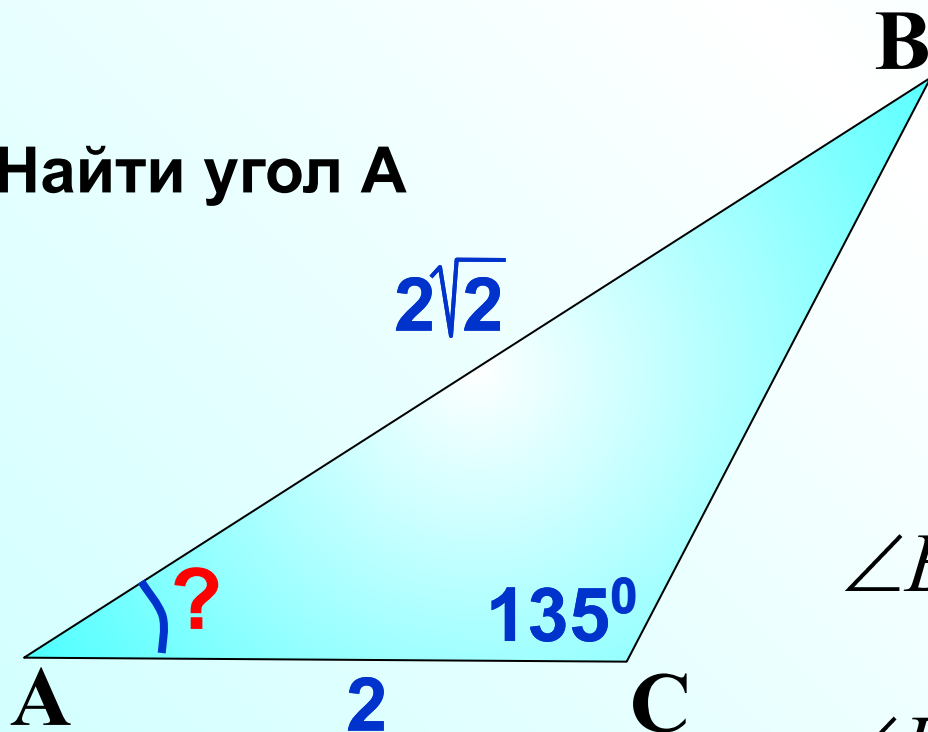
$$\sin B = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\sin B = \frac{1}{2}$$

$$\angle B_1 = 30^\circ \Rightarrow \angle A = 15^\circ$$

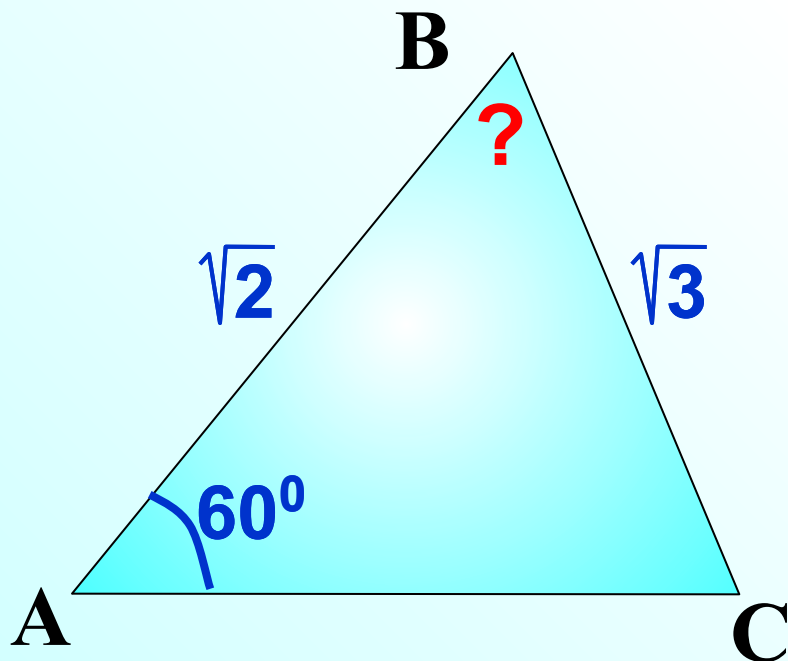
$$\angle B_2 = 150^\circ \text{ не уд. усл.}$$

Найти угол А



Стороны треугольника пропорциональны синусам  
противолежащих углов.

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A}$$



$$\frac{\sqrt{2}}{\sin C} = \frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}$$

$$\sin C = \sqrt{2} \cdot \sin 60^\circ : \sqrt{3}$$

$$\sin C = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} : \sqrt{3}$$

$$\sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\angle C_1 = 45^\circ \Rightarrow \angle B = 75^\circ$$

$$\angle C_2 = 135^\circ \text{ не уд. усл.}$$

$$\angle B = 180^\circ - (135^\circ + 60^\circ) < 0$$

ABCD – параллелограмм. Найти BD.

Рассмотрим  $\triangle ABO$

$$\frac{AB}{\sin O} = \frac{BO}{\sin A}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ} = \frac{BO}{\sin 30^\circ}$$

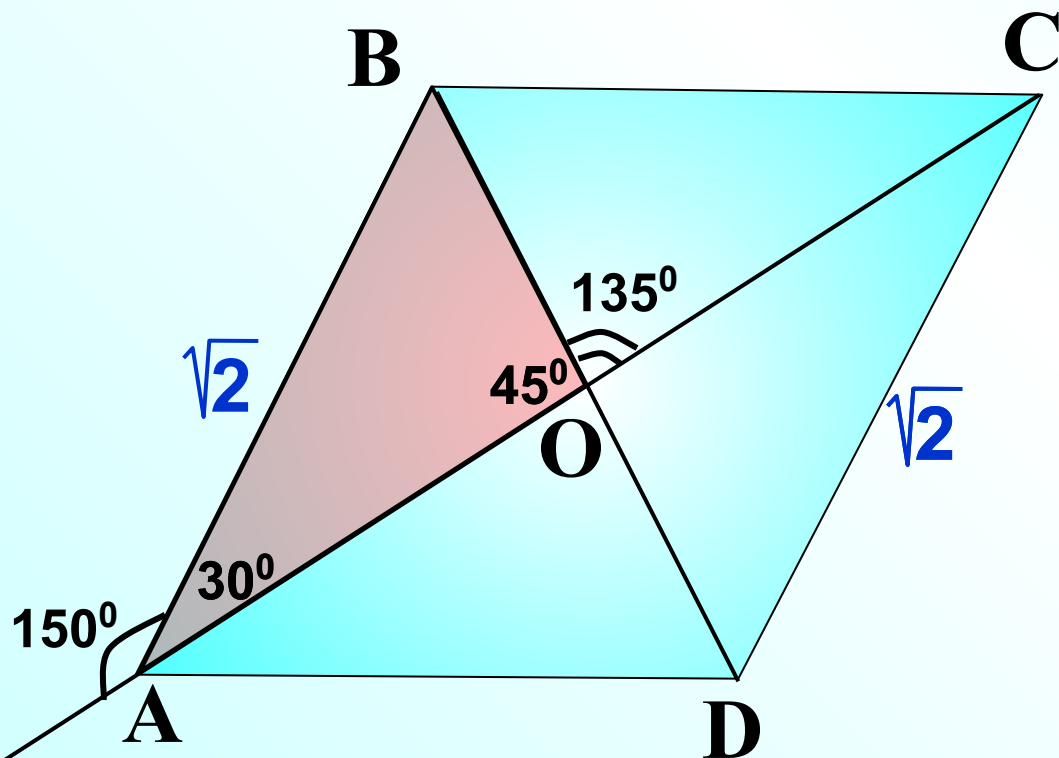
$$BO = \sqrt{2} \cdot \sin 30^\circ : \sin 45^\circ$$

$$BO = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$BO = \frac{\sqrt{2} \cdot 1 \cdot 2}{2 \cdot \sqrt{2}}$$

$$BO = 1$$

$$BD = 2$$



ABCD – параллелограмм. Найти AC.

Рассмотрим  $\triangle ACD$

$$\frac{AC}{\sin D} = \frac{AD}{\sin C}$$

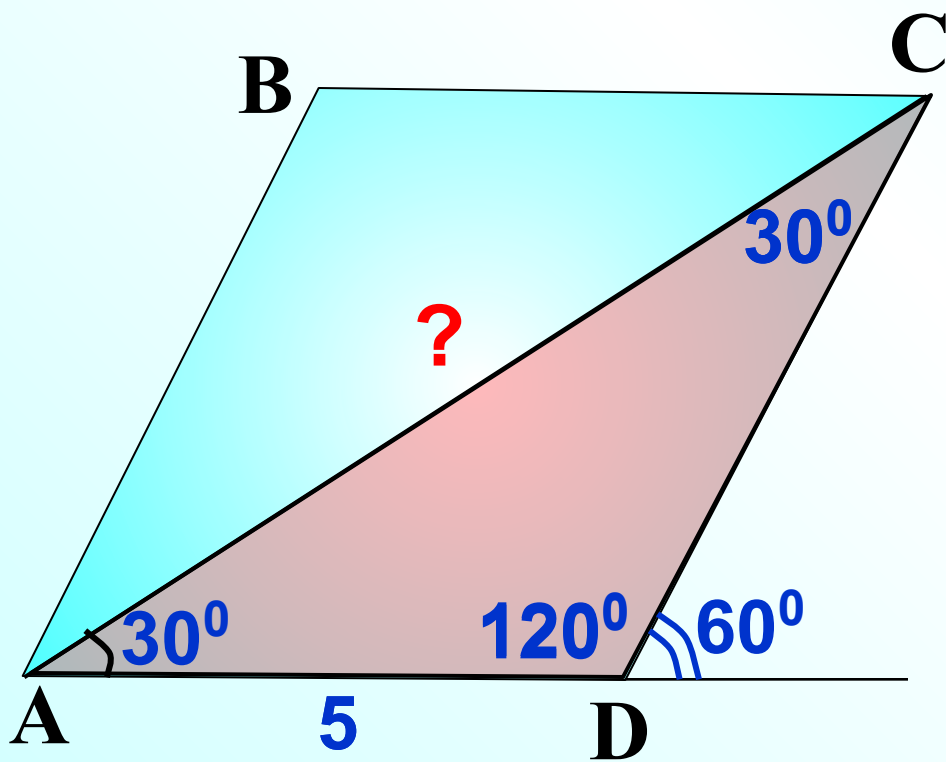
$$\frac{AC}{\sin 120^\circ} = \frac{5}{\sin 30^\circ}$$

$$AC = 5 \cdot \sin 60^\circ : \sin 30^\circ$$

$$AC = 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2}$$

$$AC = \frac{5 \cdot \sqrt{3} \cdot 2}{2 \cdot 1}$$

$$AC = 5\sqrt{3}$$





ABCD – параллелограмм. Найти BC.

Рассмотрим  $\triangle ABC$

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C}$$

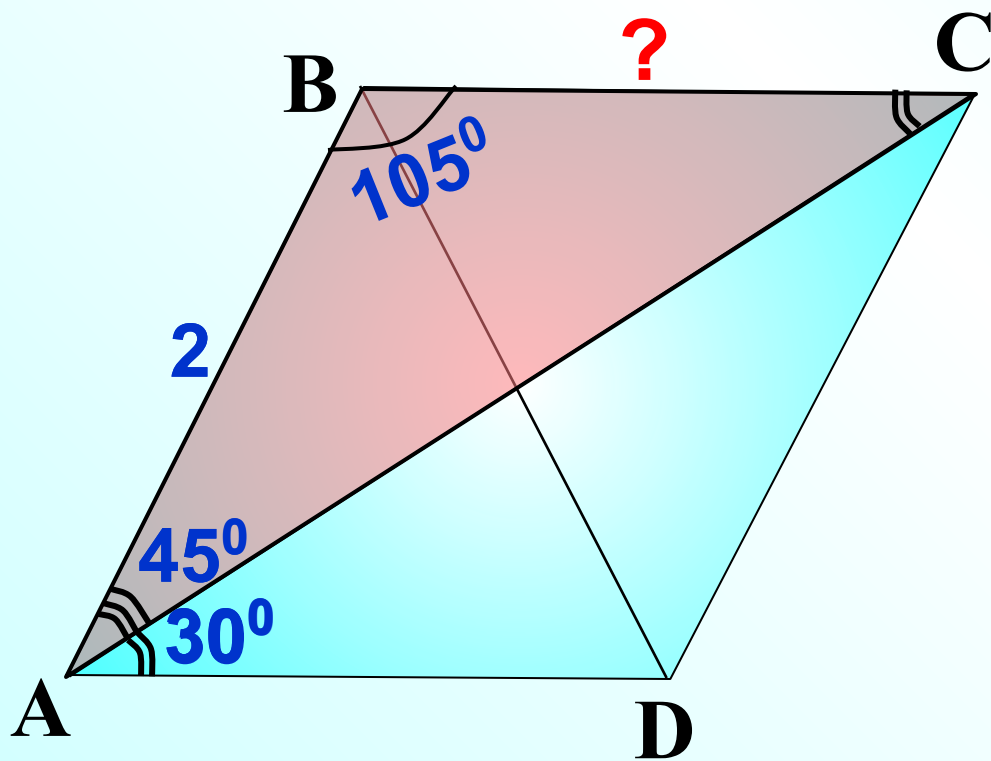
$$\frac{BC}{\sin 45^\circ} = \frac{2}{\sin 30^\circ}$$

$$BC = 2 \cdot \sin 45^\circ : \sin 30^\circ$$

$$BC = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{1}{2}$$

$$BC = \frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot 2}{2 \cdot 1}$$

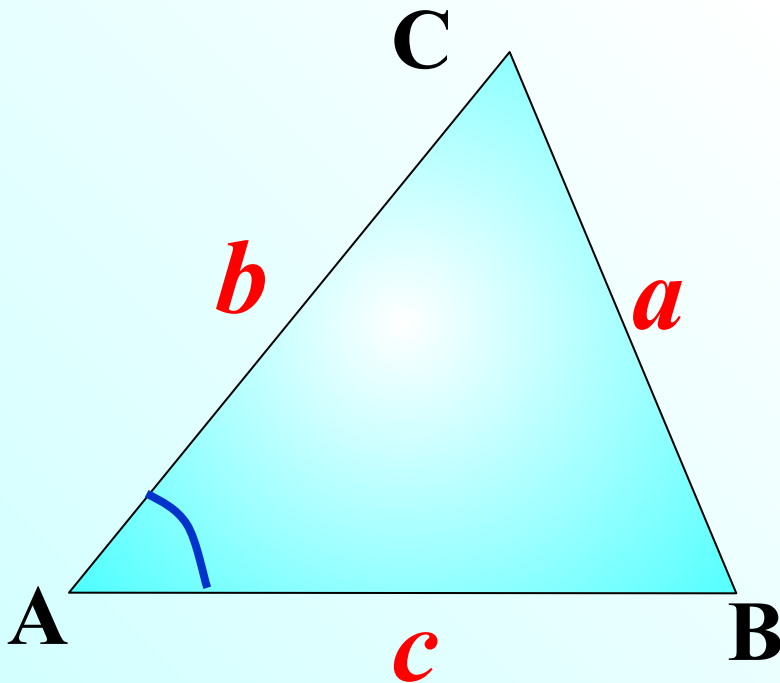
$$BC = 2\sqrt{2}$$



## Теорема косинусов.

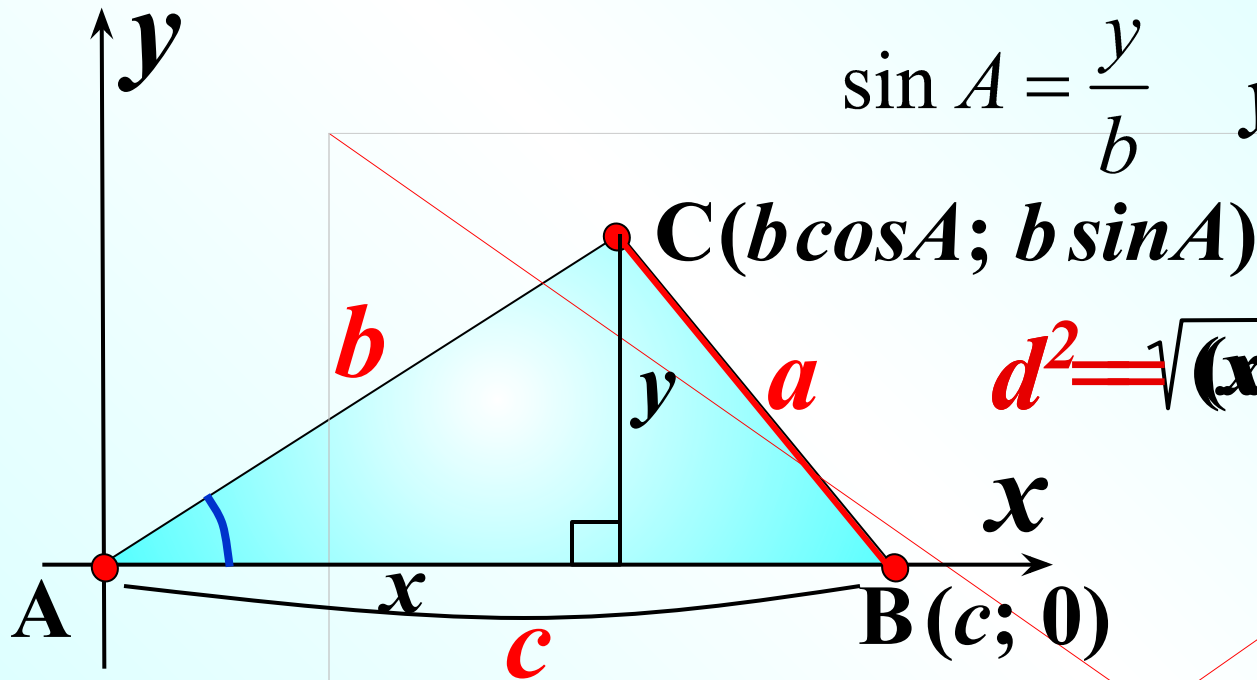
Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$



$$\cos A = \frac{x}{b} \quad x = b \cos A$$

$$\sin A = \frac{y}{b} \quad y = b \sin A$$



$$d^2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\begin{aligned} BC^2 &= (b \cos A - c)^2 + (b \sin A - 0)^2 = \\ &= b^2 \cos^2 A - 2bc \cos A + c^2 + b^2 \sin^2 A \\ &= b^2 (\underbrace{\cos^2 A + \sin^2 A}_1) + c^2 - 2bc \cos A \end{aligned}$$

$$x = b \cos A$$

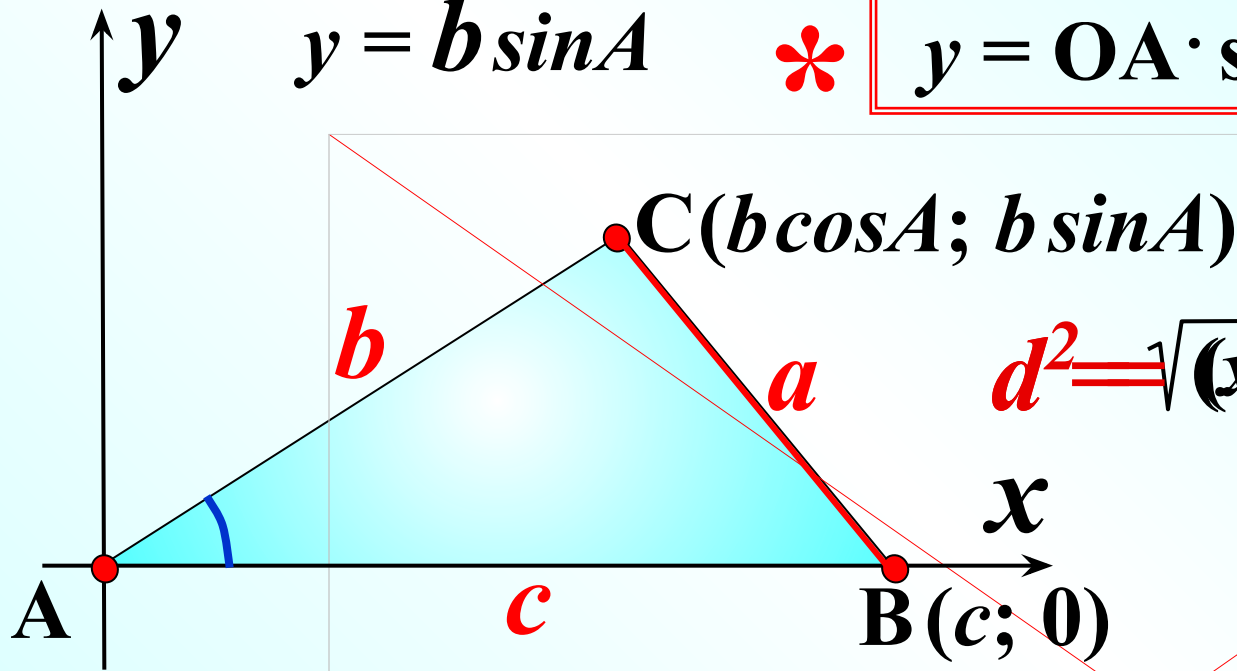


$$x = OA \cdot \cos a$$

$$y = b \sin A$$



$$y = OA \cdot \sin a$$



$$d^2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

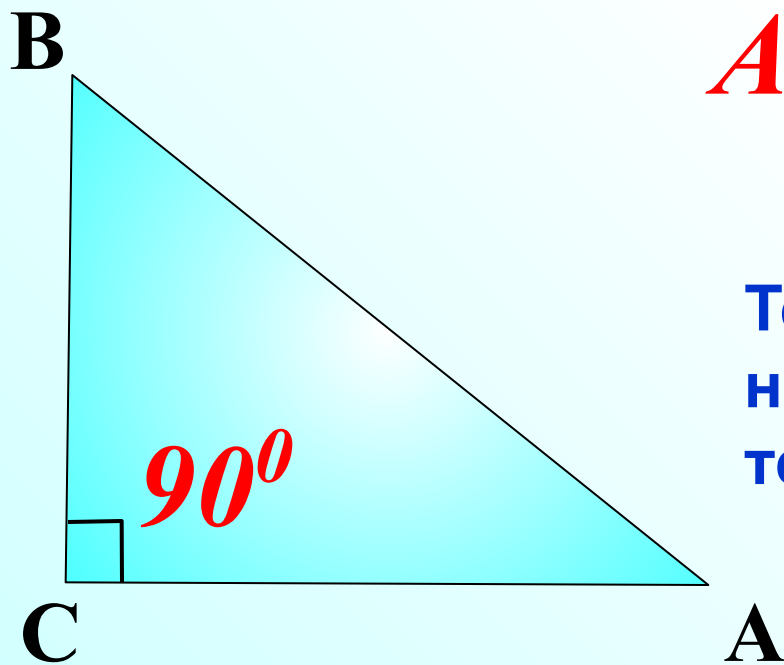
$$\begin{aligned} BC^2 &= (b \cos A - c)^2 + (b \sin A - 0)^2 = \\ &= b^2 \cos^2 A - 2bc \cos A + c^2 + b^2 \sin^2 A \\ &= b^2 (\cos^2 A + \sin^2 A) + c^2 - 2bc \cos A \end{aligned}$$

## Теорема косинусов.

Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.

$$AB^2 = BC^2 + CA^2 - 2 \cdot BC \cdot CA \cos C$$

$$AB^2 = BC^2 + CA^2$$



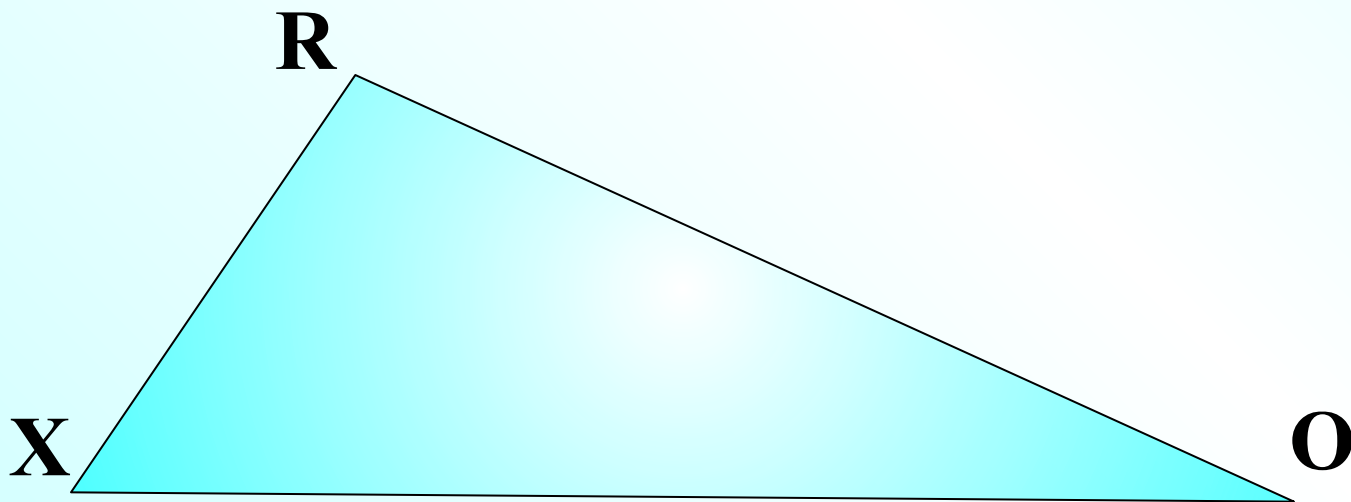
Теорему косинусов иногда называют обобщенной теоремой Пифагора.

Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.

$$XR^2 = RO^2 + XO^2 - 2 \cdot RO \cdot XO \cos O$$

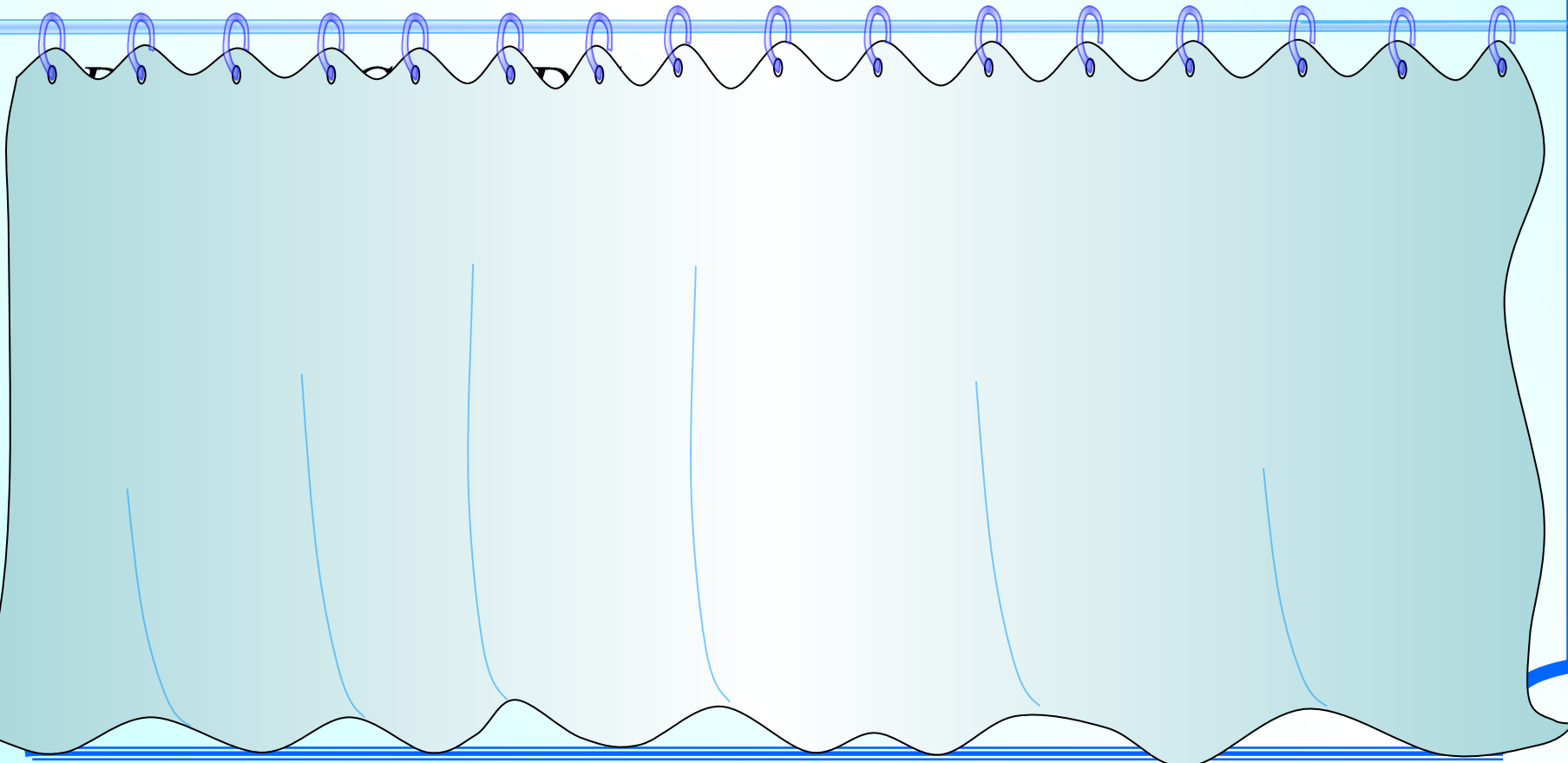
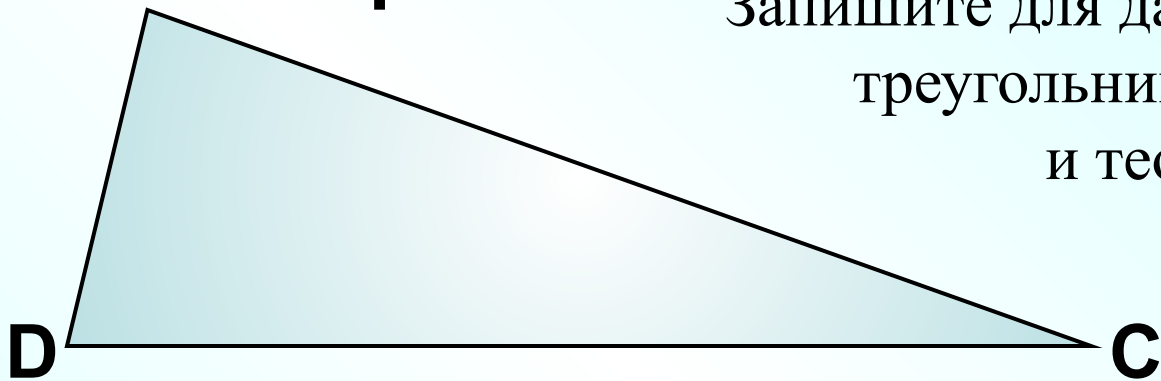
$$RO^2 = RX^2 + XO^2 - 2 \cdot RX \cdot XO \cos X$$

$$XO^2 = RX^2 + RO^2 - 2 \cdot RX \cdot RO \cos R$$



**F**

Запишите для данного  
треугольника теорему синусов  
и теорему косинусов для  
каждой стороны.



$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cos C$$

$$2ab \cos C = b^2 + a^2 - c^2 /: 2ab$$

$$\cos C = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ab} > 0$$

На практике удобно сравнивать квадрат **большей** стороны и сумму квадратов двух других.

$$b^2 + a^2 = c^2 = 0 \Rightarrow \cos C = 0, \angle C = 90^\circ$$

$$b^2 + a^2 > c^2 > 0 \Rightarrow \cos C > 0, \angle C - \text{острый}$$

$$b^2 + a^2 < c^2 < 0 \Rightarrow \cos C < 0, \angle C - \text{тупой}$$



Определите вид треугольника со сторонами 5, 6 и 7 см.

$$5^2 + 6^2 > 7^2 \Rightarrow \text{треугольник остроугольный}$$

Определите вид треугольника со сторонами 2, 3 и 4 см.

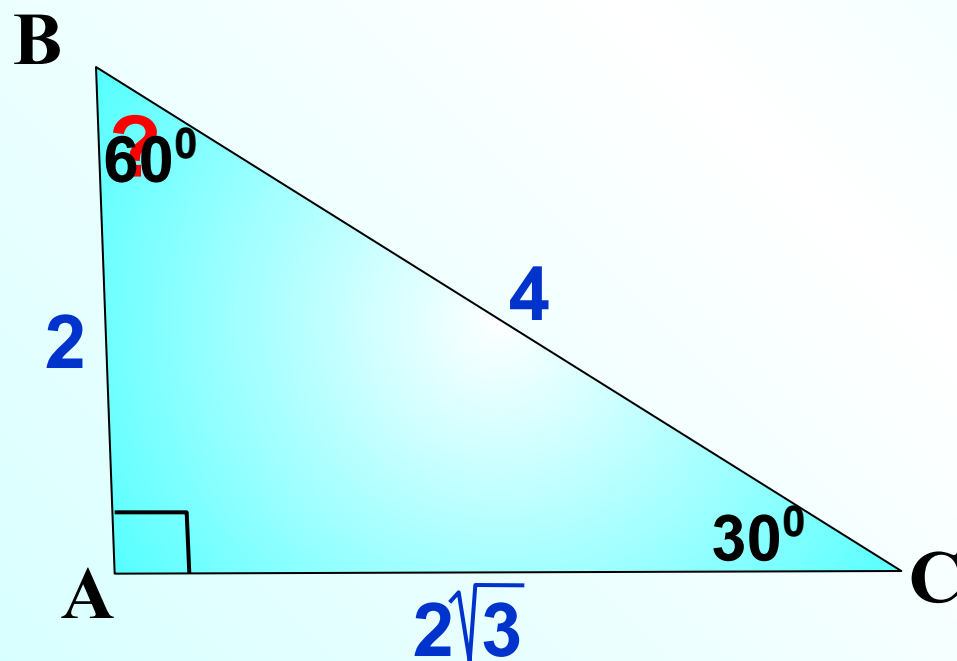
$$2^2 + 3^2 < 4^2 \Rightarrow \text{треугольник тупоугольный}$$

*Какой угол в данном треугольнике тупой?*

Найти угол В

$$2^2 + (2\sqrt{3})^2 = 4^2$$

$\Rightarrow$  *треугольник прямоугольный*



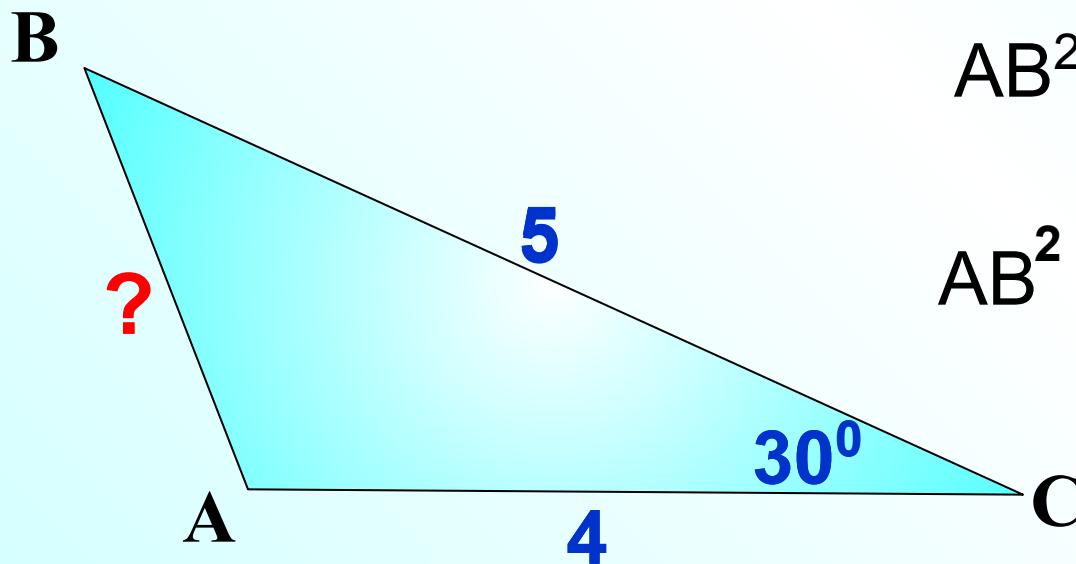
Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.

Найти АВ

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2 \cdot BC \cdot AC \cos C$$

$$AB^2 = 41 - 40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$AB^2 = \sqrt{41 - 20 \cdot \sqrt{3}}$$



Квадрат стороны треугольника равен  
сумме квадратов двух других сторон  
минус удвоенное произведение этих сторон  
на косинус угла между ними.

Найти BC

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cos A$$

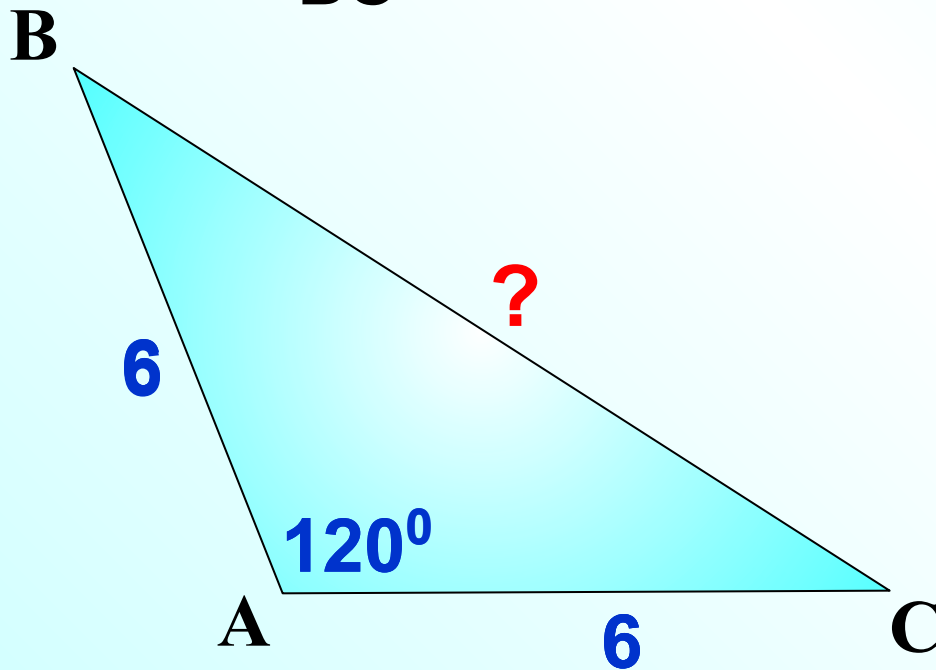
$$BC^2 = 6^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cos 120^\circ$$

$$BC^2 = 72 - 72 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$BC^2 = 108$$

$$BC = \sqrt{108}$$
$$= \sqrt{36 \cdot 3}$$

$$BC = 6\sqrt{3}$$



ABCD – параллелограмм. Найти BD.

Рассмотрим  $\triangle ABD$

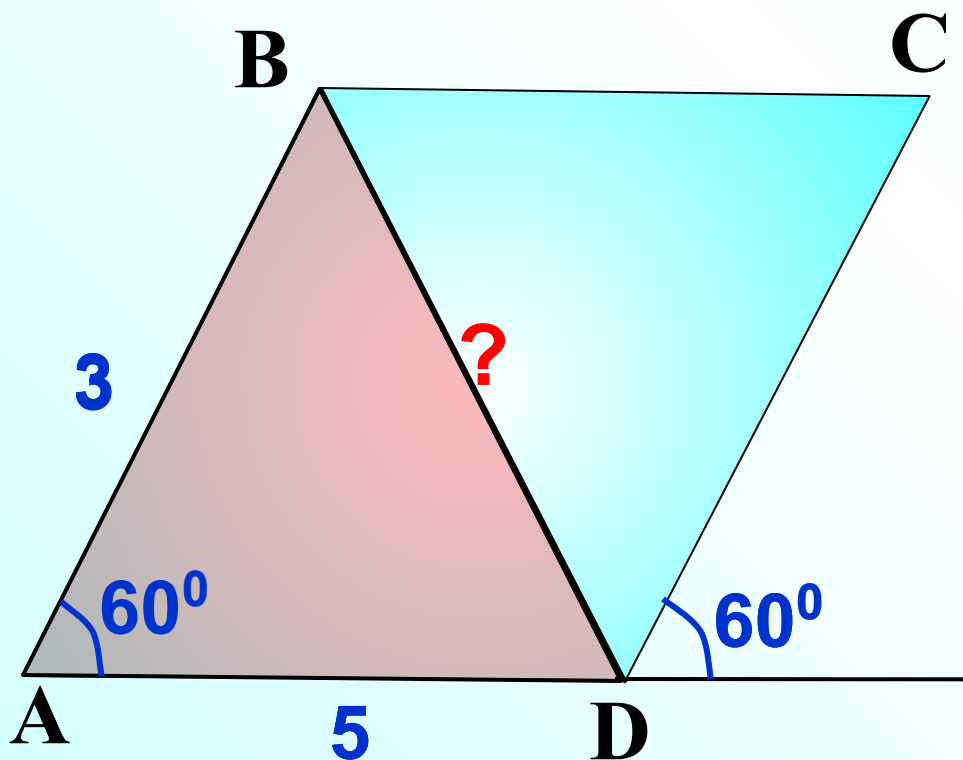
2 2

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cos A$$

$$BD^2 = 34 - 30 \cdot \frac{1}{2}$$

$$BD^2 = 19$$

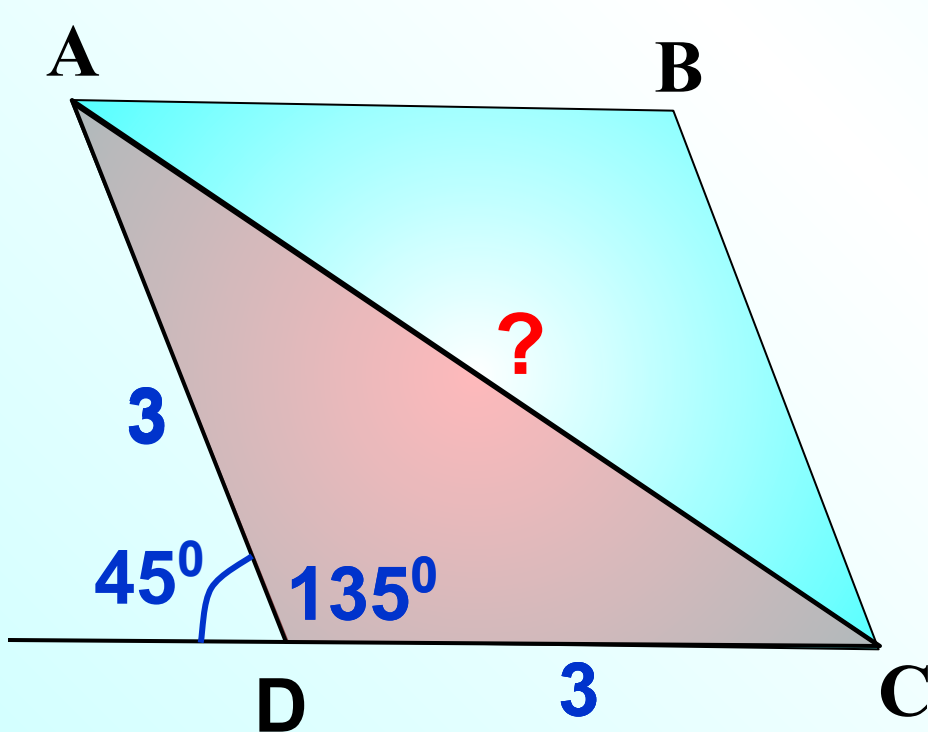
$$BD = \sqrt{19}$$



ABCD – ромб. Найти AC.

Рассмотрим  $\triangle ACD$

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2 \cdot AD \cdot CD \cos D$$



$$AC^2 = 18 - 18 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$AC^2 = 18 + 9\sqrt{2}$$

$$AC^2 = \sqrt{9(2 + \sqrt{2})}$$

$$AC = 3\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$