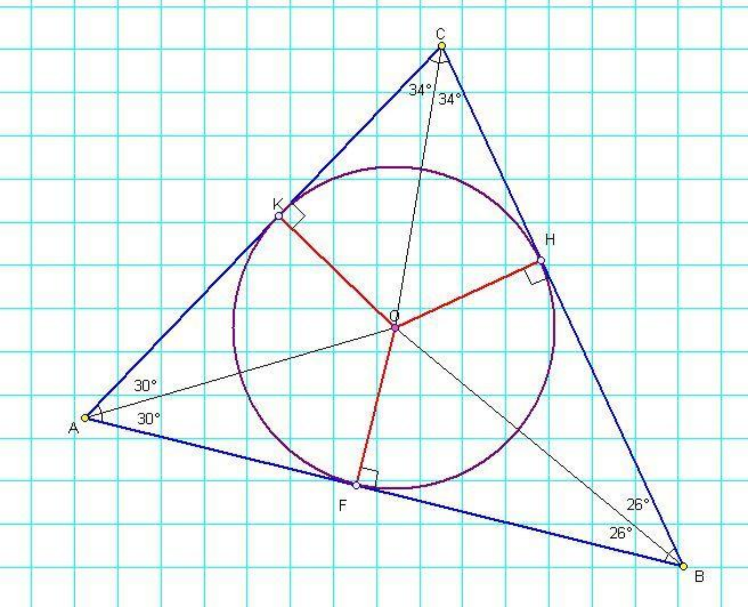
Коло, описане навколо трикутника. Коло, вписане в трикутник

«Серед рівних розумом - за однакових умов – переважає той, хто знає геометрію»

Блез Паскаль

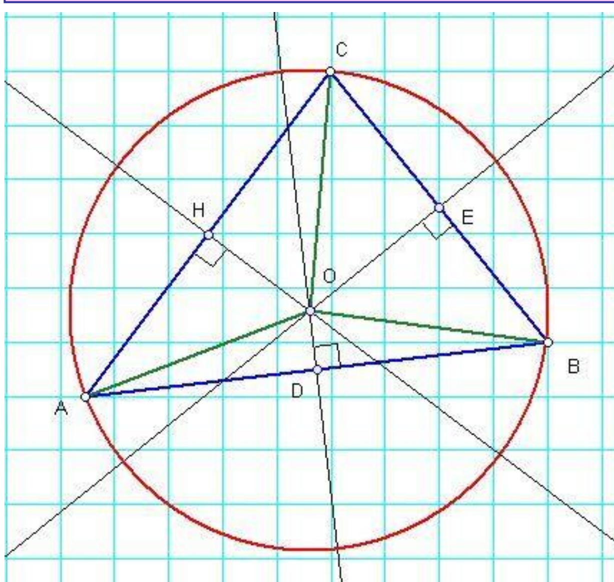


Коло називається вписаним у трикутник, якщо воно дотикається до всіх його сторін.

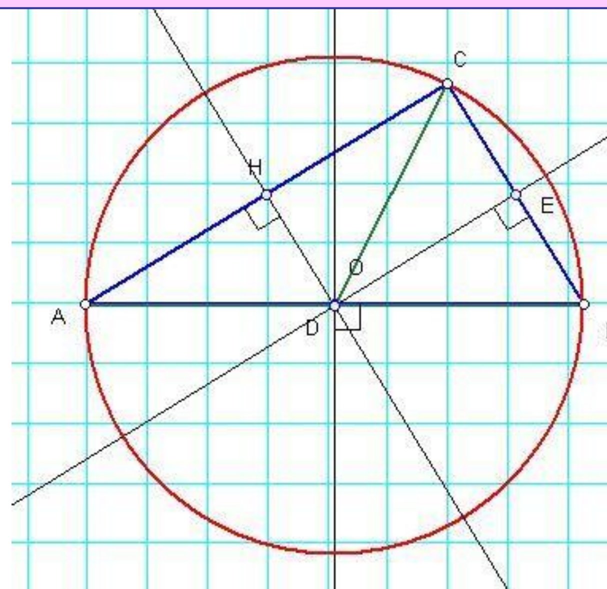
Центром вписаного у трикутник кола є точка перетину його бісектрис. Центр вписаного кола знаходиться всередині трикутника.

Коло називається описаним навколо трикутника, якщо воно проходить через усі його вершини.

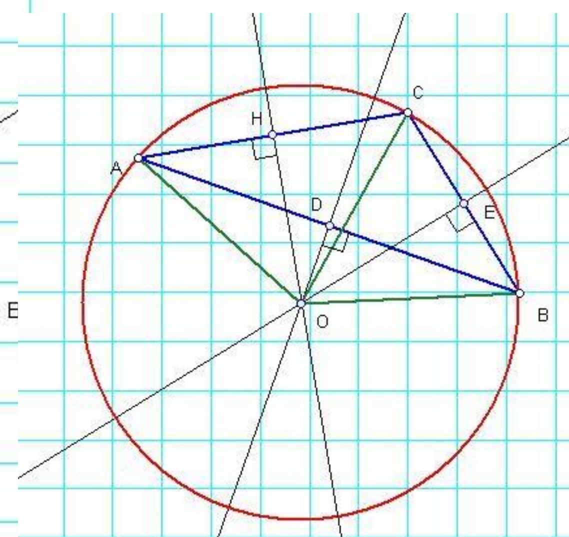
Центром описаного навколо трикутника кола є точка перетину серединних перпендикулярів, проведених до його сторін.



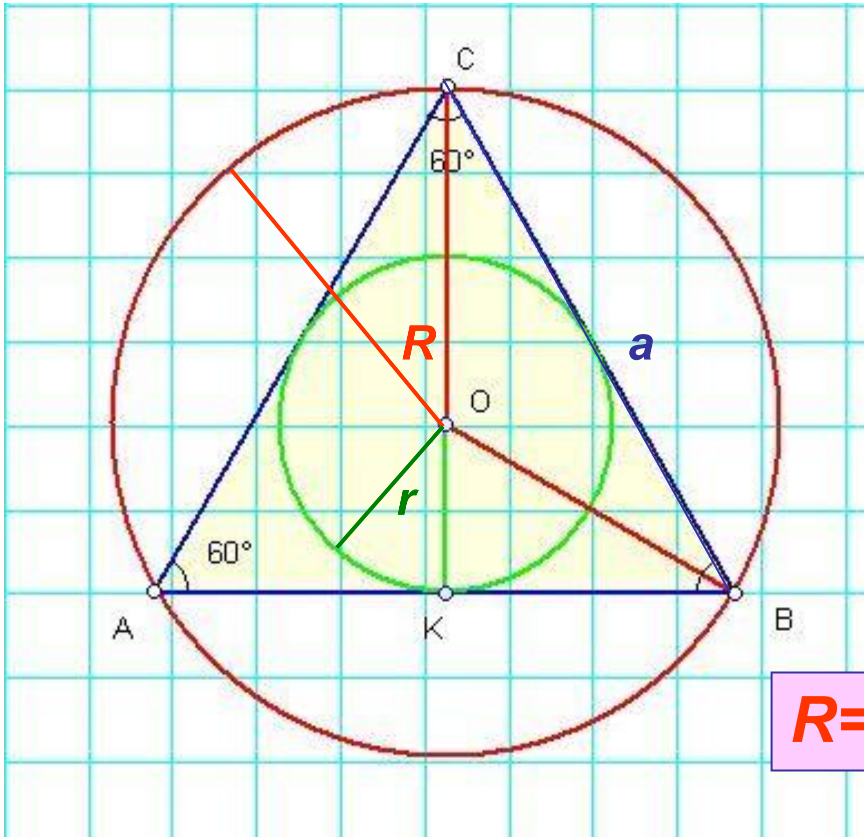
Гострокутний трикутник



Прямокутний трикутник



Тупокутний трикутник



Для рівностороннього трикутника

Радіус кола, описаного навколо трикутника

$$R = \frac{a}{\sqrt{3}}$$, ***сторона трикутника*** $$a = \sqrt{3} \cdot R$$

Радіус кола, вписаного в трикутник

$$r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$, ***сторона трикутника*** $$a = 2\sqrt{3} \cdot r$$

Площа рівностороннього трикутника

$$S_{\Delta} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$, де ***a - сторона трикутника***

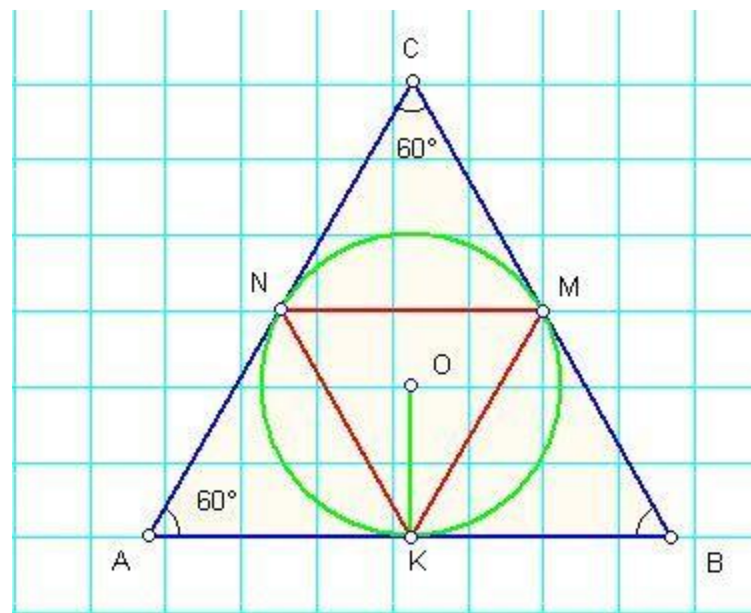
R=2r

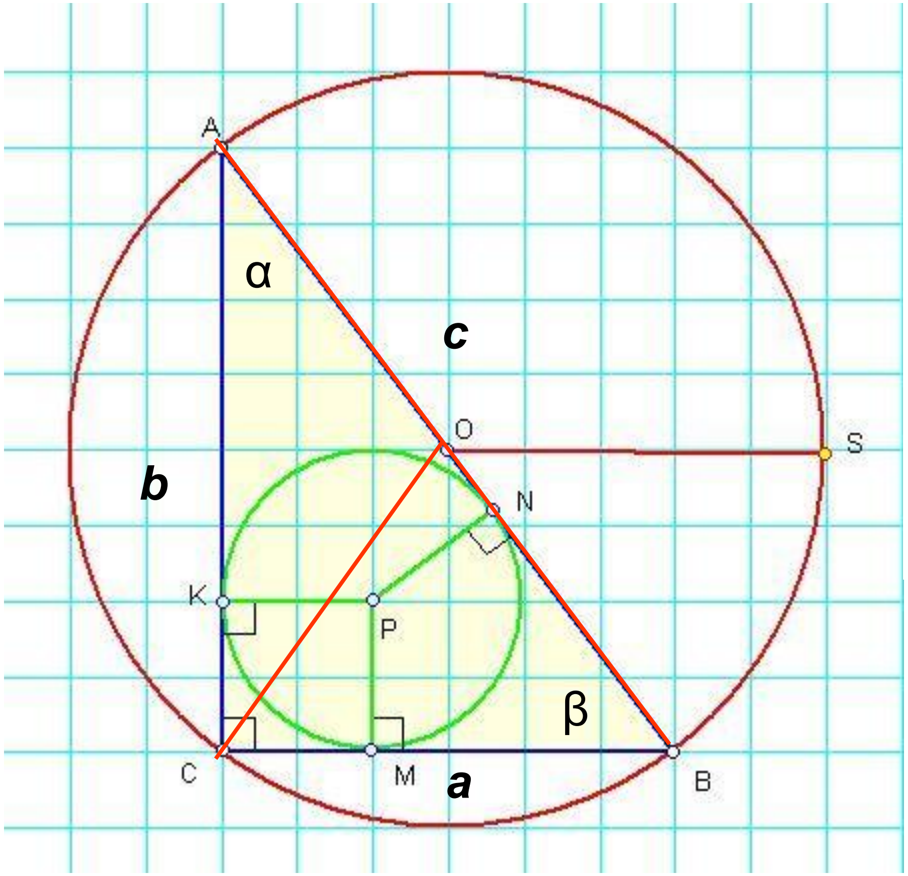
Варіант 29. Завдання 2.6

Як відноситься сторона правильного трикутника, вписаного в коло, до сторони правильного трикутника, описаного навколо цього кола?

Для Δ ABC коло є вписаним,
а для Δ MNK коло є описаним

NM : AB = 1 : 2





Для прямокутного трикутника

радіус кола, описаного навколо трикутника

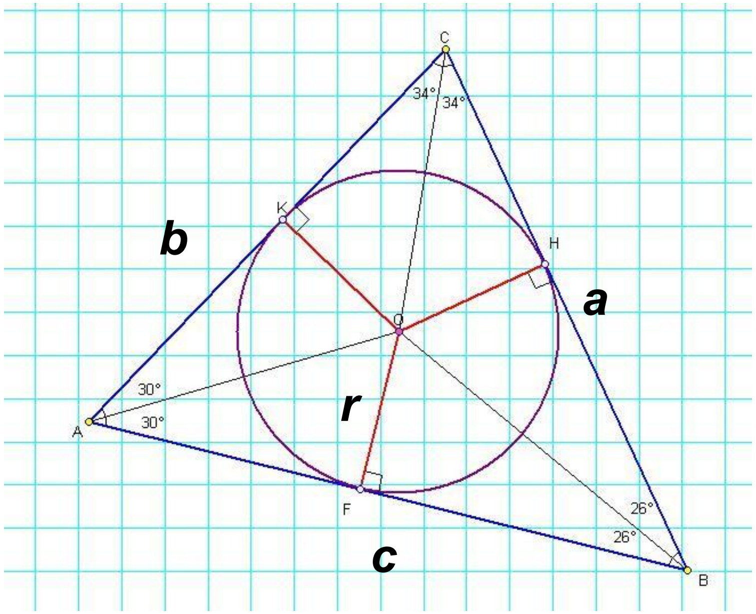
$R = \frac{c}{2}$, де c - гіпотенуза

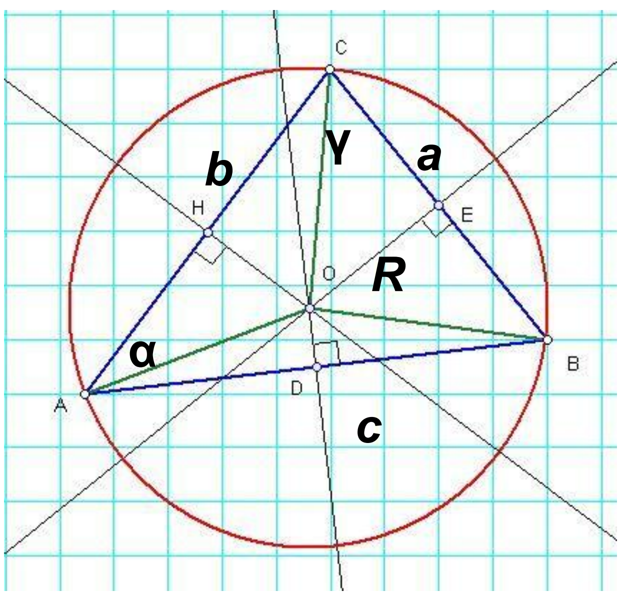
радіус кола, вписаного в трикутник

$r = \frac{a+b-c}{2}$, де a , b – катети

За властивістю дотичних, проведених до кола з однієї точки
BM=BN, CM=CK=r, AK=AN
AC + BC = AB + 2 r

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}(a+b+c)\cdot r = \frac{1}{2}ac\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}bc\cdot\sin\alpha$$





Для довільного трикутника

радіус кола, описаного навколо трикутника

$$R = \frac{a}{2\sin\alpha} \quad , \quad R = \frac{abc}{4S_{\Delta}}$$

радіус кола, вписаного в трикутник

$$r = \frac{2S_{\Delta}}{a+b+c}$$

Площа трикутника

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\gamma = \frac{1}{2}(a+b+c)\cdot r = \frac{1}{2}ah_a;$$

за формулою Герона

$$S_{\Delta} = \sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}\text{, де } p = \frac{a+b+c}{2}$$

Перевірка діагностичного тесту

Варіант 1

Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь, та позначте її у бланку відповідей.

1. Де знаходиться центр кола, вписаного у трикутник? В

А) на перетині медіан; Б) на перетині серединних перпендикулярів;

В) на перетині бісектрис; Г) на перетині висот

2. Де знаходиться центр кола, описаного навколо тупокутного трикутника? А

А) поза трикутником; Б) на середині катета;

В) всередині трикутника; Г) на середині гіпотенузи

3. Чому дорівнює радіус кола, описаного навколо правильного трикутника зі стороною 12 *см*? В

А) $12\sqrt{3}$ *см*; Б) $6\sqrt{3}$ *см* ; В) $4\sqrt{3}$ *см*; Г) $2\sqrt{3}$ *см*

4. Чому дорівнює радіус кола, вписаного в правильний трикутник зі стороною 18 *см*? Г

А) $18\sqrt{3}$ *см*; Б) $9\sqrt{3}$ *см* ; В) $6\sqrt{3}$ *см*; Г) $3\sqrt{3}$ *см*

5. Знайти радіус кола, описаного навколо трикутника ABC, якщо AB=$6\sqrt{3}$ *см*, $\angle C=60^0$? А

А) 6 *см*; Б) 8 *см*; В) 12 *см*; Г) 16 *см*.

6. Чому дорівнює площа трикутника, периметр якого становить 12 *см*, а радіус вписаного кола дорівнює 4 *см*?

А) 12 *см*^{2}; Б) 16 *см*^{2}; В) 24 *см*^{2}; Г) 48 *см*^{2}. В

Варіант 2

Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь, та позначте її у бланку відповідей.

1. Де знаходиться центр кола, описаного навколо трикутника? Б

А) на перетині медіан; Б) на перетині серединних перпендикулярів;

В) на перетині бісектрис; Г) на перетині висот

2. Де знаходиться центр кола, описаного навколо прямокутного трикутника? Г

А) поза трикутником; Б) на середині катета;

В) всередині трикутника; Г) на середині гіпотенузи

3. Чому дорівнює радіус кола, описаного навколо правильного трикутника зі стороною 18 *см*? Б

А) $12\sqrt{3}$ *см*; Б) $6\sqrt{3}$ *см* ; В) $4\sqrt{3}$ *см*; Г) $2\sqrt{3}$ *см*

4. Чому дорівнює радіус кола, вписаного в правильний трикутник зі стороною 12 *см*? А

А) $2\sqrt{3}$ *см*; Б) $6\sqrt{3}$ *см* ; В) $4\sqrt{3}$ *см*; Г) $3\sqrt{3}$ *см*

5. Знайти радіус кола, описаного навколо трикутника ABC, якщо AB=$16\sqrt{3}$ *см*, $\angle C=60^0$? Г

А) 6 *см*; Б) 8 *см*; В) 12 *см*; Г) 16 *см*.

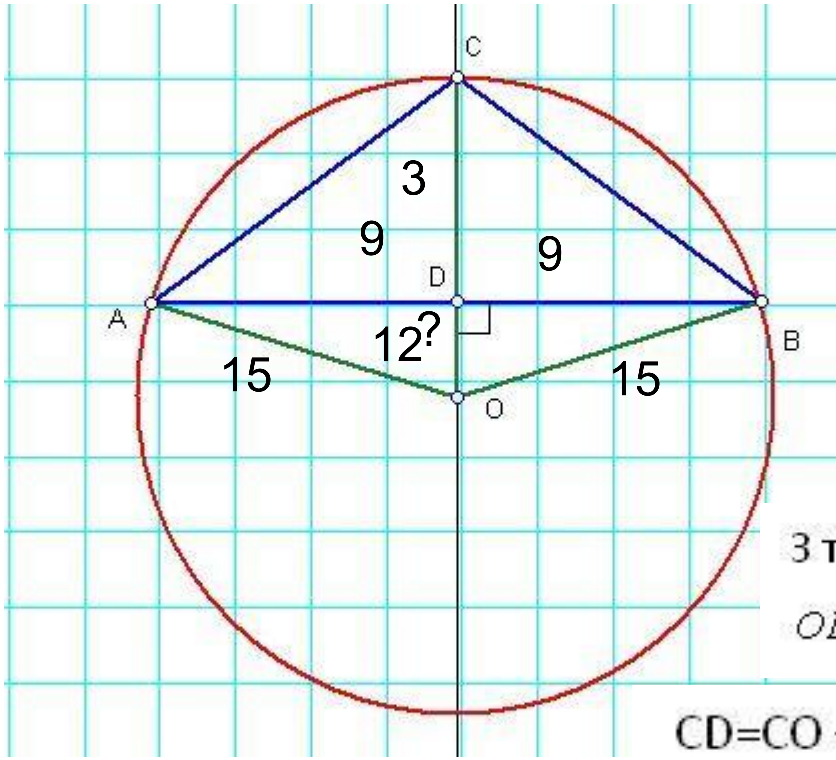
6. Чому дорівнює площа трикутника, периметр якого становить 16 *см*, а радіус вписаного кола дорівнює 2 *см*? Б

А) 12 *см*^{2}; Б) 16 *см*^{2}; В) 24 *см*^{2}; Г) 48 *см*^{2}.

Варіант 80. Завдання 2.6

Основа рівнобедреного тупокутного трикутника дорівнює 18 *см*, а радіус описаного навколо нього кола - 15 *см*. Знайдіть бічну сторону трикутника.

Розв'язання.



У трикутнику ABC AO=BO=CO=15 *см* як радіуси описаного кола

У рівнобедреному трикутнику ABC AC=BC, основа AB=18 *см*

Висота CD лежить на серединному перпендикулярі до основи AB, тому AD=BD=0,5·AB=0,5·18*см*=9*см*

З трикутника OBD за наслідком з теореми Піфагора :

$$OD = \sqrt{OB^2 - BD^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{225 - 81} = \sqrt{144} = 12 \text{ (см)}$$

CD=CO – DO=15 – 12 = 3 (см)

З трикутника CDB за теоремою Піфагора

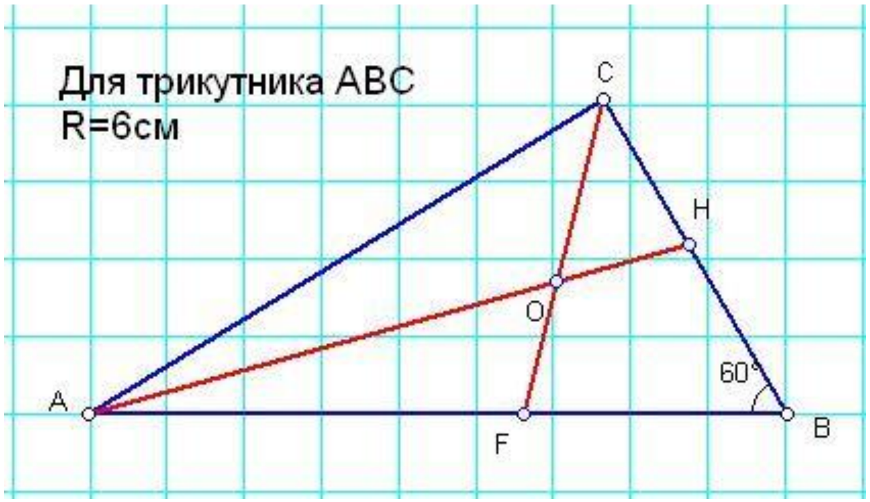
$$BC = \sqrt{CB^2 + BD^2} = \sqrt{3^2 + 9^2} = \sqrt{9 + 81} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10} \text{ (см)}$$

Відповідь: $3\sqrt{10}$*см*

Варіант 37. Завдання 2.6

Радіус кола, описаного навколо трикутника ABC, дорівнює 6 *см. Знайдіть* радіус кола, описаного навколо трикутника AOC, де O – точка перетину бісектрис трикутника ABC, якщо $\angle ABC = 60^0$

Розв'язання.



У трикутнику ABC $AC = 2 \cdot R \cdot \sin 60^0$

У трикутнику AOC
$AC = 2 \cdot R_1 \cdot \sin\angle AOC$

Маємо $\angle A + \angle C = 180^0 - 60^0 = 120^0$

Маємо $\angle CAO + \angle ACO = 120^0 : 2 = 60^0$

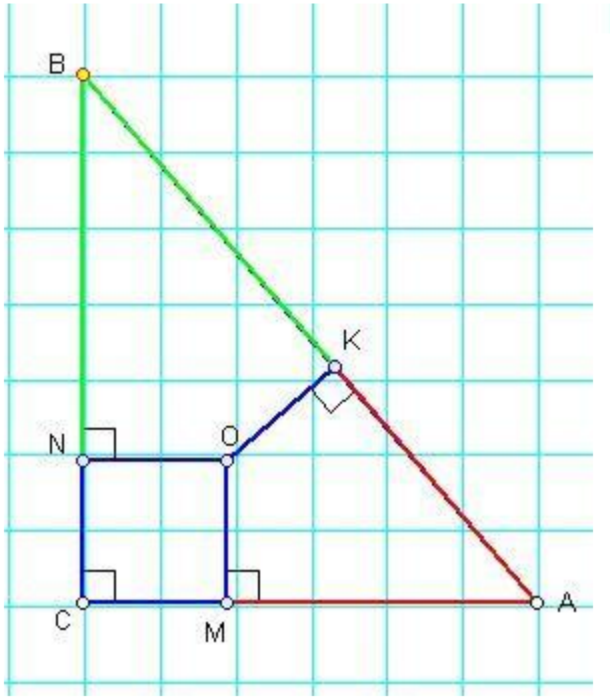
$\angle AOC = 180^0 - 60^0 = 120^0$

Так як $\sin 60^0 = \sin 120^0$, то $R_1 = R = 6$см

Відповідь: 6 см

Варіант 18. Завдання 3.4.

Вписане коло прямокутного трикутника ABC дотикається до гіпотенузи AB у точці K. Знайдіть радіус вписаного кола, якщо AK= 4 см, BK= 6 см.



Розв'язання.

За властивістю дотичних маємо: AK=AM=4*см*; BK=BN=6 *см*.

Позначимо радіус вписаного кола через x: CN=CM=NO=MO=x.

Тоді AC=(4+x) *см*, BC=(6+x) *см*, AB= 4*см* + 6 *см* = 10 *см*.

За теоремою Піфагора для трикутника ABC можна записати співвідношення: $(4+x)^2+(6+x)^2=10^2$.

Розв'яжемо це квадратне рівняння.

$16+8x+x^2+36+12x+x^2=100;\ \ 2x^2+20x+52-100=0;$

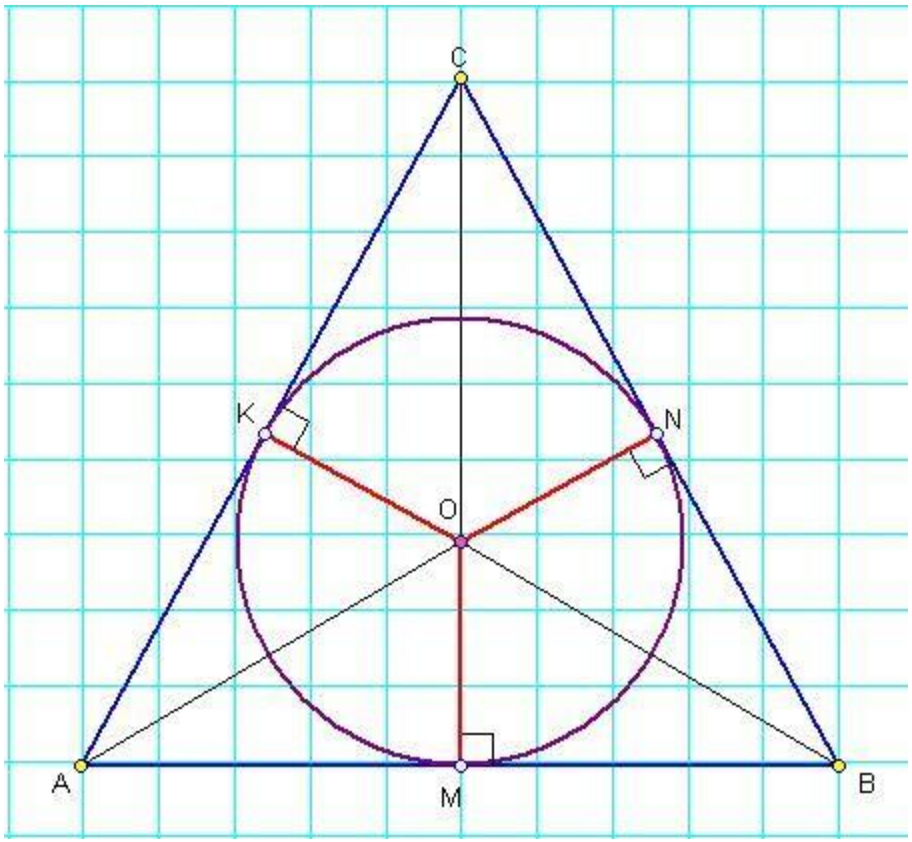
$2x^2+20x-48=0;\ x^2+10x-24=0;\ x_1=2;\ x_2=-10,$

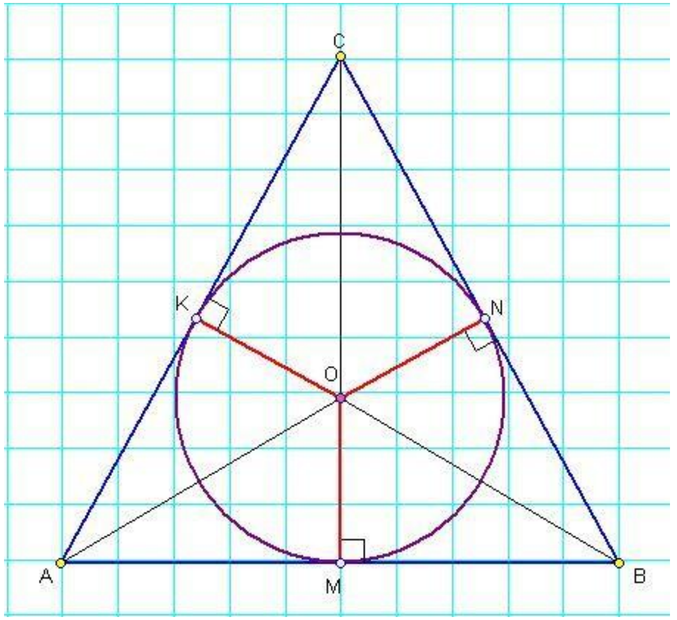
яке не задовольняє умову задачі.

Відповідь: 2 *см*.

Варіант 9. Завдання 3.4

Бічна сторона рівнобедреного трикутника точкою дотику вписаного кола ділиться у відношенні 8 : 9, рахуючи від вершини кута при основі трикутника. Знайдіть площу трикутника, якщо радіус вписаного кола дорівнює 16 см.





Розв'язання.

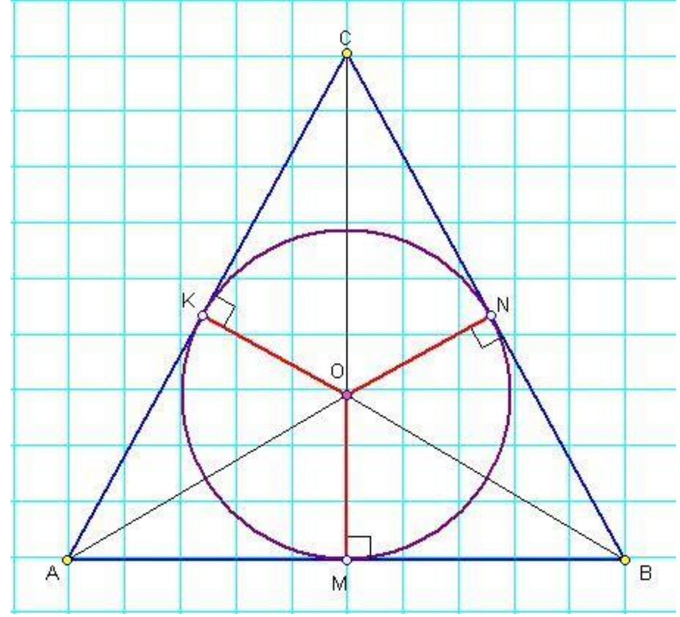
У трикутнику ABC AC=BC, відрізок CM – висота, точка O – центр вписаного кола. Оскільки ΔABC – рівнобедрений, то точка O належить його висоті і бісектрисі CM, а відрізок OM – радіус вписаного кола.

За властивістю дотичних, враховуючи симетрію рівнобедреного трикутника, маємо: $AK=AM=BM=BN=8x$, $CK=CN=9x$.

За теоремою Піфагора для трикутника ABC можна записати

співвідношення: $CM^2 + (8x)^2 = (8x+9x)^2 = (17x)^2$

Тобто $CM^2 + 64x^2 = 289x^2$, $CM^2 = 289x^2 - 64x^2 = 225x^2$, $CM = 15x$



Враховуючи те, що центр вписаного кола є точка перетину бісектрис, за властивістю бісектриси трикутника маємо: $\frac{CO}{OM} = \frac{CB}{MB} = \frac{9+8}{8} = \frac{17}{8}$.

Так як OM=16 *см,* то CO=$\frac{16 \cdot 17}{8} = 34см$. CM=16+34=50 *см* .

З умови $15x$ =50 *см* отримаємо $x = \frac{50}{15} = \frac{10}{3}(см)$. Основа трикутника AB=$2 \cdot 8x = 16 \cdot \frac{10}{3} = \frac{160}{3}$ *(см)*

Площа трикутника ABC $S = \frac{1}{2} AB \cdot CM = \frac{160 \cdot 50}{2 \cdot 3} = \frac{4000}{3} = 1333\frac{1}{3}(см^2)$

Відповідь: $1333\frac{1}{3}см^2$

Підсумок уроку. Домашнє завдання.

Розглянути хід розв’язку виконаних на уроці задач.

Розв’язати задачі 2.5 варіанту 36 та 3.4 варіанту 25.