Государственное Образовательное Учреждение
Лицей №1523

ЮАО г.Москва

Лекции по алгебре и началам анализа

10 класс

© Хомутова Лариса Юрьевна

Лекция № 4

Преобразование тригонометрических выражений

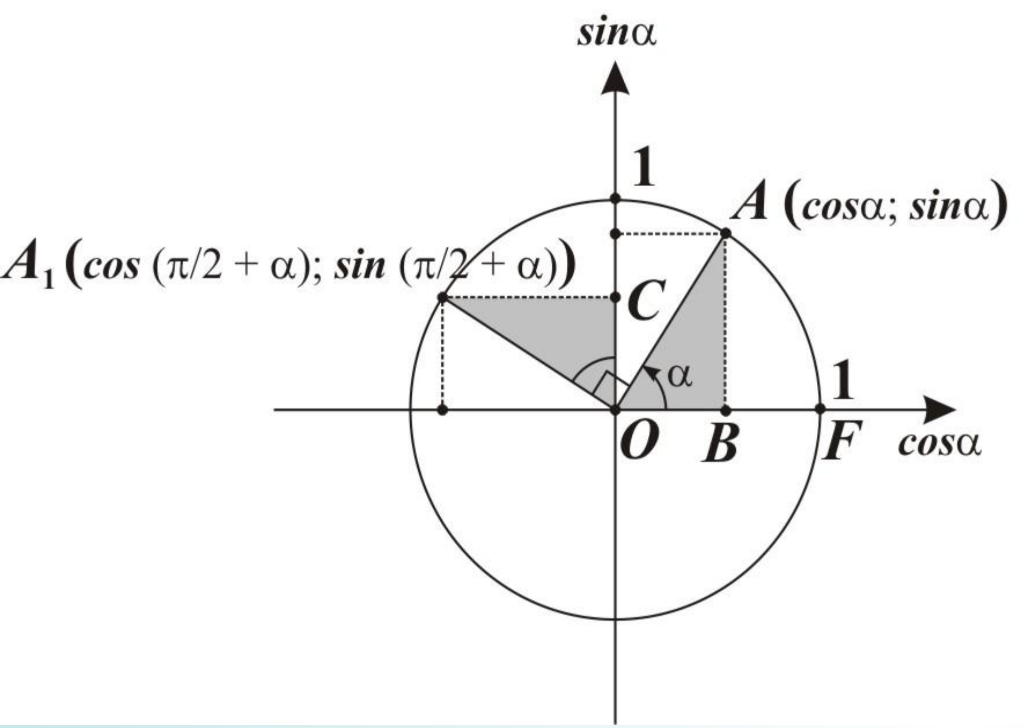
(вывод тригонометрических формул)

I-a. Формулы приведения

Выведем вспомогательные формулы, позволяющие находить

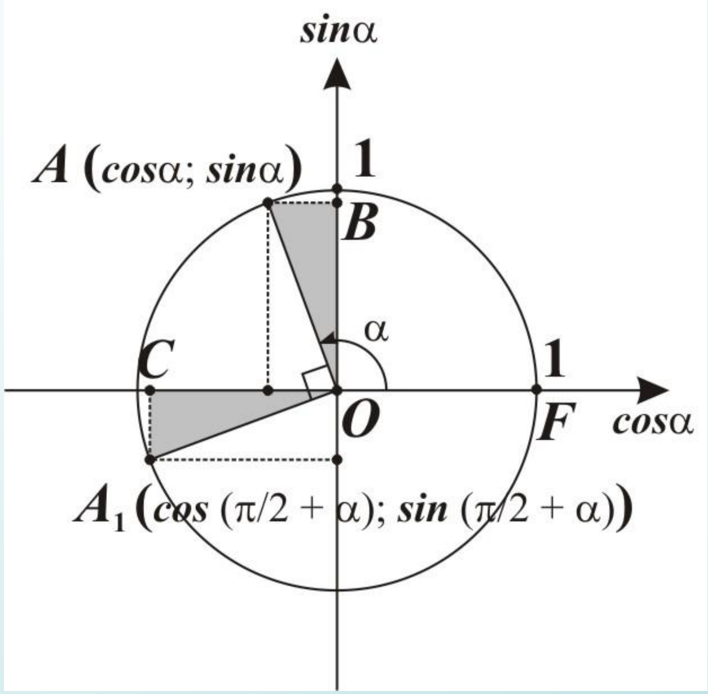
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) \quad \text{и} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$$

по тригонометрическим функциям угла α.



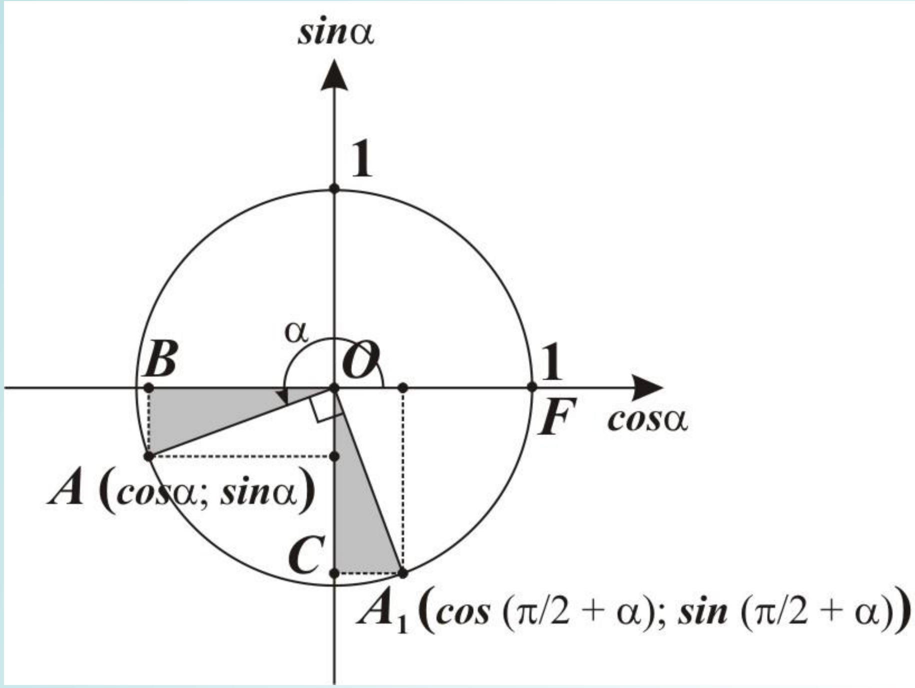
$\alpha \in (0; \pi / 2)$

$\Delta AOB = \Delta A_1OC$ по гипотенузе и острому углу: $AO = 1 = A_1O$.
$\angle A_1OC = \pi / 2 - \angle COA = \angle AOB$;



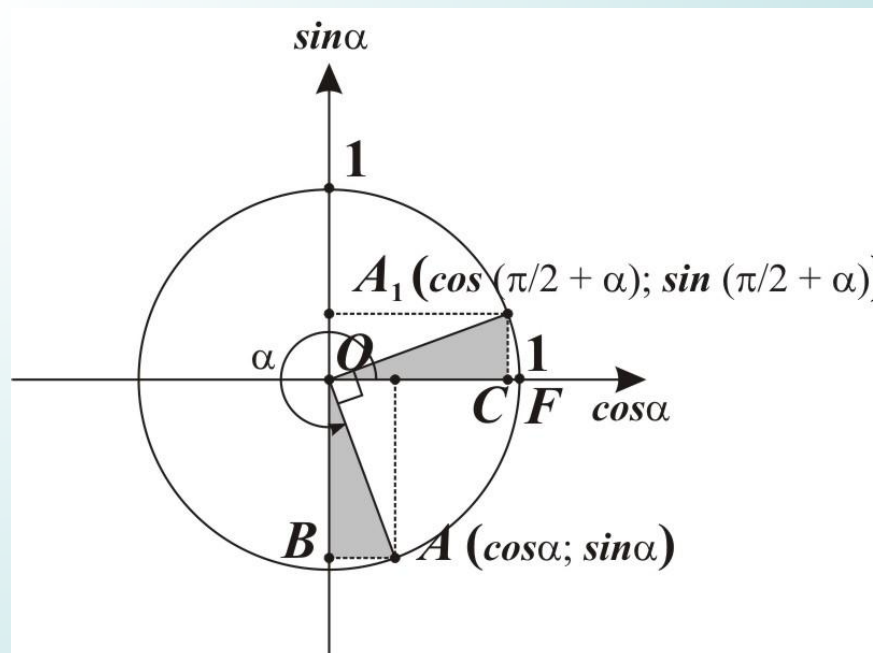
$\alpha \in (\pi / 2; \pi)$

$\Delta AOB = \Delta A_1OC$ по гипотенузе и острому углу: $AO = 1 = A_1O$.
$\angle A_1OC = \alpha + \pi / 2 - \pi = \alpha - \pi / 2 = \angle AOB$;



$\alpha \in (\pi; 3\pi / 2)$

Покажем, что $\Delta AOB = \Delta A_1OC$ по гипотенузе и острому углу: $AO = 1 = A_1O$. Кроме того, на $\angle A_1OC = \alpha + \pi / 2 - 3\pi / 2 = \alpha - \pi = \angle AOB$;



$\alpha \in (3\pi / 2; 2\pi)$

Покажем, что $\Delta AOB = \Delta A_1OC$ по гипотенузе и острому углу: $AO = 1 = A_1O$. $\angle A_1OC = \alpha + \pi / 2 - 2\pi = \alpha - 3\pi / 2 = \angle AOB$.

I-a. Формулы приведения

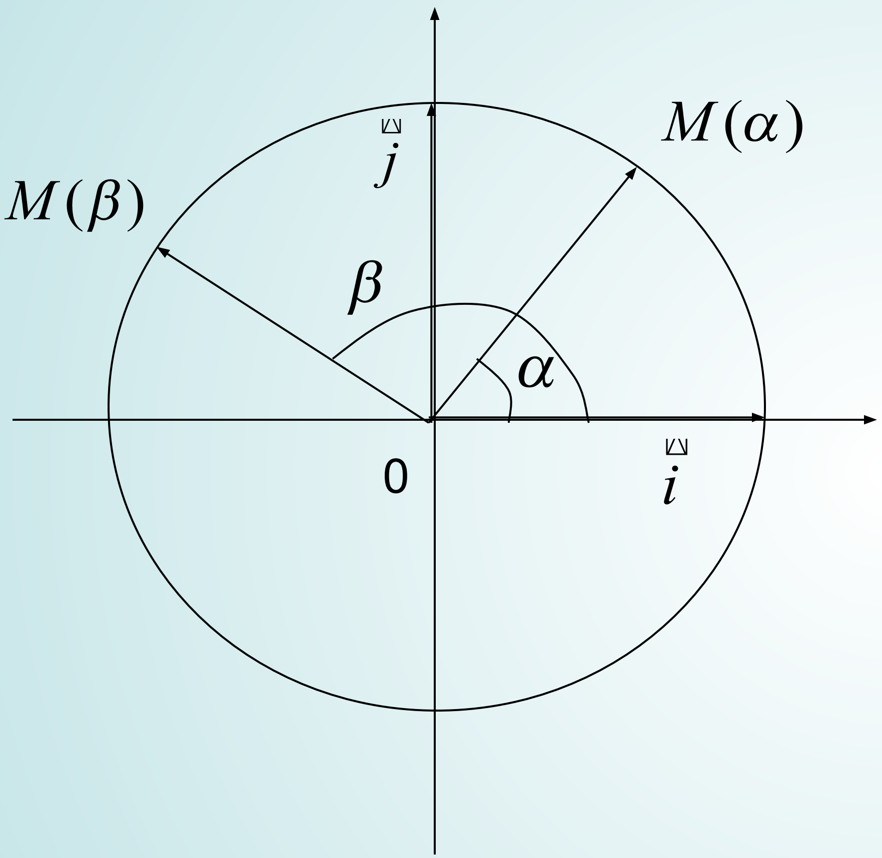
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$$

,

.

II. Формулы сложения



1) Отметим на единичной окружности точки $M(\alpha)$ и $M(\beta)$

2) Введем единичные вектора $\vec{i}$ и $\vec{j}$

3) $M(\alpha) = (\cos\alpha; \sin\alpha)$

$M(\beta) = (\cos\beta; \sin\beta)$

4) $\overrightarrow{OM}(\alpha) = (\cos\alpha; \sin\alpha)$

$\overrightarrow{OM}(\beta) = (\cos\beta; \sin\beta)$

4) Угол между векторами $\overrightarrow{OM}(\alpha)$ и $\overrightarrow{OM}(\beta)$ равен $|\alpha - \beta|$

5) По свойству скалярного произведения найдем

$$\vec{OM}(\alpha)\cdot\vec{OM}(\beta)=1\cdot 1\cdot\cos|\alpha-\beta|=\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

6) Учитывая четность тригонометрических функций получаем

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha-(-\beta))=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\alpha)=$$
$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

7) $$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=\cos\left((\frac{\pi}{2}-\alpha)-\beta\right)=$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=$$

$$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

8) $$\sin(\alpha-\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta)\right)=\cos\left((\frac{\pi}{2}-\alpha)+\beta\right)=$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=$$

$$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

II. Формулы сложения

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta,$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$tg\left(\alpha\pm\beta\right)=\frac{\sin\left(\alpha\pm\beta\right)}{\cos\left(\alpha\pm\beta\right)}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta\mp\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

Поделим числитель и знаменатель полученной дроби на $\cos\alpha\cdot\cos\beta$

$\cos\alpha\neq 0$ и $\cos\beta\neq 0$, т.е. в случае, когда

$tg\alpha$ и $tg\beta$ определены :

$$tg\left(\alpha\pm\beta\right)=\frac{tg\alpha\pm tg\beta}{1\mp tg\alpha\cdot tg\beta}$$

$$ctg\left(\alpha\pm\beta\right)=\frac{\cos\left(\alpha\pm\beta\right)}{\sin\left(\alpha\pm\beta\right)}=\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta\mp\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\sin\beta}=\frac{ctg\alpha\cdot ctg\beta\mp 1}{ctg\beta\pm ctg\alpha}$$

II. Формулы сложения

$$tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha \cdot tg\beta},$$

$$ctg(\alpha \pm \beta) = \frac{ctg\alpha \cdot ctg\beta \mp 1}{ctg\beta \pm ctg\alpha}$$

I-b. Формулы приведения

Выведенные формулы сложения позволяют получить **формулы приведения**, упрощающие тригонометрические функции углов вида $(\pi k/2 \pm \alpha)$

$$\cos\left(3\pi/2+\alpha\right)=\underbrace{\cos 3\pi/2}_{0}\cdot\cos\alpha-\underbrace{\sin 3\pi/2}_{-1}\cdot\sin\alpha=\sin\alpha$$

α	**π / 2 – α**	**π / 2 + α**	**π – α**	**π + α**	**3π / 2 – α**	**3π / 2 + α**	**2π – α**	**2π + α**
sin	cosα	cosα	sinα	–sinα	–cosα	–cosα	–sinα	sinα
cos	sinα	–sinα	–cosα	–cosα	–sinα	sinα	cosα	cosα
tg	ctgα	–ctgα	–tgα	tgα	ctgα	–ctgα	–tgα	tgα
ctg	tgα	–tgα	–ctgα	ctgα	tgα	–tgα	–ctgα	ctgα

III. Формулы двойных углов

Чтобы вывести формулы для вычисления тригонометрических функций двойного аргумента, подставим $\beta = \alpha$ в формулы сложения:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta,$$

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\cdot tg\beta},$$

$$ctg(\alpha+\beta) = \frac{ctg\alpha\cdot ctg\beta - 1}{ctg\alpha + ctg\beta}$$

$$\Rightarrow$$

$$\sin 2\alpha = \sin\alpha\cdot\cos\alpha + \cos\alpha\cdot\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\cos 2\alpha = \cos\alpha\cdot\cos\alpha - \sin\alpha\cdot\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$

$$tg 2\alpha = \frac{tg\alpha + tg\alpha}{1 - tg\alpha\cdot tg\alpha} = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha},$$

$$ctg 2\alpha = \frac{ctg\alpha\cdot ctg\alpha - 1}{ctg\alpha + ctg\alpha} = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha}.$$

III. Формулы двойных углов

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \left(1 - \sin^2\alpha\right) - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \left(1 - \cos^2\alpha\right) = 2\cos^2\alpha - 1$$

III. Формулы двойных углов

$$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

$$ctg2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha^{\backslash : \cos^2\alpha}}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} \underset{\cos\alpha\neq 0}{=} \frac{2tg\alpha}{tg^2\alpha + 1}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha^{\backslash : \sin^2\alpha}}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} \underset{\sin\alpha\neq 0}{=} \frac{2ctg\alpha}{ctg^2\alpha + 1}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha^{\backslash : \cos^2\alpha}}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} \underset{\cos\alpha\neq 0}{=} \frac{1 - tg^2\alpha}{tg^2\alpha + 1}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha^{\backslash : \sin^2\alpha}}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} \underset{\sin\alpha\neq 0}{=} \frac{ctg^2\alpha - 1}{1 + ctg^2\alpha}$$

III. Формулы двойных углов

$$\sin 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{tg^2\alpha + 1}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2ctg\alpha}{ctg^2\alpha + 1}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{ctg^2\alpha + 1}$$

IV. Формулы тройных углов

$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos\alpha + \cos 2\alpha \sin\alpha = 2\sin\alpha\cos^2\alpha + \left(1 - 2\sin^2\alpha\right)\sin\alpha =$$

$$= 2\sin\alpha\left(1 - \sin^2\alpha\right) + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha = 2\sin\alpha - 2\sin^3\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$\cos 3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha\sin\alpha = \left(2\cos^2\alpha - 1\right)\cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha =$$

$$= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\left(1 - \cos^2\alpha\right)\cos\alpha = 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\cos\alpha + 2\cos^3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$tg3\alpha = \frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha} = \frac{3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha}{4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha} = \frac{3\sin\alpha\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) - 4\sin^3\alpha}{4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)} =$$

$$= \frac{3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha^{\backslash:\cos^3\alpha}}{\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha} \underset{\cos\alpha\neq 0}{=} \frac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1 - 3tg^2\alpha}$$

$$ctg3\alpha = \frac{\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha^{\backslash:\sin^3\alpha}}{3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha} \underset{\sin\alpha\neq 0}{=}$$

$$= \frac{ctg^3\alpha - 3ctg\alpha}{3ctg^2\alpha - 1} = \frac{3ctg\alpha - ctg^3\alpha}{1 - 3ctg^2\alpha}$$

IV. Формулы тройных углов

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$tg3\alpha = \frac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1-3tg^2\alpha}$$

$$ctg3\alpha = \frac{3ctg\alpha - ctg^3\alpha}{1-3ctg^2\alpha}$$

V. Формулы половинных углов

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$\backslash \cdot 2\cos\frac{\alpha}{2}$

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha/2}{\cos\alpha/2}=\frac{2\sin\alpha/2\cdot\cos\alpha/2}{2\cos^2\alpha/2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$tg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin^2\alpha/2}{\cos^2\alpha/2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

;

$\backslash \cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}$

$$ctg\frac{\alpha}{2}=\frac{\cos\alpha/2}{\sin\alpha/2}=\frac{2\sin\alpha/2\cdot\cos\alpha/2}{2\sin^2\alpha/2}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$$

$$ctg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{\cos^2\alpha/2}{\sin^2\alpha/2}=\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$$

V. Формулы половинных углов

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$tg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$ctg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$$

$$ctg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$$

VI. Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму

$$\begin{cases} \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta, & (1) \\ \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta, & (2) \\ \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta, & (3) \\ \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta. & (4) \end{cases}$$

Сложив почленно равенства (1) и (2), получим:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right)$$

Сложив почленно равенства (3) и (4), получим:

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right)$$

Вычтя из равенства (4) равенство (3), получим:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$$

VI. Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin\left(\alpha+\beta\right)+\sin\left(\alpha-\beta\right)\right)$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\alpha+\beta\right)+\cos\left(\alpha-\beta\right)\right)$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\alpha-\beta\right)-\cos\left(\alpha+\beta\right)\right)$$

VII. Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение

$$\sin\alpha+\sin\beta=\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cancel{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}+\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-$$

$$-\cancel{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\cancel{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}-\cancel{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}+$$

.

$$+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cancel{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+$$

$$+\cancel{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\cancel{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}-\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}-\cancel{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}-$$

$$-\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$$

VII. Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение

$$
\begin{cases}
\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}, \\
\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}, \\
\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}, \\
\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\beta-\alpha}{2}.
\end{cases}
$$