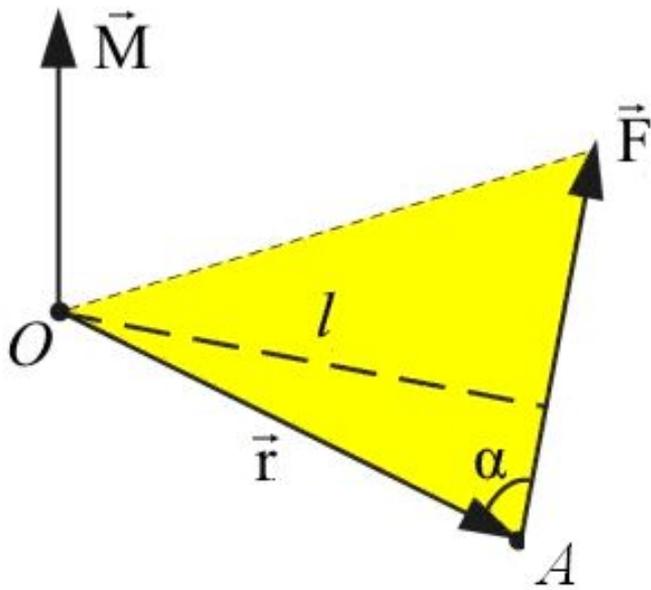


# Динамика вращательного движения.

---

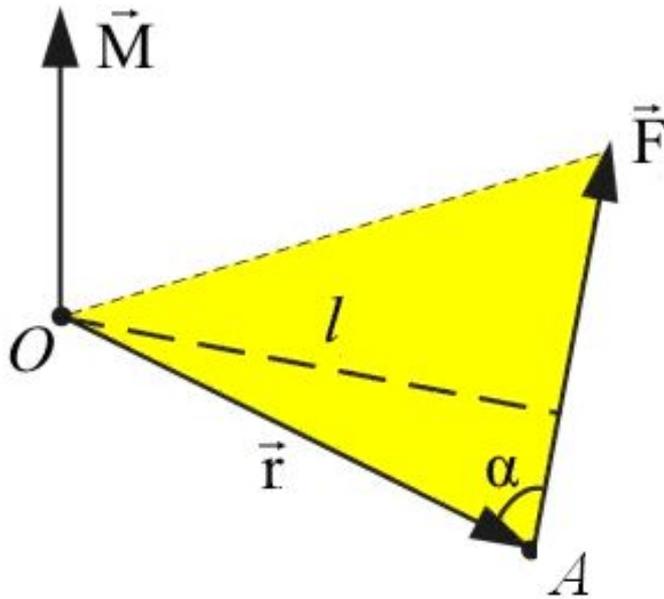
- I. Момент силы.
- II. Момент инерции. Теорема Штейнера.
- III. Кинетическая энергия вращающегося тела.
- IV. Основной закон динамики вращательного движения.
- V. Момент импульса. Закон сохранения импульса.
- VI. Сравнение характеристик и законов поступательного и вращательного движений.

# Момент силы.



- Чтобы привести тело во вращение, необходимо хотя бы к одной точке ( A ) приложить внешнюю силу  $F$ .
- Линия действия силы не должна проходить через ось вращения ( O ).
- Радиус-вектор  $r$  проводится от оси вращения O до точки приложения силы A.
- Угол  $\alpha$  между  $r$  и  $F$ .
- **Плечом силы** называется кратчайшее расстояние от оси до линии действия силы  $l = r \sin \alpha$

# Момент силы.



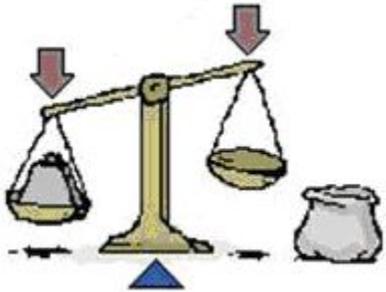
- Произведением силы на плечо называется **вращающим моментом** или **моментом силы** относительно оси вращения
- $$M = F l = F r \sin \alpha$$
- Направление вектора  $M$  определяется по **правилу правой руки**: четыре согнутых пальца показывают направление движения тела, большой палец показывает направление момента силы.
- Вектор  $M$  направлен вдоль оси вращения.

# Правило рычага

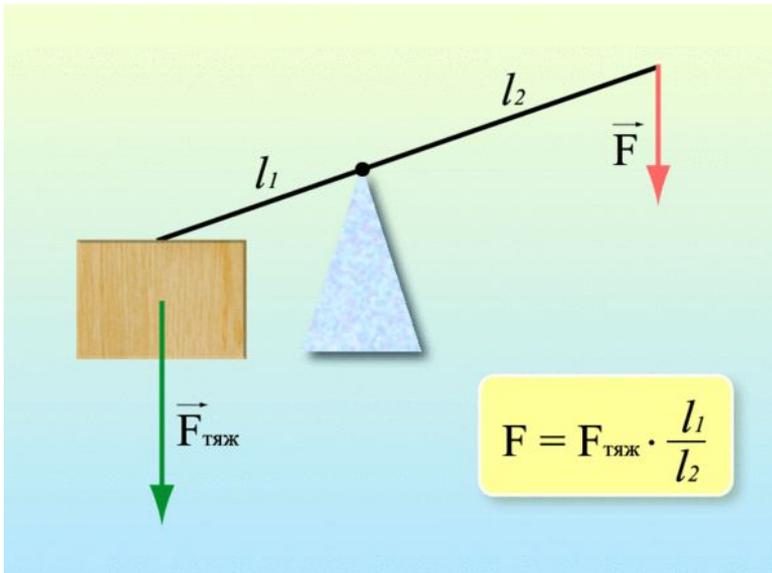


- Каким ключом проще открутить болт: с длинной или короткой ручкой?
- Необходимо рассмотреть 2 момента сил:
  - 1 - момент силы сопротивления (он будет направлен в плоскость экрана)
  - 2 - момент движущей силы (направлен из плоскости экрана)
- Чем длиннее ручка ключа, тем меньше движущая сила.

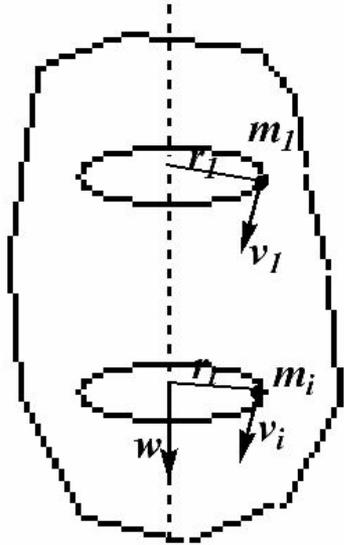
# Правило рычага



- Какие физические величины уравниваются при взвешивании на рычажных весах?
- Моменты сил.
- В уравновешенном состоянии сила тяжести будет равна приложенной силе только в том случае, если плечи  $l_1$  и  $l_2$  будут равны.

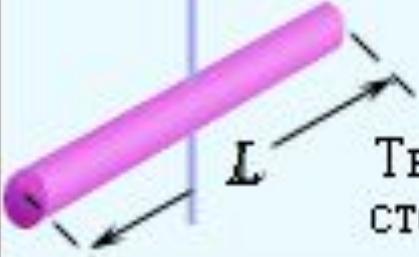
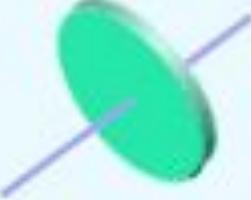
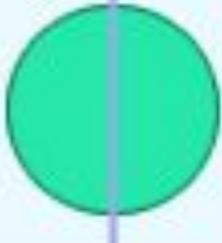


# Момент инерции.

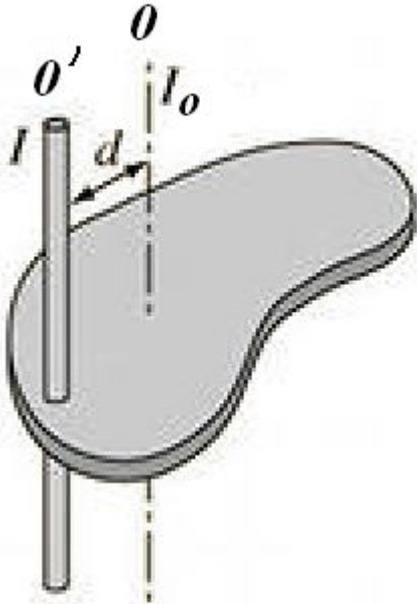


- Масса не может служить мерой инертности тела при вращательном движении.
- Вводится понятие *момента инерции*  $I$ .
- *Моментом инерции* материальной точки называется скалярная физическая величина
$$I = m r^2$$
- Если вращается твердое тело, состоящее из множества материальных точек, то момент инерции тела находится  $I = \sum m_i r_i^2$ .
- Момент инерции зависит от массы тела, формы и размеров, ориентации оси вращения.
- $[ I ] = [ \text{кг} \cdot \text{м}^2 ]$

# Моменты инерции некоторых тел относительно оси, проходящей через центр масс.

$I_C = \frac{1}{12}ML^2$  <p>Твердый стержень</p>	$I_C = \frac{2}{5}MR^2$  <p>Шар</p>	$I_C = \frac{2}{3}MR^2$  <p>Тонкостенная сферическая оболочка</p>
$I_C = MR^2$  <p>Тонкостенный цилиндр</p>	$I_C = \frac{1}{2}MR^2$  <p>Диск</p>	$I_C = \frac{1}{4}MR^2$  <p>Диск</p>

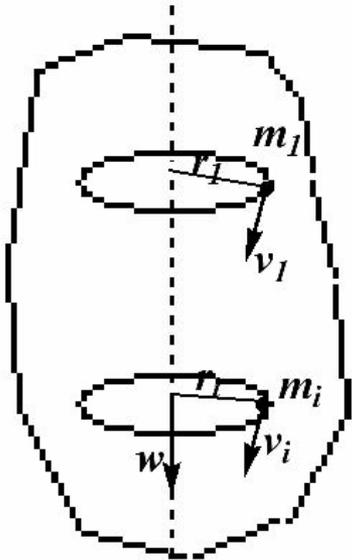
# Теорема Штейнера.



- Момент инерции тела относительно произвольной оси  $O'$  определяется формулой  $I = I_0 + m d^2$
- где  $I_0$  – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс;
- $m$  – масса тела;
- $d$  – расстояние между осями.

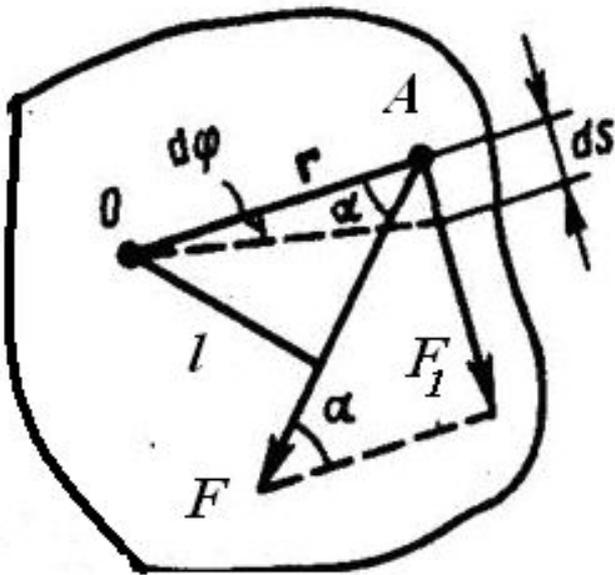
# Кинетическая энергия вращения.

- Рассмотрим абсолютно твердое тело, вращающееся вокруг оси.
- Разобьем его на маленькие объемы с массами  $m_i$ , находящихся на расстоянии  $r_i$  от оси.
- Их угловая скорость одинакова  
$$\omega = v_1 / r_1 = v_2 / r_2 = \dots = v_i / r_i = v_n / r_n$$
- Кинетическая энергия вращения тела будет равна сумме кинетических энергий объёмов



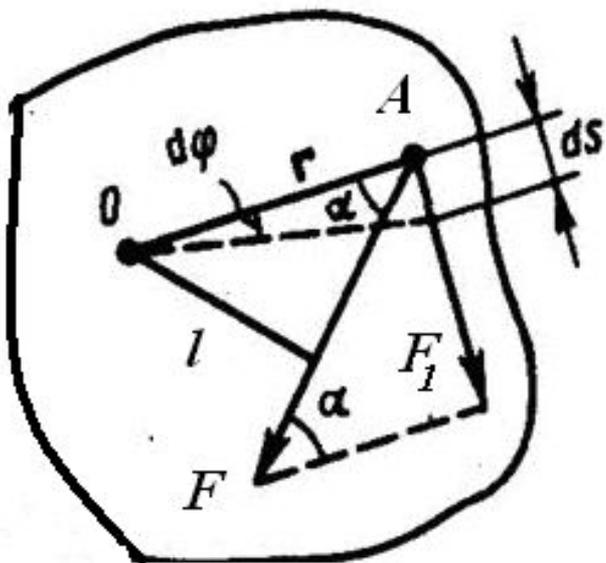
$$E = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \frac{\omega^2}{2} = \frac{I \omega^2}{2}$$

# Основной закон динамики вращательного движения.



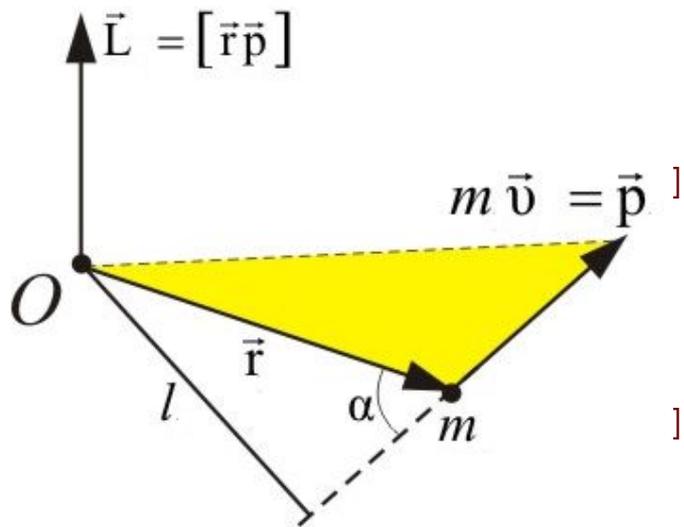
- Под действием силы  $F$ , приложенной к телу в некоторой точке  $A$  оно повернулось на угол  $d\varphi$ .
- При этом совершается работа
$$dA = F_1 dS$$
- малое перемещение
$$dS = r d\varphi$$
  
( при малых углах  $tg d\varphi \approx d\varphi$  )
- Сила  $F_1 = F \sin \alpha$
- Подставив, получим
$$dA = F r \sin \alpha d\varphi = M d\varphi$$
  
т. к.  $r \sin \alpha = l$  ( плечо силы  $F$  )  
 $F l = M$  ( момент силы )

# Основной закон динамики вращательного движения.



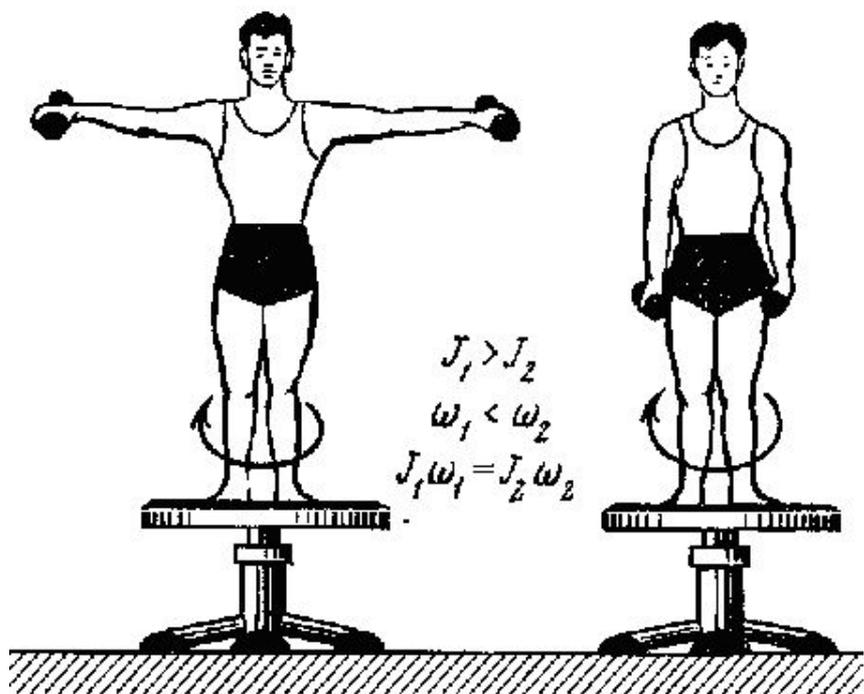
- Работа идет на изменение кинетической энергии
$$dE = d(I \omega^2)/2 = I \omega d\omega$$
- $dA = dE$  или  $M d\varphi = I \omega d\omega$
- Поделив обе части уравнения на  $dt$ ,  
получаем  $M d\varphi/dt = I \omega d\omega/dt$
- т.к.  $d\varphi/dt = \omega$  и  $d\omega/dt = \varepsilon$
- $M = I \varepsilon$  - это основной закон динамики вращательного движения.

# Момент импульса вращающегося тела.



- **Моментом импульса (количества движения)** материальной точки  $m$  относительно неподвижной точки  $O$  называется величина  $L = [r m v] = [r p]$
- Его направление совпадает с направлением правого винта при его вращении от  $r$  к  $p$ .
- Модуль момента импульса
$$L = r p \sin \alpha = r m v \sin \alpha,$$
где  $\alpha$  – угол между векторами  $r$  и  $p$ .
- **Момент импульса** относительно оси вращения равен  $L = I \omega$

# Закон сохранения момента импульса.



- Момент импульса замкнутой системы с течением времени не изменяется.

$$I \omega = const.$$

- Выполнение данного закона наглядно демонстрируется на примере скамьи Жуковского.

# Сравнение характеристик и законов поступательного и вращательного движений.

Поступательное движение		Вращательное движение	
Путь	$S$	Угол поворота	$\varphi$
Скорость	$v = \frac{dS}{dt}$	Угловая скорость	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
Ускорение	$a = \frac{dv}{dt}$	Угловое ускорение	$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$
	$v = v_0 \pm at$ $S = v_0 t \pm \frac{at^2}{2}$ $S = \int_0^t v dt$		$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t$ $\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}$ $\varphi = \int_0^t \omega dt$

Основное уравнение динамики поступательного движения	$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ $m\vec{a} = \vec{F}$	Основное уравнение динамики вращательного движения	$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ $I\vec{\varepsilon} = \vec{M}$
Импульс	$\vec{p} = m\vec{v}$	Момент импульса	$\vec{L} = I\vec{\omega}$
Закон сохранения импульса	$m\vec{v} = \text{const}$	Закон сохранения момента импульса	$I\vec{\omega} = \text{const}$
Работа	$A = F \cdot S$	Работа вращения	$A = M \cdot \varphi$
Кинетическая энергия	$K = \frac{mv^2}{2}$	Кинетическая энергия вращающегося тела	$K_{\text{вр.}} = \frac{I\omega^2}{2}$
Полная энергия тела, катящегося с высоты $h$			
$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$			