Уравнения математической физики
6 семестр

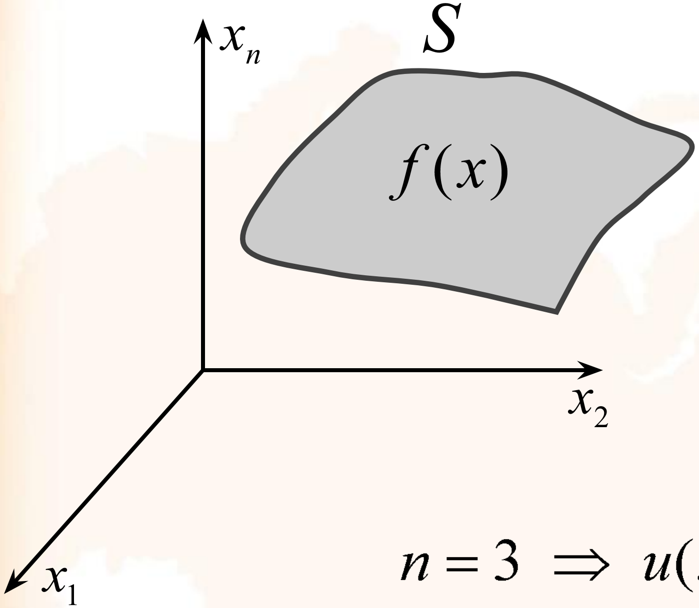
Лекция 5

Теория потенциала 2.

12 мая 2014 года

Лектор: профессор НИЯУ МИФИ, д.ф.-м.н.
Орловский Дмитрий Германович

Потенциал простого слоя



$$u(x) = \int_S E(x,y) f(y) dS_y$$

$$n = 3 \;\Rightarrow\; u(x) = \int_S \frac{f(y) dS_y}{4\pi |x-y|}$$

$$n = 2 \;\Rightarrow\; u(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_S f(y) \ln |x-y| dS_y$$

Асимптотика на бесконечности

$$Q = \int_S f(y)\,dS,$$

$$M = \int_S y f(y)\,dS = \left(\int_S y_1 f(y)\,dS, \int_S y_2 f(y)\,dS, \dots, \int_S y_n f(y)\,dS \right)$$

$$(M, x) = M_1 x_1 + M_2 x_2 + \dots + M_n x_n$$

$$n > 2 \;\Rightarrow\; u(x) = \frac{Q}{(n-2)\sigma_n |x|^{n-2}} + \frac{(M, x)}{\sigma_n |x|^n} + O\left(\frac{1}{|x|^n}\right), \quad |x| \to \infty$$

$$\left(n = 3 \;\Rightarrow\; \boxed{u(x) = \frac{Q}{4\pi |x|} + \frac{(M, x)}{4\pi |x|^3} + O\left(\frac{1}{|x|^3}\right),} \quad |x| \to \infty \right)$$

Теория потенциала

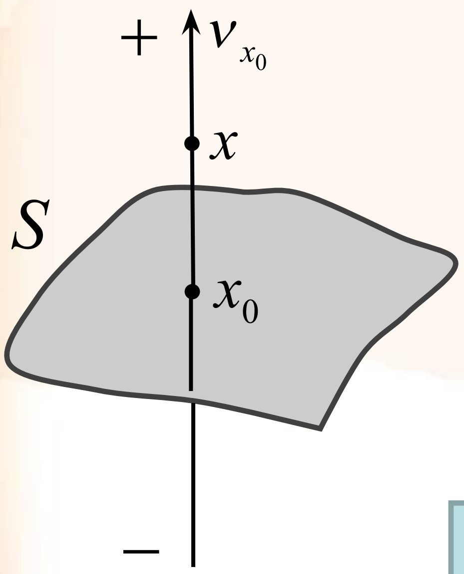
$$\boxed{n = 2} \Rightarrow \boxed{u(x) = -\frac{Q}{2\pi}\ln|x| + \frac{(M,x)}{2\pi|x|^2} + O\left(\frac{1}{|x|^2}\right)}, \quad |x| \to \infty$$

$$\left(Q = \int_S f(y)\,dS, \; M = \int_S y f(y)\,dS \right)$$

$u(x)$ *ограничена* $\Leftrightarrow \lim\limits_{|x|\to\infty} u(x) = 0 \Leftrightarrow \int_S f(x)\,dS_x = 0$

$$f \in C(S)$$

$$u(x) \in C(R^n),\ u(x) \in C^\infty(R^n \setminus S),\ \Delta u(x) = 0\ (x \in C^\infty(R^n \setminus S))$$



$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu_{x_0}}\right)^+ (x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ справа}} \frac{\partial u}{\partial \nu_{x_0}}(x)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu_{x_0}}\right)^- (x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ слева}} \frac{\partial u}{\partial \nu_{x_0}}(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_{x_0}}(x) = \int_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_{x_0}} f(y)\, dS_y \quad (x \neq x_0)$$

$$\boxed{\overline{\frac{\partial u}{\partial \nu_{x_0}}}(x_0) = \int_S \frac{\partial E(x_0,y)}{\partial \nu_{x_0}} f(y)\, dS_y}$$

Прямое значение нормальной производной

Теория потенциала

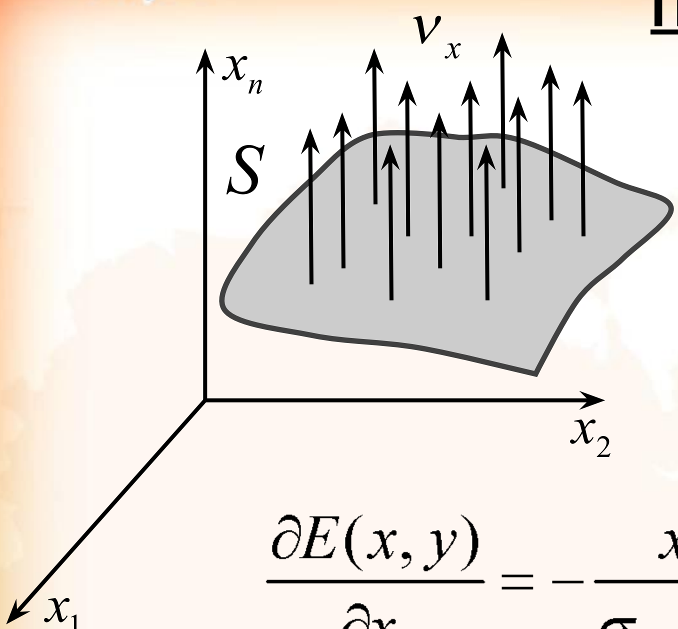
$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu_{x_0}}\right)^{+}(x_0) = \overline{\frac{\partial u}{\partial \nu_{x_0}}}(x_0) - \frac{f(x_0)}{2}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu_{x_0}}\right)^{-}(x_0) = \overline{\frac{\partial u}{\partial \nu_{x_0}}}(x_0) + \frac{f(x_0)}{2}$$

Теорема Гаусса о поверхностной дивергенции

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu_{x_0}}\right)^{+} - \left(\frac{\partial u}{\partial \nu_{x_0}}\right)^{-} = -f(x_0)$$

Потенциал двойного слоя



$$u(x)=\int_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y} f(y)\,dS_y$$

$$\frac{\partial E(x,y)}{\partial x_i}=-\frac{x_i-y_i}{\sigma_n|x-y|^n}\;\Rightarrow\;\frac{\partial E(x,y)}{\partial y_i}=\frac{x_i-y_i}{\sigma_n|x-y|^n}$$

$$\nabla_y E(x,y)=\frac{1}{\sigma_n|x-y|^n}(x-y)$$

$$\frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y}=\left(\nabla_y E(x,y),\nu_y\right)=\frac{(x-y,\nu_y)}{\sigma_n|x-y|^n}$$

Теория потенциала

$$u(x)=\int\limits_S \frac{(x-y,\nu_y)}{\sigma_n\,|x-y|^n}f(y)dS_y$$

Асимптотика на бесконечности

$$u(x)=\frac{(M,x)}{\sigma_n\,|x|^n}+O\left(\frac{1}{|x|^n}\right),\quad |x|\to\infty$$

$$M=\int\limits_S \nu_y f(y)dS=\left(\int\limits_S \nu_1 f(y)dS,\int\limits_S \nu_2 f(y)dS,\ldots,\int\limits_S \nu_n f(y)dS\right)$$

$$(M,x)=M_1x_1+M_2x_2+\ldots+M_nx_n$$

Теория потенциала

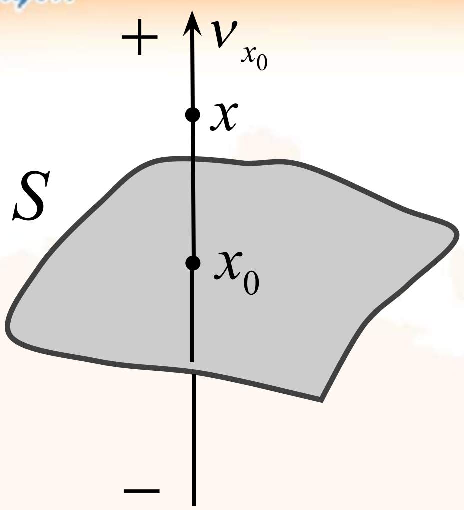
$$n = 3 \;\Rightarrow\; u(x) = \frac{(M, x)}{4\pi\,|x|^3} + O\left(\frac{1}{|x|^3}\right), \quad |x| \to \infty$$

$$n = 2 \;\Rightarrow\; u(x) = \frac{(M, x)}{2\pi\,|x|^2} + O\left(\frac{1}{|x|^2}\right), \quad |x| \to \infty$$

$$\boxed{f \in C(S)}$$

$$u(x) \in C^\infty(R^n \setminus S),\; \Delta u(x) = 0 \;\; (x \in C^\infty(R^n \setminus S))$$

Теория потенциала



$$u^+(x_0) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ справа}} u(x)$$

$$u^-(x_0) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ слева}} u(x)$$

$$u(x_0) = \int_S \frac{\partial E(x_0, y)}{\partial \nu_y} f(y)dS$$

$$u^+(x_0) = u(x_0) + \frac{f(x_0)}{2}$$

$$u^-(x_0) = u(x_0) - \frac{f(x_0)}{2}$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial u}{\partial \nu_{x_0}}\right)^+ = \left(\frac{\partial u}{\partial \nu_{x_0}}\right)^-}$$

$$\boxed{u^+(x_0) - u^-(x_0) = f(x_0)}$$

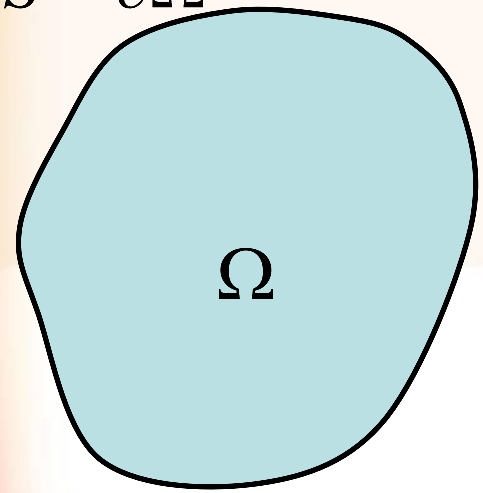
$$u(x_0) = \frac{u^+(x_0) + u^-(x_0)}{2}$$

Теория потенциала

Интеграл Гаусса

$$u_G(x) = \int_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y} dS_y = \int_S \frac{(x-y,\nu_y)}{\sigma_n |x-y|^n} dS_y$$

$S = \partial\Omega$



$$u_G(x) = \begin{cases} 0, & x \in R^n \setminus \overline{\Omega} \\ -1/2, & x \in S \\ -1, & x \in \Omega \end{cases}$$

$1)\ x \in R^n \setminus \overline{\Omega}$

E(x,y) - гладкая гармоническая функция в области Ω, по следствию из формулы Грина

$$u_G(x) = \int_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y} dS_y = 0$$

$2)\ x \in \Omega$

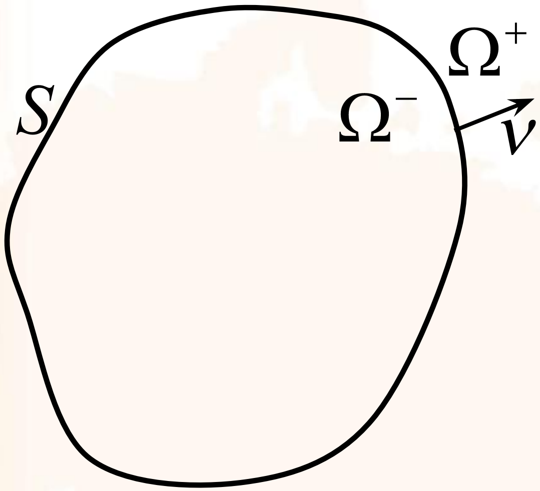
Воспользуемся интегральным представлением гладкой гармонической функции u(x)=–1

$$-1 = \int_S \left(E(x,y)\frac{\partial(-1)}{\partial \nu_y} - (-1)\cdot\frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y} \right) dS_y = \int_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y} dS_y = u_G(x)$$

$3)\ x \in S$

$$u(x) = \frac{u^+(x) + u^-(x)}{2} = \frac{0 + (-1)}{2} = -\frac{1}{2}$$

Решение краевых задач с помощью потенциалов



$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in \Omega^- \\ u(x) = \varphi(x), & x \in S \end{cases} \qquad (D^-)$$

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in \Omega^- \\ u(x) = \varphi(x), & x \in S \\ u(x) \text{ ограничена } (n = 2) \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} u(x) = 0 \quad (n \geq 3) \end{cases} \qquad (D^+)$$

$$u(x) = \int_S \frac{\partial E(x, y)}{\partial \nu_y} f(y) dS_y$$

Внутренняя задача Дирихле:

$$u^{-}(x)=\varphi(x) \quad \Leftrightarrow \quad \int_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y} f(y)\,dS_y - \frac{f(x)}{2} = \varphi(x)$$

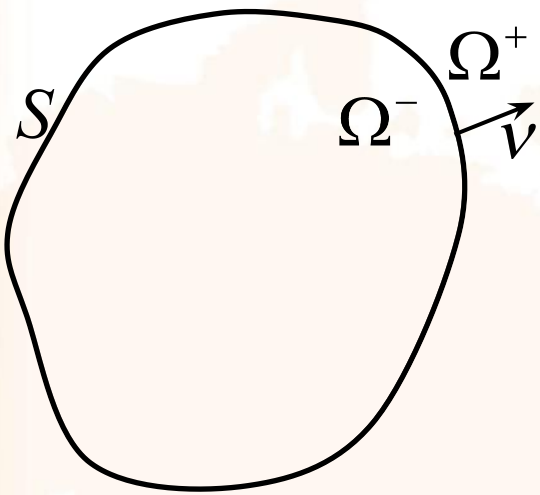
$$\boxed{f(x)-2\int_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y} f(y)\,dS_y = -2\varphi(x)}$$

Внешняя задача Дирихле:

$$u^{+}(x)=\varphi(x) \quad \Leftrightarrow \quad \int_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y} f(y)\,dS_y + \frac{f(x)}{2} = \varphi(x)$$

$$\boxed{f(x)+2\int_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y} f(y)\,dS_y = 2\varphi(x)}$$

Теория потенциала



$$
\begin{cases}
\Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega^- \\
\dfrac{\partial u(x)}{\partial \nu} = \varphi(x), \; x \in S
\end{cases}
\qquad (N^-)
$$

$$
\begin{cases}
\Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega^- \\
\dfrac{\partial u(x)}{\partial \nu} = \varphi(x), \; x \in S \\
u(x) \text{ ограничена } \quad (n = 2) \\
\lim\limits_{|x| \to \infty} u(x) = 0 \quad (n \geq 3)
\end{cases}
\qquad (N^+)
$$

$$
\boxed{u(x) = \int\limits_S E(x, y) f(y) dS_y}
$$

Внутренняя задача Неймана:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^{-}(x)=\varphi(x) \Leftrightarrow \int_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_x} f(y)\,dS_y + \frac{f(x)}{2} = \varphi(x)$$

$$\boxed{f(x)+2\int_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_x} f(y)\,dS_y = 2\varphi(x)}$$

Внешняя задача Неймана:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^{+}(x)=\varphi(x) \Leftrightarrow \int_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_x} f(y)\,dS_y - \frac{f(x)}{2} = \varphi(x)$$

$$\boxed{f(x)-2\int_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_x} f(y)\,dS_y = -2\varphi(x)}$$

Теория Фредгольма

$$f(x) - \lambda \int_S K(x,y) f(y) dS_y = F(x) \qquad (1)$$

$$f(x) - \lambda \int_S K(x,y) f(y) dS_y = 0 \qquad (2)$$

$$f(x) - \lambda \int_S K(y,x) f(y) dS_y = F(x) \qquad (3)$$

$$f(x) - \lambda \int_S K(y,x) f(y) dS_y = 0 \qquad (4)$$

Ортогональность: $\boxed{\int_S f(y) F(y) dS_y = 0}$

Интегральные уравнения теории потенциала

$$f(x) - 2\int_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y} f(y)\,dS_y = -2\varphi(x) \qquad (D^-)$$

$$f(x) + 2\int_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y} f(y)\,dS_y = 2\varphi(x) \qquad (D^+)$$

$$f(x) + 2\int_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_x} f(y)\,dS_y = 2\varphi(x) \qquad (N^-)$$

$$f(x) - 2\int_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_x} f(y)\,dS_y = -2\varphi(x) \qquad (N^+)$$

Лемма о решении уравнения ($N^{\pm}$)

$$f(x)-2\int_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_x} f(y)\,dS_y = -2\varphi(x) \;\Rightarrow\; \boxed{\int_S f(x)\,dS_x = -\int_S \varphi(x)\,dS_x}$$

$$\int_S f(x)\,dS_x - 2\int_S dS_x \int_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_x} f(y)\,dS_y = -2\int_S \varphi(x)\,dS_x$$

$$\int_S dS_x \int_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_x} f(y)\,dS_y = \int_S \left(\int_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_x} dS_x \right) f(y)\,dS_y =$$

$$= \int_S \int_S \frac{\partial E(y,x)}{\partial \nu_x} dS_x f(y)\,dS_y = \int_S f(y) u_G(y)\,dS_y = -\frac{1}{2}\int_S f(y)\,dS_y = -\frac{1}{2}\int_S f(x)\,dS_x$$

$$\int_S f(x)\,dS_x + \int_S f(x)\,dS_x = -2\int_S \varphi(x)\,dS_x \;\Rightarrow\; \int_S f(x)\,dS_x = -\int_S \varphi(x)\,dS_x$$

Исследование первой пары интегральных уравнений (n=3)

$$f(x) - 2\int_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y} f(y)dS_y = -2\varphi(x) \qquad (D^-)$$

$$f(x) - 2\int_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_x} f(y)dS_y = -2\varphi(x) \qquad (N^+)$$

$$f(x) - 2\int_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_x} f(y)dS_y = 0$$

$$u(x) = \int_S E(x,y) f(y)dS_y$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^+ (x) = \int_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_x} f(y)dS_y - \frac{f(x)}{2} = 0$$

Теория потенциала

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, \ x \in \Omega^+ \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial \nu}\right)^+ (x) = 0, \ x \in S \\ u(x) \to 0 \ (|x| \to \infty) \end{cases} \Rightarrow \boxed{u(x) = 0 \ (x \in \Omega^+)}$$

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, \ x \in \Omega^- \\ u(x) = 0, \ x \in S \end{cases} \Rightarrow \boxed{u(x) = 0 \ (x \in \Omega^-)}$$

$$u(x) \equiv 0 \quad (x \in R^3)$$

$$f(x) = -\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \nu_x}\right)^+ (x) - \left(\frac{\partial u}{\partial \nu_x}\right)^- (x)\right] = 0$$

Теория потенциала

Следствие 1. Внутренняя задача Дирихле при n=3 имеет решение для любой непрерывной граничной функции, это решение единственно и представимо потенциалом двойного слоя.

Следствие 2. Внешняя задача Неймана при n=3 имеет решение для любой непрерывной граничной функции, это решение единственно и представимо потенциалом простого слоя.

Исследование первой пары интегральных уравнений (n=2)

$$f(x) - 2\int_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y} f(y)\,dS_y = -2\varphi(x) \qquad (D^-)$$

$$f(x) - 2\int_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_x} f(y)\,dS_y = -2\varphi(x) \qquad (N^+)$$

$$f(x) - 2\int_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_x} f(y)\,dS_y = 0$$

$$u(x) = \int_S E(x,y) f(y)\,dS_y$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^+(x) = \int_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_x} f(y)\,dS_y - \frac{f(x)}{2} = 0$$

Теория потенциала

$$\boxed{\begin{cases} \Delta u(x)=0, \ x\in\Omega^+ \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial \nu}\right)^+(x)=0, \ x\in S \end{cases}}$$

$$\int_S f(x)\,dS_x=-\int_S \varphi(x)\,dS_x=0$$

$$u(x)=-\frac{Q}{2\pi}\ln|x|+\frac{(M,x)}{2\pi|x|^2}+O\left(\frac{1}{|x|^2}\right), \quad |x|\to\infty$$

$$Q=\int_S f(y)\,dS=0 \Rightarrow \ u(x)\to 0(|x|\to\infty) \ \Rightarrow \ \boxed{u(x)}$$

ограничена

$$\begin{cases} u(x)=const \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} u(x)=0 \end{cases} \Rightarrow \ u(x)=0 \ (x\in\Omega^+)$$

Теория потенциала

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, \ x \in \Omega^- \\ u(x) = 0, \ x \in S \end{cases} \Rightarrow \boxed{u(x) = 0 \ (x \in \Omega^-)}$$

$$u(x) \equiv 0 \quad (x \in R^2)$$

$$f(x) = -\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \nu_x} \right)^+ (x) - \left(\frac{\partial u}{\partial \nu_x} \right)^- (x) \right] = 0$$

Следствие 1. Внутренняя задача Дирихле при n=2 имеет решение для любой непрерывной граничной функции, это решение единственно и представимо потенциалом двойного слоя.

Дополнительный анализ интегрального уравнения N± (n=2)

$$f(x) - 2\int_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_x} f(y)dS_y = -2\varphi(x) \qquad (N^+)$$

$$u(x) = \int_S E(x,y) f(y) dS_y \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \Delta u(x) = 0, \ x \in \Omega^+ \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial \nu}\right)^+ (x) = \varphi(x), \ x \in S \end{cases}$$

$$u(x) = -\frac{Q}{2\pi}\ln|x| + \frac{(M,x)}{2\pi|x|^2} + O\left(\frac{1}{|x|^2}\right), \quad |x| \to \infty$$

$$Q = \int_S f(y)dS = -\int_S \varphi(x)dS \quad \Leftrightarrow \quad u(x)\ \text{ограничена}$$

$u(x)\,0 \qquad \Leftrightarrow \quad \int_S \varphi(x)\,dS =$

<u>Следствие 2</u>. Внешняя задача Неймана для непрерывной граничной функции φ(x) при n=2 имеет решение тогда и только тогда, когда эта граничная функция удовлетворяет условию

$$\boxed{\int_S \varphi(x)dS = 0}$$

Решение задачи определено с точностью до постоянного слагаемого и одно из решений (убывающее к нулю на бесконечности) представимо потенциалом простого слоя.

Исследование второй пары интегральных уравнений

$$f(x) + 2\int_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y} f(y)\,dS_y = 2\varphi(x) \qquad (D^+)$$

$$f(x) + 2\int_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_x} f(y)\,dS_y = 2\varphi(x) \qquad (N^-)$$

$$f(x) \equiv 1 \;\Rightarrow\; f(x) + 2\int_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y} f(y)\,dS_y = 0$$

$$1 + 2\int_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y}\,dS_y = 1 + 2u_G(x) = 1 + 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

Лемма. Пусть

$$f(x)+2\int_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_x} f(y)dS_y = 0 \qquad (N^-)$$

и

$$u(x)=\int_S E(x,y)f(y)dS$$

тогда внутри S

$$u(x)=const \;\; (x\in\Omega^-)$$

$$\begin{cases} \Delta u(x)=0, & x\in\Omega^- \\ \dfrac{\partial u(x)}{\partial \nu}=0, & x\in S \end{cases} \Rightarrow \; u(x)=const \;\; (x\in\Omega^-)$$

Одномерность собственных подпространств (n≥3)

Лемма. Если потенциал простого слоя равен нулю внутри S, то его плотность равна нулю.

$$u(x)=0\ (x\in\Omega^-)\ \Rightarrow\ u(x)\Big|_{x\in S}=0$$

$$\begin{cases}\Delta u(x)=0,\ x\in\Omega^+\\ u(x)=0,\ x\in S\\ \lim\limits_{|x|\to\infty}u(x)=0\end{cases}\ \Rightarrow\ u(x)=0\ (x\in\Omega^+)$$

$$u(x)\equiv 0\ \Rightarrow\ f(x)=-\left(\frac{\partial u}{\partial\nu_x}\right)^+-\left(\frac{\partial u}{\partial\nu_x}\right)^-=0$$

Теория потенциала

$$f(x)+2\int_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_x} f(y)dS_y = 0,\quad g(x)+2\int_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_x} g(y)dS_y = 0,$$

$$(f \neq 0)$$

$$u(x)=\int_S E(x,y)f(y)dS_y,\quad v(x)=\int_S E(x,y)g(y)dS_y$$

$$u(x)=c_1\neq 0,\ v(x)=c_2\ \ (x\in\Omega^-)$$

$$\rho(x)=c_2 f(x)-c_1 g(x),\ w(x)=\int_S E(x,y)\rho(y)dS_y = c_2u(x)-c_1v(x)$$

$$x\in\Omega^- \ \Rightarrow\ w(x)=c_2c_1-c_1c_2=0\ \Rightarrow\ \rho(x)=0$$

$$c_2 f(x)-c_1g(x)=0\ \Rightarrow\ \boxed{g(x)=\frac{c_2}{c_1}f(x)}$$

Одномерность собственных подпространств (n=2)

Лемма.

$$\begin{cases} f(x)+2\int\limits_S \dfrac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_x} f(y)dS_y = 0 \\ \int\limits_S f(y)dS = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{f \equiv 0}$$

$$u(x)=\int\limits_S E(x,y)f(y)dS \;\Rightarrow\; u(x)=const \;\; (x\in\Omega^-)$$

$$u(x)\big|_{\Omega^-}=const \Rightarrow u(x)\big|_S=const$$

$$Q=\int\limits_S f(y)dS=0 \;\Rightarrow\; u(x)\to 0 \;\; (|\,x\,|\leftrightarrow\infty)$$

Теория потенциала

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0 \ (x \in \Omega^+) \\ u(x)\big|_S = const \\ u(x) \to 0 \ (|x| \to \infty) \end{cases} \qquad (D^+)$$

$$u(x) = const \ (x \in \Omega^+) \ \Rightarrow \ u(x) = const \ (x \in R^2)$$

$$\begin{cases} u(x) = const \ (x \in R^2) \\ u(x) \to 0 \ (|x| \to \infty) \end{cases} \Rightarrow \ u(x) \equiv 0 \ (x \in R^2)$$

$$f(x) = -\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \nu_x}\right)^+ - \left(\frac{\partial u}{\partial \nu_x}\right)^-\right] = 0$$

Теория потенциала

$$f(x)+2\int_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_x} f(y)dS_y = 0,\quad g(x)+2\int_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_x} g(y)dS_y = 0$$

$$(f\neq 0)\ \Rightarrow\ Q=\int_S f(y)dS_y \neq 0$$

$$u(x)=\int_S E(x,y)f(y)dS_y,\quad v(x)=\int_S E(x,y)g(y)dS_y$$

$$\rho(x)=cf(x)-g(x),\quad c=\frac{1}{Q}\int_S g(y)dS_y,\quad w(x)=\int_S E(x,y)\rho(y)dS_y$$

$$\int_S \rho(y)dS_y = c\int_S f(y)dS_y - \int_S g(y)dS_y = cQ-\int_S g(y)dS_y = 0$$

$$\begin{cases} \rho(x)+2\int_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_x}\rho(y)dS_y = 0 \\ \int_S \rho(y)dS_y = 0 \end{cases} \Rightarrow\ \rho(x)=0\ \Rightarrow\ \boxed{g(x)=cf(x)}$$

Теория потенциала

$$f(x)+2\int\limits_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y} f(y)\,dS_y = 0 \qquad (D_0^+)$$

$$f(x)+2\int\limits_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_x} f(y)\,dS_y = 0 \qquad (N_0^-)$$

1) Пространство решений однородного уравнения внешней задачи Дирихле состоит из констант.
2) Пространство решений однородного уравнения внутренней задачи Неймана одномерно (все решения пропорциональны любому одному из ненулевых решений этого уравнения).

Потенциал Робена

$$f(x)+2\int_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_x} f(y)dS_y = 0$$

$$u(x)=\int_S E(x,y)f(y)dS_y,\ u(x)=const\ \ (x\in\Omega^-)$$

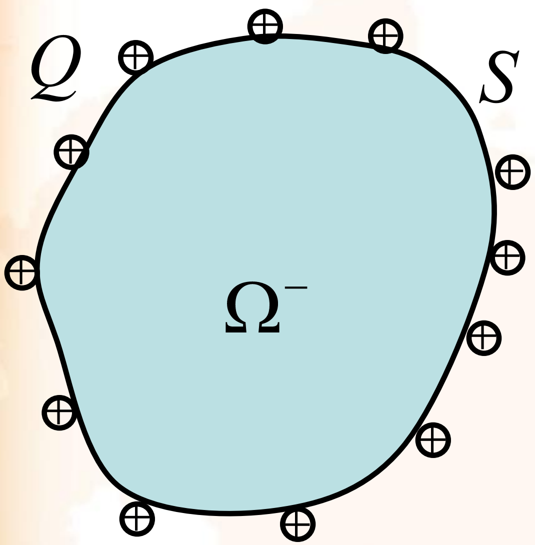
$$f\neq 0 \ \Leftrightarrow\ const\neq 0$$

Выбираем решение, для которого эта константа равна 1 (плотность Робена и потенциал Робена):

$$u_R(x)=\int_S E(x,y)f_R(y)dS_y$$

$$u_R(x)=1\ (x\in\Omega^-)$$

Физический смысл потенциала Робена (n=3)



S – идеальный проводник

Q – заряд на S

$$u(x) = \int_S E(x,y) f(y) dS_y$$

$$u(x)\big|_S = const$$

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, \; x \in \Omega^- \\ u(x) = const, \; x \in S \end{cases} \Rightarrow \; u(x) = const, \; x \in \Omega^-$$

$$f(x) + 2\int_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_x} f(y) dS_y = 0$$

$Q = C$ емкость $(S - \qquad)$

$$u(x)\big|_{\Omega^-} = 1 \;\Leftrightarrow\; \boxed{Q = C}$$

$$f(x)+2\int\limits_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y} f(y)dS_y = 0 \qquad (D_0^+)$$

$$f(x)+2\int\limits_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_x} f(y)dS_y = 2\varphi(x) \qquad (N^-)$$

Условие разрешимости:

$$\boxed{\int\limits_S \varphi(x)dS_x = 0 \quad (R)}$$

Следствие. Внутренняя задача Неймана для непрерывной граничной функции φ(x) имеет решение тогда и только тогда, когда эта граничная функция удовлетворяет условию (R).

Решение задачи определено с точностью до постоянного слагаемого и одно из решений представимо потенциалом простого слоя.

Теория потенциала

$$f(x) + 2\int_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y} f(y)\,dS_y = 2\varphi(x) \qquad (D^+)$$

$$f(x) + 2\int_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_x} f(y)\,dS_y = 0 \qquad (N_0^-)$$

Условие разрешимости:

$$\boxed{\int_S \varphi(x) f_R(x)\,dS_x = 0 \quad (R)}$$

Следствие. Если для непрерывной граничной функции φ(x) выполнено условие (R), то решение внешней задачи Дирихле существует, единственно и представимо потенциалом двойного слоя.

Пример.

$$1)\ n \ge 3,\ S = \{x \in R^n : |x| > 1\},\ u(x) = \frac{1}{|x|^{n-2}}$$

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0,\ |x| > 1 \\ u(x) = 1,\ x \in S \\ \lim\limits_{|x| \to \infty} u(x) = 0 \end{cases}$$

$$u_{дв.слой}(x) = \frac{(M, x)}{\sigma_n |x|^n} + O\left(\frac{1}{|x|^n}\right) = O\left(\frac{1}{|x|^{n-1}}\right) = o\left(\frac{1}{|x|^{n-2}}\right),\quad |x| \to \infty$$

Решение внешней задачи Дирихле нельзя представить потенциалом двойного слоя, следовательно, условие (R) не выполнено.

Теория потенциала

Пример.

$$2)\ n = 2,\ S = \{x \in R^n : |x| > 1\},\ u(x) = 1$$

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0,\ |x| > 1 \\ u(x) = 1,\ x \in S \\ u(x)\ \textit{ограничена} \end{cases}$$

$$u_{\textit{дв.слой}}(x) = \frac{(M, x)}{2\pi |x|^2} + O\left(\frac{1}{|x|^2}\right) = O\left(\frac{1}{|x|}\right),\quad |x| \to \infty$$

$$\lim_{|x| \to \infty} u_{\textit{дв.слой}}(x) = 0$$

Решение внешней задачи Дирихле нельзя представить потенциалом двойного слоя, следовательно, условие (R) не выполнено.

Разрешимость внешней задачи Дирихле для произвольной непрерывной граничной функции

1) $n \geq 3$

$$u(x) = \alpha E(x, x_0) + \int_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y} f(y) dS_y \quad (x_0 \in \Omega^-)$$

$\alpha E(x, x_0)$ – *потенциал точечного заряда в* R^n

$$\varphi(x) = u^+(x) = \alpha E(x, x_0) + \int_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y} f(y) dS_y + \frac{f(x)}{2}$$

$$f(x) + 2\int_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y} f(y) dS_y = 2\big(\varphi(x) - \alpha E(x, x_0)\big)$$

Условие разрешимости:

$$\int_S 2\left(\varphi(x) - \alpha E(x, x_0)\right) f_R(x)\, dS_x = 0$$

$$\alpha \int_S E(x, x_0) f_R(x)\, dS_x = \int_S \varphi(x) f_R(x)\, dS_x$$

$$x_0 \in \Omega^- \Rightarrow \int_S E(x, x_0) f_R(x)\, dS_x = u_R(x) = 1$$

$$\boxed{\alpha = \int_S \varphi(x) f_R(x)\, dS_x}$$

Следствие. Решение внешней задачи Дирихле при n≥3 существует для любой непрерывной граничной функции, единственно и представимо в виде суммы потенциала точечного заряда и потенциала двойного слоя.

2) $n = 2$

$$u(x) = \alpha + \int_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y} f(y)dS_y$$

$$\varphi(x) = u^+(x) = \alpha + \int_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y} f(y)dS_y + \frac{f(x)}{2}$$

$$f(x) + 2\int_S \frac{\partial E(x,y)}{\partial \nu_y} f(y)dS_y = 2\left(\varphi(x) - \alpha\right)$$

Теория потенциала

Условие разрешимости:

$$\int_S 2\left(\varphi(x)-\alpha\right) f_R(x)\,dS_x = 0$$

$$\alpha \int_S f_R(x)\,dS_x = \int_S \varphi(x) f_R(x)\,dS_x$$

$$Q = \int_S f_R(x)\,dS_x \neq 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\alpha = \frac{1}{Q}\int_S \varphi(x) f_R(x)\,dS_x}$$

Следствие. Решение внешней задачи Дирихле при n=2 существует для любой непрерывной граничной функции, единственно и представимо в виде суммы константы и потенциала двойного слоя.

Уравнения математической физики.
Теория потенциала 2.
Лекция 5 завершена.

Спасибо за внимание!

Тема следующей лекции:
Специальные функции 1.
Лекция состоится в понедельник 19 мая
В 10:00 по Московскому времени.