Визначений інтеграл

План

1)Означення визначеного інтеграла та його властивості

2)Метод заміни змінної та інтегрування частинами у визначеному інтегралі

3)Невласні інтеграли

4)Геометричні застосування визначеного інтегралу

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$(де $a < b$), і якщо:

1) Розбити цей відрізок на n частинних відрізків довжиною $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$;
2) Вибрати на кожному частинному відрізку по одній довільній точці $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$;
3) Обчислити значення функції $f(x)$ у вибраних точках;
4) Скласти суму

$$f(\varepsilon_1)\Delta x_1 + f(\varepsilon_2)\Delta x_2 + ... + f(\varepsilon_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i,$$

то вона називається інтегральною сумою $f(x)$ *на відрізку* $[a;b]$.

Означення

Якщо по різному ділити відрізок [*a;b*] на *n* частинних відрізків і по-різному вибирати на них по одній точці ε_i, то можна для будь-якої неперервної функції *f(x)* і будь-якого заданого відрізка [*a;b*] скласти нескінченну множину різних інтегральних сум.

При цьому виявляється, що всі ці інтегральні суми при необмеженому зростанні *n* при прямуванні до нуля найбільшої із довжин частинного відрізка, мають одну і ту ж границю.

Ця границя всіх інтегральних сум функції *f(x)* на відрізку [*a;b*] називається **визначеним інтегралом від *f(x)* в межах від a до b** та позначається:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Властивості визначеного інтеграла

1) При перестановці меж інтегрування знак інтегралу змінюється на протилежний:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

2) Інтеграл з однаковими межами дорівнює нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

3) Відрізок інтегрування можна розбити на частини:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

4) Інтеграл від алгебраїчної суми функцій дорівнює сумі інтегралів від кожного доданку:

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x) - f_3(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_3(x)dx$$

5) Постійний множник k можна виносити за знак інтеграла:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

Для обчислення визначеного інтеграла використовується формула Ньютона-Лейбніца:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \qquad (1)$$

тобто, визначений інтеграл дорівнює різниці значень невизначеного інтеграла при верхній та нижній межах інтегрування.

Приклад 1.

$$\int_{-1}^{7}\frac{dx}{\sqrt{3x+4}}=\int_{-1}^{7}(3x+4)^{-\frac{1}{2}}dx=\left.\frac{(3x+4)^{\frac{1}{2}}}{3\cdot\frac{1}{2}}\right|_{-1}^{7}=\frac{2}{3}\sqrt{3x+4}\;\Big|_{-1}^{7}=$$

$$=\frac{2}{3}5-\frac{2}{3}=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$$

Приклад 2.

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin\frac{x}{2}dx=-2\cos\frac{x}{2}\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=-2\cos\frac{\pi}{4}+2\cos 0=$$

$$=-2\frac{\sqrt{2}}{2}+2=2-\sqrt{2}$$

2. Метод заміни змінної у визначеному інтегралі.

Якщо визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ перетворюється за допомогою підстановки:

$x = \varphi(t)$ в інший інтеграл, з новою змінною t, то задані межі: $x_1 = a, x_2 = b$ змінюються новими межами: $t_1 = \alpha, t_2 = \beta$, які визначаються з вибраної підстановки, тобто з рівнянь: $a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$

Якщо $\varphi'(t), f(\varphi(t))$ неперервні на відрізку: $[\alpha;\beta]$

то:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (2)$$

Приклад 3.

$$\int_0^{\ln 2} e^x \sqrt{e^x - 1}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = e^x - 1 \\ dt = e^x dx \\ a = 0 \Rightarrow \alpha = e^0 - 1 = 0 \\ b = \ln 2 \Rightarrow \beta = e^{\ln 2} - 1 = 1 \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{t}\,dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

Інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

Якщо підінтегральний вираз у визначеному інтегралі можна представити у вигляді добутку двох співмножників: u, dv, то для обчислення визначеного інтегралу треба скористатися формулою інтегрування частинами:

$$\int_a^b u\,dv = u \cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

Приклад 4.

$$\int_0^1 xe^{-x}dx = \left| \begin{array}{l} u = x \\ dv = e^{-x}dx \\ du = dx \\ v = -e^{-x} \end{array} \right| = -xe^{-x}\Big|_0^1 - \int_0^1 -e^{-x}dx =$$

$$= -e^{-1} + (-e^{-x})\Big|_0^1 = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = 1 - \frac{2}{e} = \frac{e-2}{e}$$

3. Невласні інтеграли.

а) Інтеграли з нескінченними межами.

Означення. Якщо існує скінченна границя:

$\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$ то цю границю називають невласним інтегралом від функції $f(x)$, в інтервалі $\left[a,+\infty\right)$ і позначають:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$$

Тобто: $$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx \qquad (3)$$

У цьому випадку кажуть, що інтеграл існує або він є збіжним. Якщо $\int_a^b f(x)dx, b \to \infty$ не має скінченної границі, то кажуть, що $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ не існує, або він розбіжний.

Аналогічно визначаються:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{c}^{b} f(x)dx$$

Приклад. Обчислити інтеграл: $\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$

Розв’язок:

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} arctgx\Big|_{0}^{b} =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}(arctgb - arctg0) = \frac{\pi}{2}$$

б) Інтеграли від розривних функцій.

Якщо функція $y = f(x)$ визначена та неперервна у відкритому інтервалі: $a \le x < b$,а у точці $x=b$ невизначена, або має розрив, тоді інтеграл визначають наступним чином:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

Якщо границя, що стоїть у правій частині рівності, існує, то інтеграл називають **невласний збіжний інтеграл**, у протилежному випадку – розбіжний.

У випадку, коли функція має розрив у точці $x = a$ відрізка $[a, b]$, то за означенням

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

Якщо функція $f(x)$ має розрив у точці $x = c$ всередині відрізка $[a, b]$, то вважаємо, що

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx,$$

коли обидва невласних інтеграли у правій частині рівності існують.

Приклад: Обчислити $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -\lim_{\varepsilon \to 0} 2\sqrt{1-x}\Big|_0^{1-\varepsilon}$$

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0} 2\left(\sqrt{1-1+\varepsilon} - 1\right) = 2$$