Числовые характеристики ССВ

Начальные моменты

$$\boxed{m_{r,s} = M\left(X^r \cdot Y^s\right)}$$

Центральные моменты

$$\boxed{\mu_{r,s} = M\left(\overset{\circ}{X}{}^r \cdot \overset{\circ}{Y}{}^s\right)}$$

Начальные моменты

$$\boxed{m_{r,s} = M\left(X^r \cdot Y^s\right)}$$

ДСВ	НСВ
$\sum_i \sum_k x_i^r y_k^s p_{ik}$	$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^r y^s f(x,y)\,dx\,dy$

$$m_{1,0} = M\left(X^1 Y^0\right) = M(X) \qquad m_{0,1} = M\left(X^0 Y^1\right) = M(Y)$$

$$m_{2,0} = M\left(X^2 Y^0\right) = m_2(X) \qquad m_{0,2} = M\left(X^0 Y^2\right) = m_2(Y)$$

$$m_{1,1} = M\left(X^1 Y^1\right) = M(XY)$$

Центральные моменты

$$\overset{\circ}{X} = X - m_X \qquad \boxed{\mu_{r,s} = M\left(\overset{\circ}{X}{}^{r} \cdot \overset{\circ}{Y}{}^{s}\right)} \qquad \overset{\circ}{Y} = Y - m_Y$$

ДСВ	НСВ
$\sum\limits_{i}\sum\limits_{k}\left(x_i - m_X\right)^r \left(y_k - m_Y\right)^s p_{ik}$	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(x - m_X\right)^r \left(y - m_Y\right)^s f(x,y)\,dx\,dy$

$$\mu_{1,0} = M\left(X - m_X\right) = 0 \qquad \mu_{0,1} = M\left(Y - m_Y\right) = 0$$

$$\mu_{2,0} = M\left(\left(X - m_X\right)^2\right) = D_X \qquad \mu_{0,2} = M\left(\left(Y - m_Y\right)^2\right) = D_Y$$

$$\mu_{1,1} = M\left(\overset{\circ}{X}{}^1 \overset{\circ}{Y}{}^1\right) = M\left(\left(X - m_X\right)\left(Y - m_Y\right)\right)$$

Ковариация

$$\mu_{1,1} = M\left(\overset{\circ}{X}{}^{1}\,\overset{\circ}{Y}{}^{1}\right) = M\left(\left(X - m_X\right)\left(Y - m_Y\right)\right) \quad = cov(X,Y)$$

<u>Теорема 1</u> Если СВ X и Y независимы, то

$$cov(X,Y) = 0$$

<u>Доказательство</u>. СВ X и Y независимы

$$\Leftrightarrow f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

$$cov(X,Y) =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x - m_X\right)\left(y - m_Y\right) f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x - m_X\right)\left(y - m_Y\right) f_X(x) f_Y(y)\,dx\,dy =$$

Ковариация

$$\mu_{1,1} = M\left(\overset{\circ}{X}{}^{1}\,\overset{\circ}{Y}{}^{1}\right) = M\left(\left(X - m_X\right)\left(Y - m_Y\right)\right) \quad = cov(X, Y)$$

<u>Теорема 1</u> Если СВ X и Y независимы, то

$$cov(X, Y) = 0$$

<u>Доказательство</u>

$$cov(X, Y) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - m_X\right) f_X(x)\,dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left(y - m_Y\right) f_Y(y)\,dy =$$

$$= M\left(X - m_X\right) \cdot M\left(Y - m_Y\right) = 0$$

Вычисление ковариации

$$cov(X,Y) = M\left(\left(X - m_X\right)\cdot\left(Y - m_Y\right)\right) =$$

$$= M\left(XY - m_X Y - X m_Y + m_X m_Y\right) =$$

$$= M\left(XY\right) - m_X m_Y$$

$$\boxed{cov(X,Y) = M\left(XY\right) - m_X m_Y}$$

Коэффициент корреляции

$$\boxed{r_{XY} = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}}$$

Определение. СВ X и Y называются **некоррелированными**, если $r_{XY} = 0$

Теорема 1' Если СВ X и Y независимы, то они некоррелированы

НЗ $\Rightarrow$ НK

$\cancel{HK \Rightarrow \text{НЗ}}$

Свойства математического ожидания

М1 $$M(a+bX)=a+bM(X)$$

М2 $$M(X+Y)=M(X)+M(Y)$$

М3 $$M(XY)=m_X m_Y+cov(X,Y)$$

Следствие из М3. Если X и Y некоррелированы, то

$$M(XY)=m_X m_Y$$

Свойства дисперсии

Д1 $$D(a+bX)=b^2D(X)$$

Д2 $$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2cov(X,Y)$$

Д3 Если X и Y независимы, то

$$D(XY)=D(X)D(Y)+m_X^2D(Y)+m_Y^2D(X)$$

Следствие из Д2. Если X и Y некоррелированы, то

$$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$$

Доказательство свойства Д2

Д2 $$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2cov(X, Y)$$

$$D(X \pm Y) = M\Big(\big((X \pm Y) - M(X \pm Y) \big)^2 \Big) =$$

$$= M\Big(\big((X - M(X)) \pm (Y - M(Y))\big)^2 \Big) =$$

$$= M\left(\left(\mathring{X} \pm \mathring{Y} \right)^2 \right) = M\left(\left(\mathring{X} \right)^2 \pm 2\mathring{X}\mathring{Y} + \left(\mathring{Y} \right)^2 \right) =$$

$$= M\left(\left(\mathring{X} \right)^2 \right) \pm 2M\left(\mathring{X}\mathring{Y} \right) + M\left(\mathring{Y} \right)^2 =$$

$$= D(X) \pm 2cov(X, Y) + D(Y)$$

Свойства коэффициента корреляции

$$\boxed{r_{XY} = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}}$$

К1 Если X и Y независимы, то $r_{XY} = 0$

К2 $\left| r_{XY} \right| \le 1$

К3 $Y = a + bX \Leftrightarrow r_{XY} = \begin{cases} +1, & b > 0 \\ -1, & b < 0 \end{cases}$

Доказательство свойства К2

К2 $\left| r_{XY} \right| \le 1$

$$M\left(\overset{*}{X}\right) = 0 \quad \sigma\left(\overset{*}{X}\right) = 1$$

$$\overset{*}{X} = \frac{X - m_X}{\sigma_X} \quad \Rightarrow \quad cov\left(\overset{*}{X}, \overset{*}{Y}\right) = r_{XY}$$

$$D\left(\overset{*}{X} \pm \overset{*}{Y}\right) = D\left(\overset{*}{X}\right) + D\left(\overset{*}{Y}\right) \pm 2\operatorname{cov}\left(\overset{*}{X}, \overset{*}{Y}\right)$$

$$\Rightarrow 2\left(1 \pm r_{XY}\right) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + r_{XY} \ge 0 \\ 1 - r_{XY} \ge 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} r_{XY} \ge -1 \\ r_{XY} \le 1 \end{cases}$$

Доказательство свойства К3

К3 Покажем,что $Y = a + bX \Rightarrow r_{XY} = \begin{cases} +1, & b > 0 \\ -1, & b < 0 \end{cases}$

$$M(Y) = a + bM(X) \qquad D(Y) = b^2 D(X)$$

$$r_{XY} = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sqrt{D_X \cdot D_Y}} = \frac{M((X - mX) \cdot (Y - mY))}{\sqrt{DX \cdot DY}} =$$

$$= \frac{b \cdot M((X - mX)^2)}{\sqrt{DX \cdot b^2 DX}} = \frac{b \cdot DX}{|b| \cdot DX} = \frac{b}{|b|}$$

Доказательство свойства К3

К3 Покажем,что $|r_{XY}| = 1 \Rightarrow Y = a + bX$

$$D\left(\overset{*}{X} \pm \overset{*}{Y}\right) = 2\left(1 \pm r_{XY}\right)$$

$$r_{XY} = 1 \Rightarrow D\left(\overset{*}{X} - \overset{*}{Y}\right) = 0 \Rightarrow M\left(\overset{*}{X} - \overset{*}{Y}\right) = c \Rightarrow$$

$$c = M\left(\overset{*}{X} - \overset{*}{Y}\right) = M\left(\overset{*}{X}\right) - M\left(\overset{*}{Y}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\overset{*}{X} - \overset{*}{Y} = 0 \Rightarrow \quad \frac{Y - m_Y}{\sigma_Y} = \frac{X - m_X}{\sigma_X} \Rightarrow$$

$$\boxed{Y = m_Y + \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\left(X - m_X\right)}$$

Числовые характеристики ССВ

Ковариационная матрица

системы n случайных величин

$$\xi = (X_1, X_2, ..., X_n)$$

$$m_\xi = \left(m_{X_1}, m_{X_2}, ... m_{X_n}\right)$$

$$K_\xi = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & cov(X_1, X_2) & ... & cov(X_1, X_n) \\ cov(X_2, X_1) & \sigma_2^2 & ... & cov(X_2, X_n) \\ ... & ... & ... & ... \\ cov(X_n, X_1) & cov(X_n, X_2) & ... & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$