ВКОШП-2011

Разбор задач

Санкт-Петербург, 2011

Задача А Наибольший общий делитель

$$\text{НОД}(a, b) = \begin{cases} a, b = 0 \\ b, a = 0 \\ \text{НОД}(a - b, b), a \ge b \\ \text{НОД}(a, b - a), a < b \end{cases}$$

- Автор задачи – Виталий Аксёнов
- Условие – Виталий Аксёнов
- Подготовка тестов – Виталий Аксёнов
- Разбор – Виталий Аксёнов

Постановка задачи

- Дано n чисел и число d
- Надо найти какой-нибудь поднабор из чисел, такой что их наибольший общий делитель равен d

Как решать?

- Взять все числа, которые делятся на d
- Теперь взять у них у всех наибольший общий делитель
- Если он равен d, то выводим это множество, если нет, то вывести -1

Обоснование

- Пусть есть какой-то другой набор, который удовлетворяет нас
- Все элементы из этого набора обязаны делиться на d, а, значит, этот набор является подмножеством нашего
- Следовательно НОД этого набора может быть только больше, чем НОД нашего, а, значит, если наш набор не удовлетворяет, то и другой тоже

Задача В
Защита беженцев

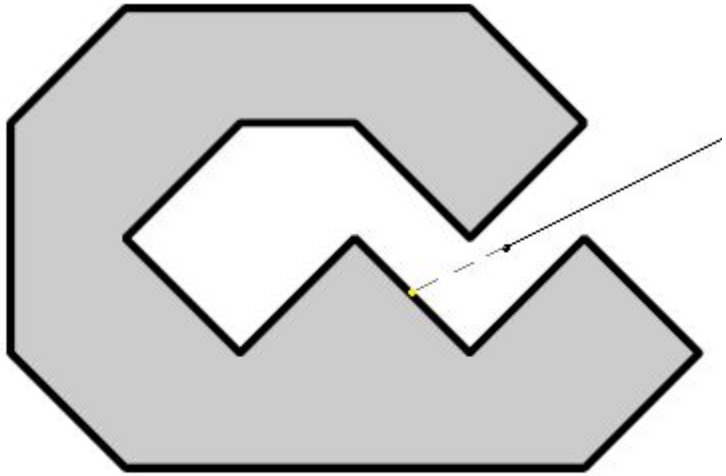
- Автор задачи – Алексей Цыпленков
- Условие – Антон Банных
- Подготовка тестов – Антон Банных
- Разбор – Виталий Аксёнов

Постановка задачи

- Дан многоугольник P
- Точка называется защищённой, если любой луч проведённый из него пересекается с многоугольником P
- Надо найти многоугольник, состоящий из защищённых точек

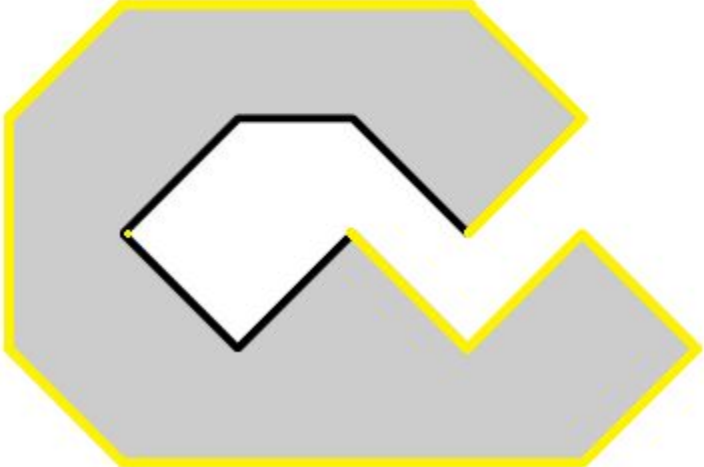
Как решать?

- Если из какой-то точки луч уходит на бесконечность, продлим его в другую сторону до пересечения со стороной (будем считать такую точку на стороне освещённой)
- Назовём такую операцию “освещением”



Как решать?

- Утверждение: если сделать такую операцию для каждой точки, для которой существует луч выходящий на бесконечность, то на каждой стороне может быть максимум 1 освещённый отрезок

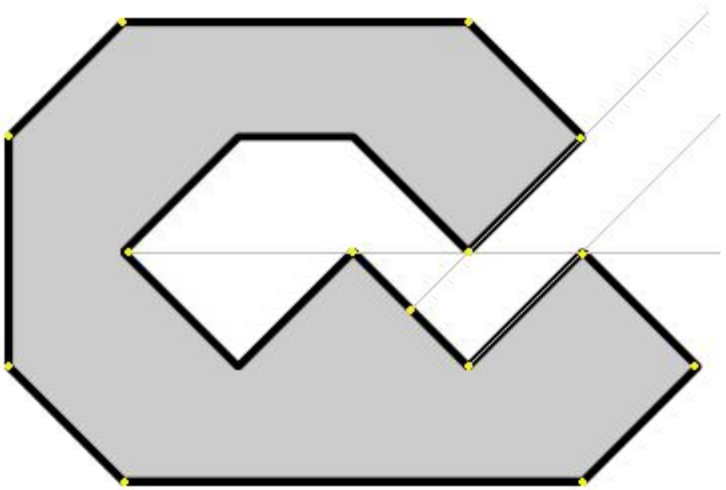


Как решать? (продолжение)

- Проведем лучи для всех пар вершин
- Для всех таких лучей проведём нашу операцию “освещение”
- На каждой стороне получили набор освещённых точек

Как решать? (продолжение)

- Утверждается, что освещённый отрезок на стороне ограничен самой левой освещённой точкой на стороне и самой правой освещённой точкой стороне



Как решать? (продолжение)

- Осталось восстановить ответ
- Утверждение: вершины нашего нового многоугольника – концы невырожденных “освещённых” частей

Задача C
Телефонный номер

- Автор задачи – Михаил Дворкин
- Условие – Евгений Курпилянский
- Подготовка тестов – Евгений Курпилянский
- Разбор – Павел Кунявский

Постановка задачи

- Дан телефонный номер – последовательность чисел, разделенных дефисами
- Необходимо найти все телефонные номера, которые произносятся также как и данный

Как решать?

- Найдем последовательность слов, которые используются при произношении данного номера
- Заметим, что слова «тысяча» и «миллион» (в разных формах) всегда употребляются вместе с предыдущим словом, поэтому форма этих слов не важна
- Следовательно, каждое слово можно хранить как его числовое значение

Как решать? (продолжение)

- Нужно перебрать всевозможные расстановки дефисов между словами и вывести все, которые являются корректными телефонными номерами
- Для определения корректности записи нужно понимать можно ли «склеить» несколько слов в одно число

Обоснование

- Количество слов в тестах меньше 100 (так как цифр не больше 50)
- Количество телефонных номеров в ответе не больше 100000
- Следовательно, перебор будет работать быстро с отсечением – не перебирать дальше, если следующую группу слов нельзя «склеить» в одно число

Задача D
Гостиница

CATS' HOUSE
HOSTEL

- Автор задачи – Антон Банных
- Условие – Антон Ахи
- Подготовка тестов – Антон Ахи
- Разбор – Антон Ахи

Постановка задачи

- Дано число n
- Надо его разложить на сумму двоек и троек с минимальным числом слагаемых

Как решать?

- Понятно, что нам не имеет смысла иметь в сумме больше двух двоек, так как 3 двойки = 2 тройки
- Если $n \equiv 0 \pmod 3$, то ответ $(n/3, 0)$
- Если $n \equiv 1 \pmod 3$, то ответ $((n-4)/3, 2)$
- Если $n \equiv 2 \pmod 3$, то ответ $((n-2)/3, 1)$

Задача Е
Парад

- Автор задачи – Сергей Поромов
- Условие – Сергей Мельников
- Подготовка тестов – Сергей Мельников
- Разбор – Сергей Мельников

Постановка задачи

- Есть последовательность из n чисел
- Надо разбить их на убывающую и возрастающую подпоследовательности

Как решать?

- Будем считать динамику less[i] и greater[i]
- Разбиение чисел хорошее – разбиение чисел на возрастающую и убывающую подпоследовательности

Как решать? (продолжение)

- В какой последовательности находится i-ый элемент:
  - В убывающей, less[i] равен минимальному из последних элементов всех возрастающих последовательностей во всех хороших разбиениях чисел с индексами от 1 до i-1

Как решать? (продолжение)

– В возрастающей, greater[i] равен максимуму из последних элементов всех убывающих последовательностей во всех хороших разбиениях чисел с индексами от 1 до i-1

Пересчёт

- Less[i]
  - if a[i+1]<greater[i] then less[i+1]=a[i]
  - if a[i+1]<a[i] then less[i+1]=min(less[i+1], less[i])
- Greater[i]
  - if a[i+1]>less[i] then greater[i+1]=a[i]
  - if a[i+1]>a[i] then greater[i+1]=
    min(greater[i+1], greater[i])

Как решать? (продолжение)

- Если мы не смогли посчитать less[n] или greater[n], то ответ – Impossible
- А иначе, нужно просто восстановить ответ по этой динамике

Задача F
Магазин

- Автор задачи – Николай Ведерников
- Условие – Николай Ведерников
- Подготовка тестов – Николай Ведерников
- Разбор – Николай Ведерников

Постановка задачи

- Дано n стоимостей товаров и известно, что k-ый бесплатно
- Найти минимальное число денег, которое нужно потратить, чтобы купить все товары

Как решать?

- Отсортируем все цены в порядке убывания
- Разобьём их на группы по k, начиная с первого, и из каждой группы, может быть кроме последней, можно не платить за минимальный элемент (то есть не платить за элемент, номер которого делится на k)
- Корректность такого алгоритма понять несложно

Задача G
Занос

- Автор задачи – Николай Ведерников
- Условие – Виталий Аксёнов
- Подготовка тестов – Виталий Аксёнов
- Разбор – Николай Ведерников

Постановка задачи

- Дано 5 чисел
    - Максимальная скорость автомобиля - v
    - Длина первого отрезка трассы - x
    - Длина второго отрезка трассы - y
    - Максимальное ускорение при разгоне - a
    - Максимальное ускорение при торможении - b
- Найти минимальное время за которое можно преодолеть трассу при условии, что скорость между двумя отрезками равна 0

Как решать?

- Заметим, что ситуация с разгоном и ситуация с торможением совершенно одинаковы, то есть при торможении мы считаем, что едем в другую сторону и ускоряемся
- Задача свелась к:
  - Максимальная скорость машины – v
  - Максимальное ускорение машины – a
  - Длина отрезка - x

Как решать? (продолжение)

- Понятно, что нам надо сразу разгоняться с ускорением a до скорости v, а далее ехать с постоянной скоростью
- 2 случая:
  - Успеваем разогнаться: $\frac{v^2}{2a} < x$, тогда ответ – $\frac{v}{a} + \frac{x - \frac{v^2}{2a}}{v}$
  - Не успеваем разогнаться: $\frac{v^2}{2a} \geq x$, тогда ответ – $\sqrt{\frac{2x}{a}}$

Задача H
Чай

- Автор задачи – Антон Ахи
- Условие – Антон Ахи
- Подготовка тестов – Антон Ахи
- Разбор – Антон Ахи

Постановка задачи

- Дан чайник объёма V и мощностью N, температура воды в чайнике опускается не ниже 20 градусов и поднимается не выше 100, вода в чайнике остывает со скоростью k градусов в секунду
- Дано m запросов, состоящих из двух чисел – время прихода члена жюри t_i и объём его кружки a_i , надо на каждый запрос вернуть время в секундах, когда член жюри начнёт пить чай

Как решать?

- Отсортируем членов жюри по временам прихода
- И просто нужно запросы жюри обрабатывать в таком порядке прямо как написано в условии

Подводные камни

- Нужно не забывать, что минимальная температура воды в чайнике – 20 градусов
- Изначально чайник был пуст

Задача I
Командная олимпиада

- Автор задачи – Юрий Петров
- Условие – Никита Иоффе
- Подготовка тестов – Никита Иоффе
- Разбор – Никита Иоффе

Постановка задачи

- Дана перестановка чисел 1, 1, 2, 2, …, n, n
- Требуется найти такую перестановку, что минимальное расстояние между двумя одинаковыми элементами было максимально и сумма расстояний между старыми и новыми позициями минимальна

Как решать?

- Заметим, что нам подходят только перестановки, что расстояние между двумя одинаковыми ровно n, то есть теперь положение i в первой половине однозначно задаёт положение i во второй половине

Как решать? (продолжение)

- Построим полный двудольный граф и на ребре из i в j напишем расстояние между положениями i в изначальной перестановке и когда они будут стоять на позициях j и j+n
- Осталось просто на этом графе найти минимальное взвешенное полное парасочетание

Задача J
Поезда

- Автор задачи – Виталий Аксёнов
- Условие – Никита Иоффе
- Подготовка тестов – Никита Иоффе
- Разбор – Павел Кунявский

Постановка задачи

- Найти k-ую в лексикографическом порядке последовательность, которую можно отсортировать стеком

Как решать?

- Заметим, что количество таких перестановок из n элементов равно числу Каталана, так как каждой такой перестановке можно взаимнооднозначно сопоставить правильную скобочную последовательность длины 2n

Как решать? (продолжение)

- Если мы на первое место поставим число i, то последовательность выглядит следующим образом:

  i(ХП[1..i-1])(ХП[i+1..n]), где ХП[a..b] – последовательность из чисел от a до b, которая сортируется стеком

  Таким образом количество ХП[1..n], где на первом месте стоит i равно $C_{i-1} * C_{n-i+1}$, где C_i – i-ое число Каталана

Как решать? (продолжение)

- Теперь просто решаем стандартную задачу о восстановлении k-ого комбинаторного объекта, то есть ставим поочерёдно на первое место числа от 1 до n и проверяем, а потом запускаемся рекурсивно от частей
[1..i-1] и [1..n-i+1]

Задача К
Королевская династия

- Автор задачи – Глеб Евстропов
- Условие – Михаил Пядёркин
- Подготовка тестов – Михаил Пядёркин
- Разбор – Олег Давыдов

Постановка задачи

- Дано подвешенное дерево из n вершин
- Дано m запросов, состоящих из 2 чисел – v и k
- Для каждого запроса надо вывести количество потомков вершины v на расстоянии k

Как решать?

- Обойдём dfs-ом вершины, и отметим для каждой времена входа in[v] и выхода out[v], а также для каждой высоты будем хранить набор вершин, которые находятся на этой высоте

Как решать? (продолжение)

- Обрабатываем запрос:
  - Пусть h[v] – высота вершины v
  - Рассмотрим набор вершин, находящихся на высоте h[v]+k
  - Среди них нужно найти количество таких, у которых времена входа от in[v] до out[v]
  - Бинарный поиск

Спасибо за внимание! Вопросы?

http://neerc.ifmo.ru/school