16.8. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

Рассмотрим нахождение экстремума функции нескольких переменных не на всей области определения, а на множестве, удовлетворяющему некоторому условию.

Пусть задана функция $z=f(x,y)$, аргументы которой удовлетворяют уравнению

$$\boxed{g(x,y)=C}$$

уравнение связ

Точка (x_0,y_0) называется точкой условного экстремума (максимума или минимума), если существует такая окрестность этой точки, что для всех точек (x,y) из этой окрестности, удовлетворяющих условию g(x,y)=C, выполняется неравенство:

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$$

max

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$$

min

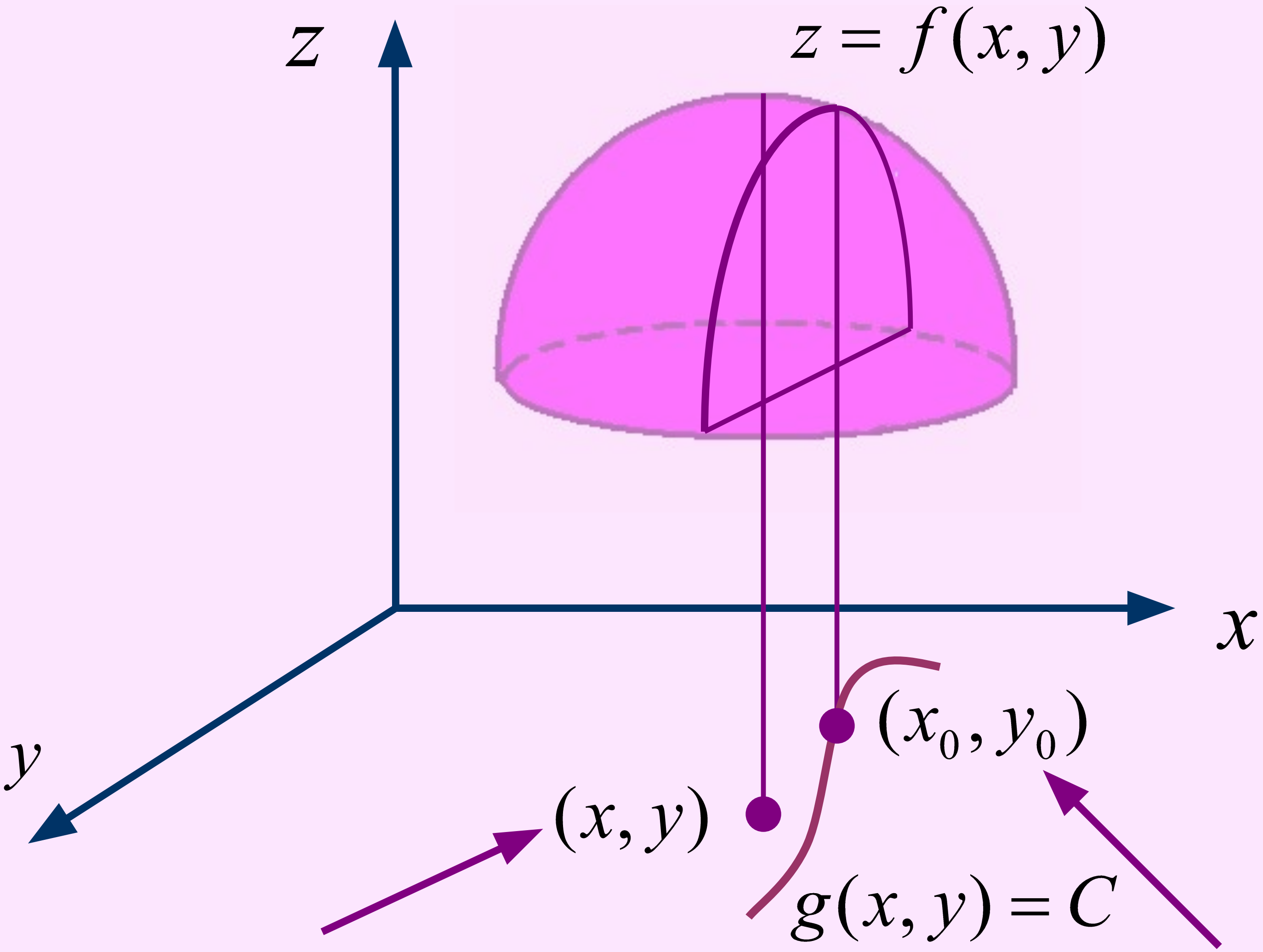
Чтобы найти условный экстремум, нужно из уравнения связи выразить одну переменную через другую:

$$y=\varphi(x).$$

Подставим это выражение в функцию двух переменных и получим функцию одной переменной:

$$z=f(x,y)=f(x,\varphi(x)).$$

Ее экстремум и будет условным экстремумом функции $z=f(x,y)$**.**



безусловный экстремум

условный экстрем

ПРИМЕР.

Найти точки максимума и минимума функции

$$z = x^2 + 2y^2$$

при условии 3x+2y=11.

РЕШЕНИЕ.

$$3x + 2y = 11 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{11 - 3x}{2}$$

$$z = x^2 + 2\left(\frac{11 - 3x}{2}\right)^2 = \frac{11}{2}\left(x^2 - 6x + 11\right)$$

$$z' = 11(x - 3)$$

$$\begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = 1 \end{cases} \quad - \quad \textit{условный минимум}$$

В этом примере связь между *x* и *y* оказалась линейной, поэтому уравнение связи легко разрешилось относительно одной из переменных.

Но в некоторых случаях это сделать довольно сложно. Поэтому в общем случае для нахождения условного экстремума используется

метод множителей Лагранж

Рассмотрим функцию трех переменных:

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\cdot(g(x,y)-C)$$

функция Лагранж

ТЕОРЕМА.

Если точка (x_0,y_0) является точкой условного экстремума функции z=f(x,y) при условии g(x,y)=C, то существует значение λ_0, такое что точка (x_0,y_0,λ_0) является точкой экстремума функции L(x,y,λ).

Следовательно, для нахождения условного экстремума функции *z=f(x,y)* при условии *g(x,y)=C*, требуется найти решение системы:

$$\begin{cases} L'_x = f'_x(x,y) + \lambda \cdot g'_x(x,y) = 0 \\ L'_y = f'_y(x,y) + \lambda \cdot g'_y(x,y) = 0 \\ L'_\lambda = g'(x,y) - C = 0 \end{cases}$$

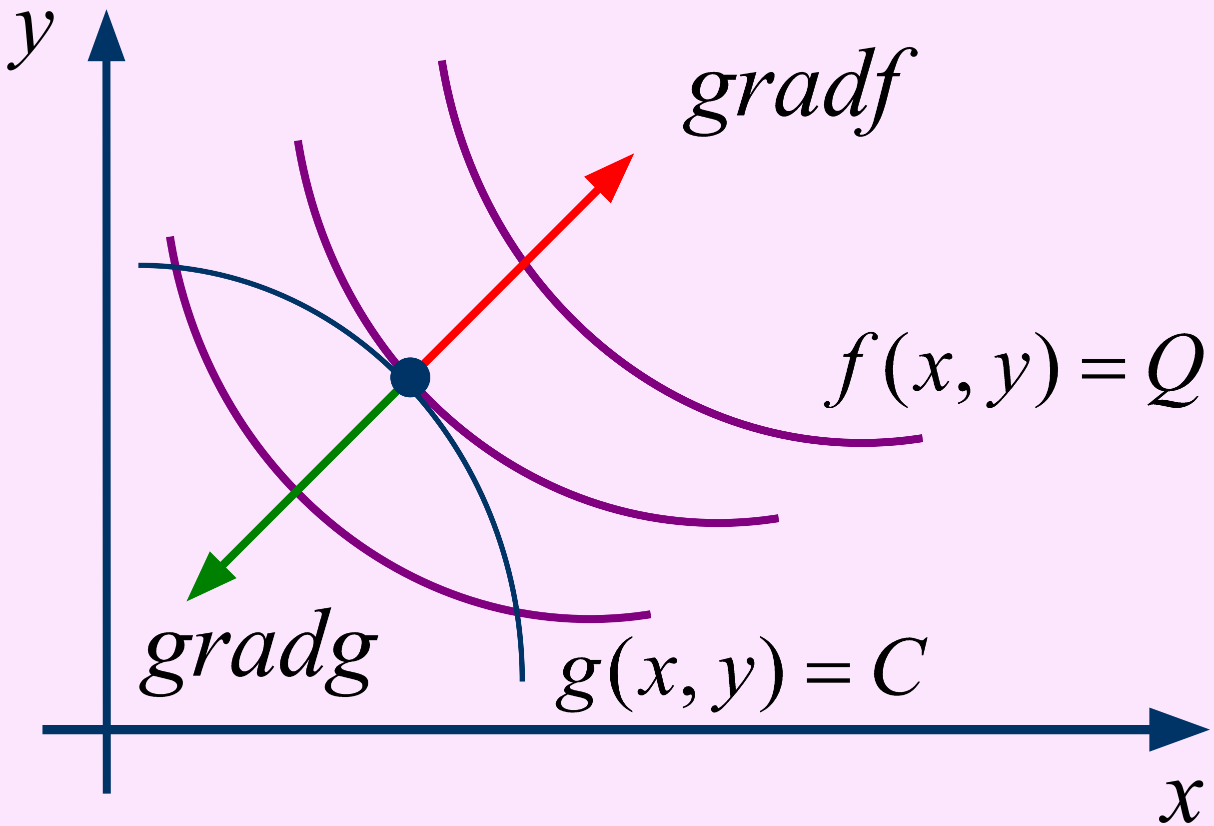
Последнее уравнение совпадает с уравнением связи.

Первые два уравнения можно записать в виде:

$$\mathrm{grad}f = -\lambda\,\mathrm{grad}g$$

То есть в точках условного экстремума градиенты функций f(x,y) и g(x,y) коллинеарны.

Рассмотрим геометрический смысл теоремы Лагранжа:



В точке условного экстремума линия уровня функции $z=f(x,y)$ касается линии $g(x,y)=C$.