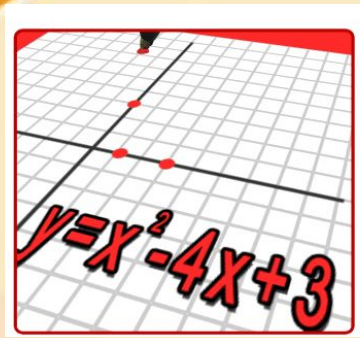
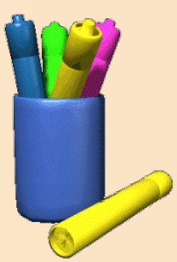


09/14/2023

Целое уравнение с параметром

Методическая разработка к учебнику Ю.Макарычева
«Алгебра-9» углубленное изучение

Драгунова Е.Ю. учитель математики МОУ СОШ № 10 г.о.Жуковский



Что такое уравнение с параметром?

- ***Решить уравнение:***

$6x-1 = x+6$

$6x-x = 6+1$

$5x = 7$

$x = 7:5$

$x = 1,4$

$5x-1 = x+5$

$4x - 1 = x + 4$

$3x – 1 = x + 3$

$ax - 1 = x + a$

Это – уравнение с параметром

Определения

- Уравнение с переменной ***x*** в котором один или несколько коэффициентов обозначены буквой, называется ***уравнением с параметром.***
- ***Параметр*** – это фиксированное ***число***, значение которого в каждом конкретном случае известно.

$$3x = 7,\ 5x = 7,\ \frac{1}{3}x = 7,\ 0x = 7$$

ax = 7

x- переменная

a- параметр

Определения

- ***Решить уравнение с параметром*** - это значит ***установить соответствие***, позволяющее для любого значения параметра решить уравнение, т. е. найти множество его корней.

Задания
в зависимости от параметра

Найти количество корней

Решить уравнение при каждом а

Вернемся к уравнению

ax - 1 = x + a – линейное уравнение

ax – x = a + 1

x(a – 1) = a + 1

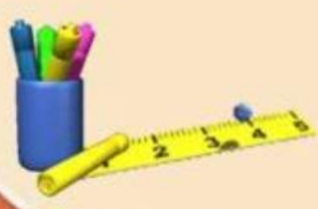
Не будем торопиться с делением на (a -1), т.к. при a = 1 выражение обращается в нуль.

Рассмотрим возможные случаи:

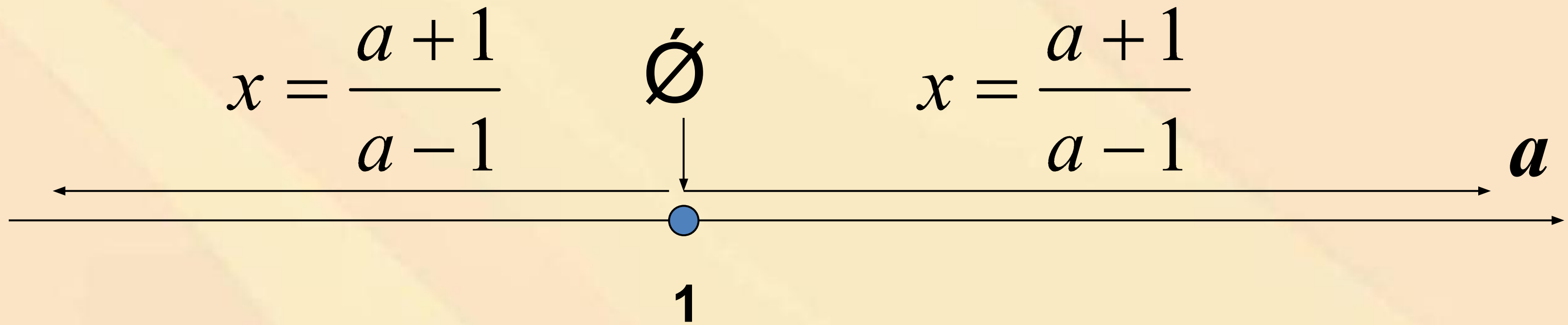
1) Если a = 1, то уравнение имеет вид 0 x = 2 и значит в этом случае данное уравнение не имеет корней.

2) Если a ≠ 1, то на (a – 1) ≠ 0 можно делить

$$x = \frac{a+1}{a-1} - \quad \text{единственный корень}$$



- На числовой прямой покажем, что мы не пропустили ни одного значения параметра ***a***, не указав при этом значения ***x***, которое соответствует данному значению ***a***



Ответ: при a = 1 корней нет;

при a ≠ 1 - $x = \frac{a+1}{a-1}$

Пример 2

09/14/2023

решить уравнение

(а-2)(а+5)х = (а+1)(а – 2)

- **Рассмотрим возможные случаи:**
- 1) *Если **а = 2**, то уравнение имеет вид **0х =0** и его решением является **любое действительное число**;*
- 2) *Если **а = -5**, то уравнение имеет вид **0х = 28** и **не имеет корней;***
- *3)Если **а ≠2** и **а ≠ -5**, то уравнение имеет **единственный корень***

$$x = \frac{(a+1)(a-2)}{(a-2)(a-5)} = \frac{a+1}{a-5}$$

$$Ответ: приa = 2 \;\; x \in R, \quad при \quad a = -5 \quad корней \quad нет$$

$$при \;\; a \in (-\infty;-5) \cup (-5;2) \cup (2;+\infty) \quad x = \frac{a+1}{a+5}$$

09/14/2023

Квадратные уравнения с параметром

Решить уравнение: $(a+4)x^2+2x(a+6)+2a+9=0$

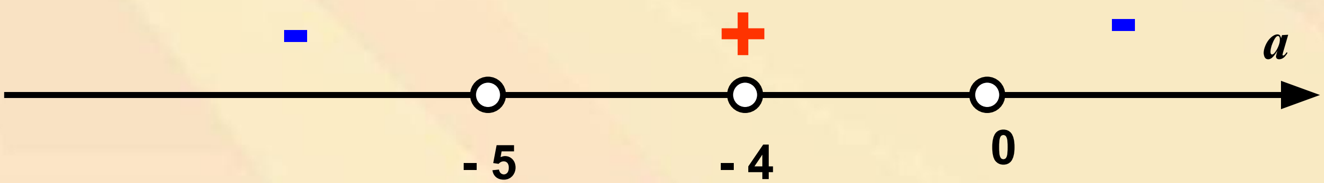
При любом ли значении а данное уравнение является квадратным?

1. Если $(a+4)=0$, то уравнение не будет квадратным

Если $a = -4$, то уравнение имеет вид: $4x+1=0$ и $x=-1/4$

2. Если $a \neq -4$, то уравнение квадратное, значит находим дискриминант

$$D=(a+6)^2-(a+4)(2a+9)=-a(a+5)$$



$При\ a \in (-\infty;-5) \cup (0;+\infty)$ $D<0 \Rightarrow$ корней нет

$При\ a=0\ или\ a=-5$ $D=0 \Rightarrow$ корень один

$При\ a \in (-5;-4) \cup (-4;0)$ $D>0 \Rightarrow$ корней два

09/14/2023

$$D=-a(a+5)$$

$$При\ \ a\in(-\infty;-5)\cup(0;+\infty)\quad D<0\Rightarrow \text{корней нет}$$

$$При\ \ a\in(-5;-4)\cup(-4;0)\quad D>0\Rightarrow \text{корней два}$$

$$x=\frac{-(a+6)\pm\sqrt{-a(a+5)}}{a+4}$$

$$При\ \ a=0\quad или\quad a=-5\quad D=0\Rightarrow \text{корень один (ддвано совпавших)}$$

$$x_1=x_2=-1{,}5\qquad\qquad x_1=x_2=1$$

$$Ответ:\ при\ \ a=-4\ \ x=-\frac{1}{4};$$

$$при\ \ a\in(-\infty;-5)\cup(0;+\infty)\ \ корней\ \ нет$$

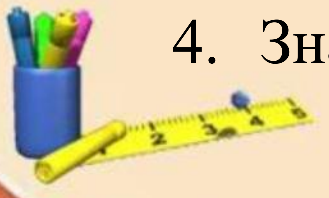
$$при\ \ a\in[-5;-4)\cup(-4;0]\quad \mathrm{x}=\frac{-(\mathrm{a}+6)\pm\sqrt{-\mathrm{a}(\mathrm{a}+5)}}{a+4}$$

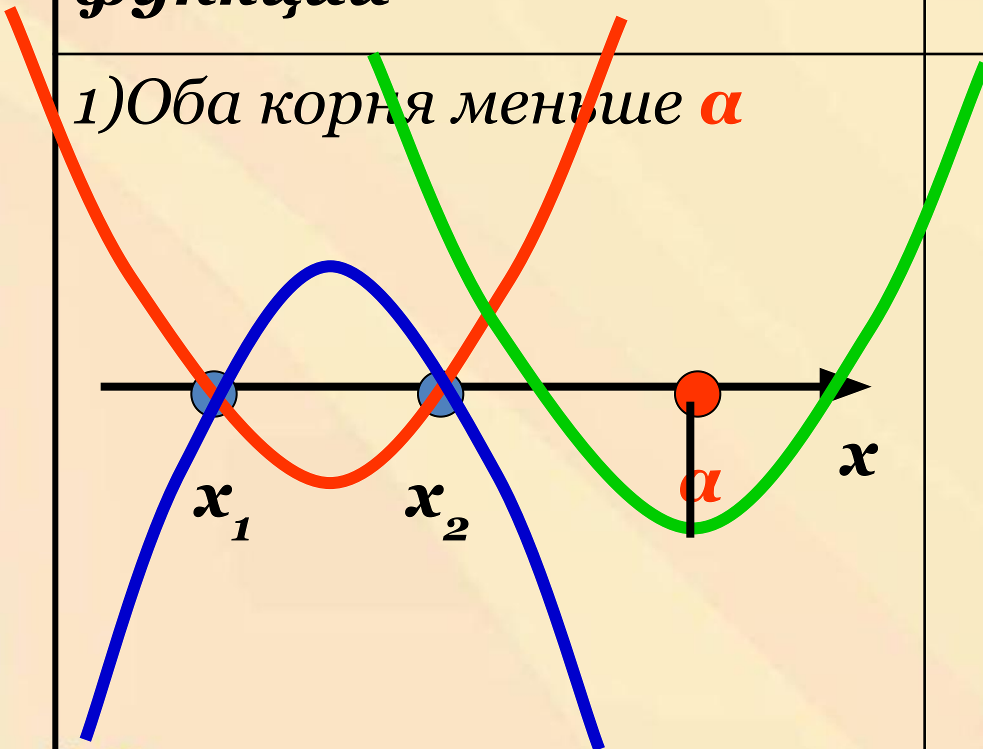
Расположение нулей квадратичной функции на координатной прямой

- *Пусть дана функция* $y = ax^2+bx + c,\ a\neq 0$
- x_1 *и* x_2 *нули этой функции (корни уравнения* $ax^2+bx + c=0$*) и* $x_2 \geq x_1$
- *Числа* α *и* β

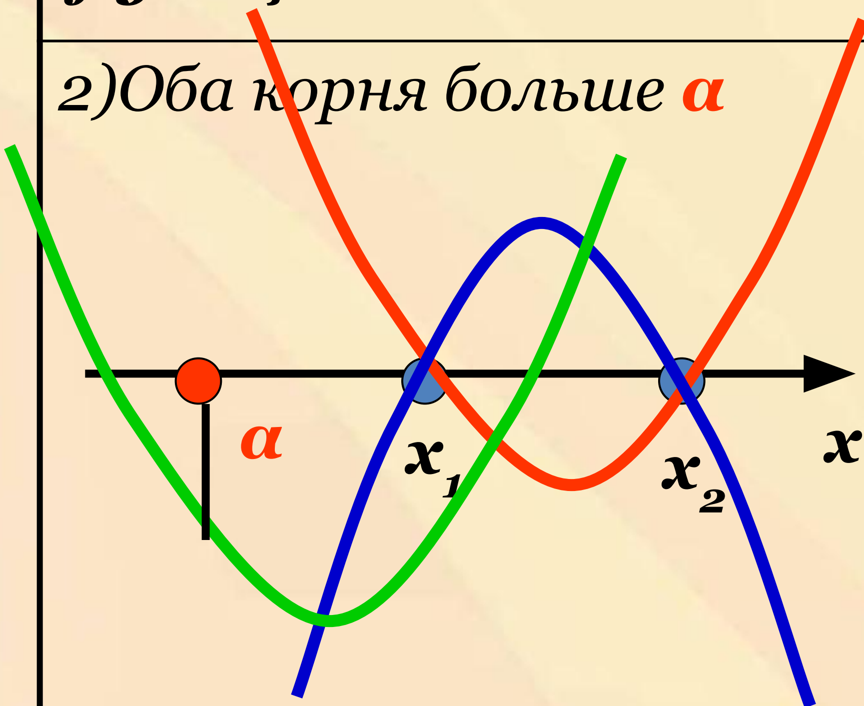
Условия, которые придется учитывать:

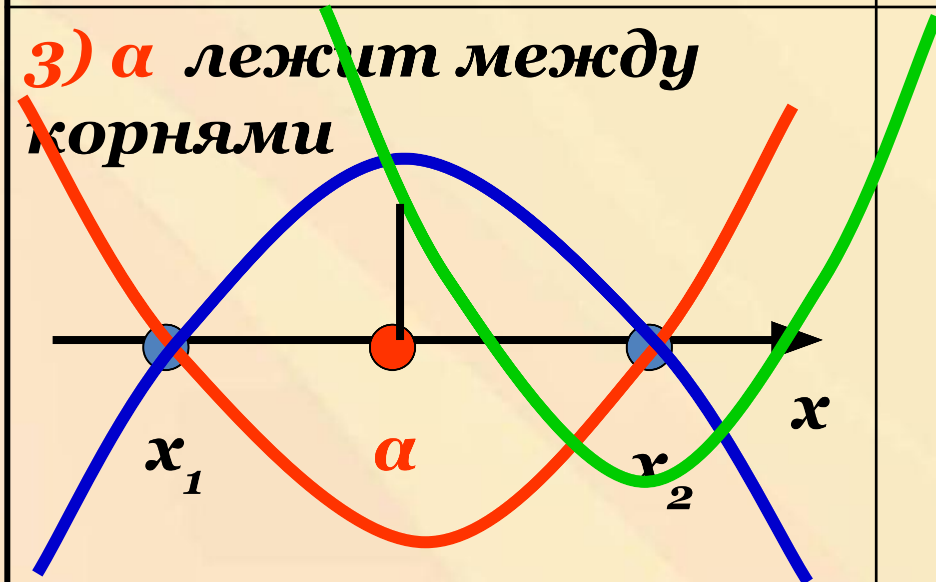
1. Знак дискриминанта (корни должны быть)
2. Формула для нахождения координат вершины параболы
3. Направление ветвей параболы
4. Знак числа f(α) и f(β)

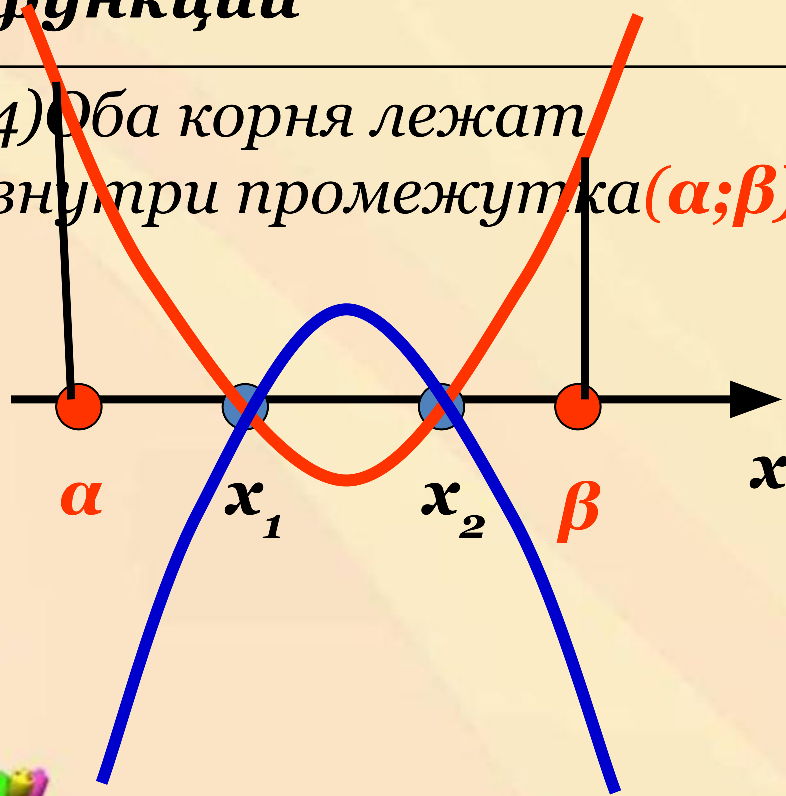


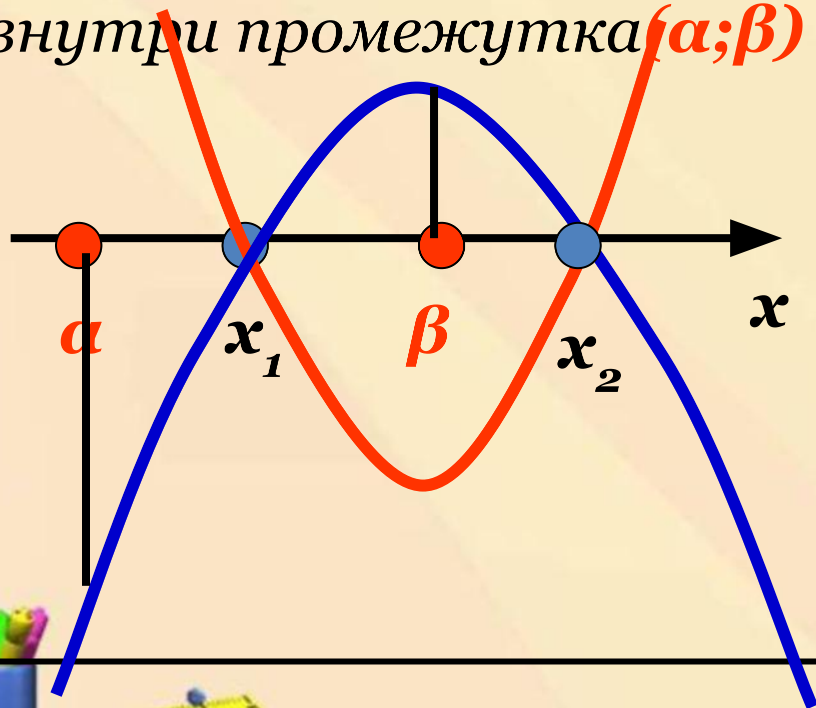
Расположение нулей квадратичной функции	Необходимые и достаточные условия
1)Оба корня меньше α 	$\begin{cases} D \geq 0 \\ x_в < \alpha \\ a \cdot f(\alpha) > 0 \end{cases}$

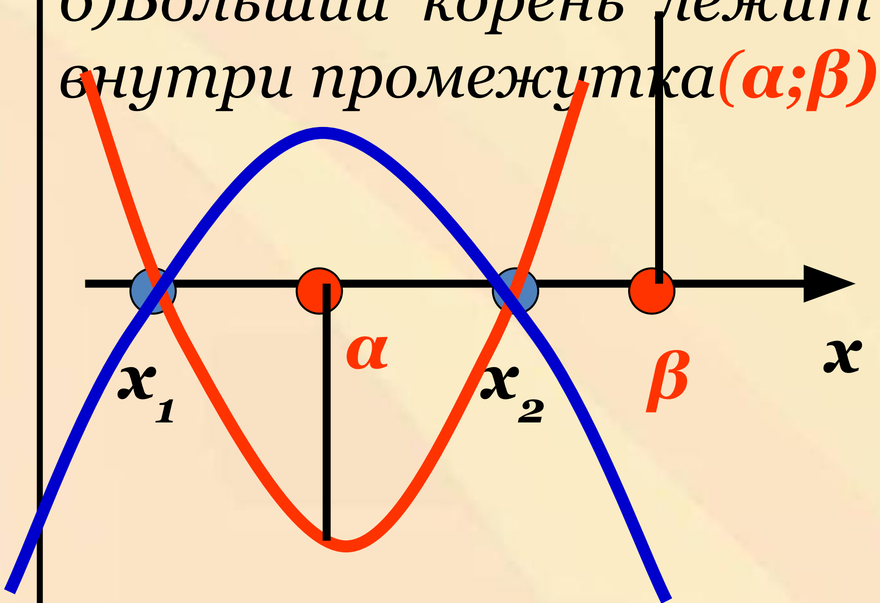
09/14/2023

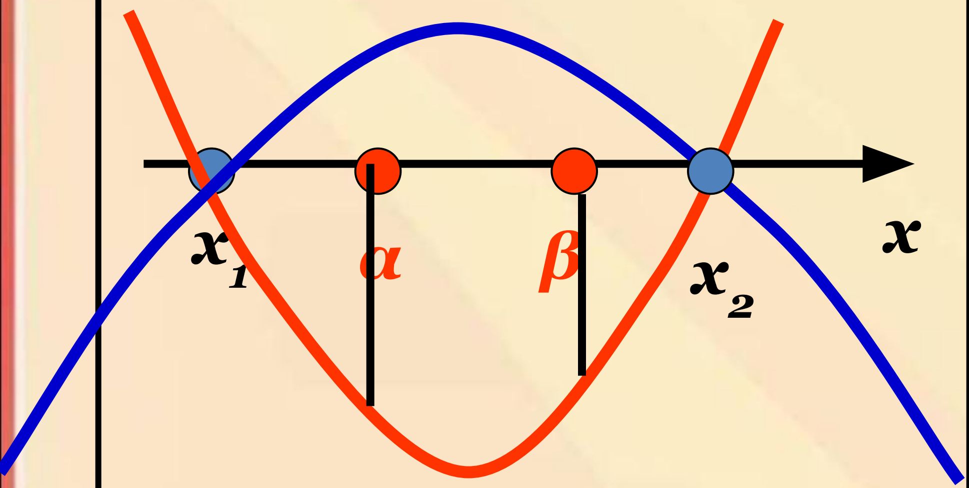
Расположение нулей квадратичной функции	Необходимые и достаточные условия
2)Оба корня больше α 	$\begin{cases} D \geq 0 \\ x_в > \alpha \\ a \cdot f(\alpha) > 0 \end{cases}$

Расположение нулей квадратичной функции	Необходимые и достаточные условия
3) α лежит между корнями 	$\begin{cases} D \geq 0 \\ a \cdot f(\alpha) < 0 \end{cases}$

Расположение нулей квадратичной функции	**Необходимые и достаточные условия**
4) Оба корня лежат внутри промежутка **(α;β)** 	$\begin{cases} D \geq 0 \\ \alpha < x_в < \beta \\ a \cdot f(\alpha) > 0 \\ a \cdot f(\beta) > 0 \end{cases}$

Расположение нулей квадратичной функции	**Необходимые и достаточные условия**
5)Меньший корень лежит внутри промежутка $(\alpha;\beta)$ 	$\begin{cases} D \geq 0 \\ a \cdot f(\alpha) > 0 \\ a \cdot f(\beta) < 0 \end{cases}$

<table>
<tr><th>Расположение нулей квадратичной функции</th><th>Необходимые и достаточные условия</th></tr>
<tr><td>6)Больший корень лежит внутри промежутка(α;β)

</td><td>$$\begin{cases} D \geq 0 \\ a \cdot f(\alpha) < 0 \\ a \cdot f(\beta) > 0 \end{cases}$$</td></tr>
</table>

Расположение нулей квадратичной функции	**Необходимые и достаточные условия**
7)Оба корня лежат вне промежутка ***(α;β)*** 	$\begin{cases} D \ge 0 \\ a \cdot f(\alpha) < 0 \\ a \cdot f(\beta) < 0 \end{cases}$

1. **Найти все значения параметра *a*, при которых решением системы является вся прямая.**

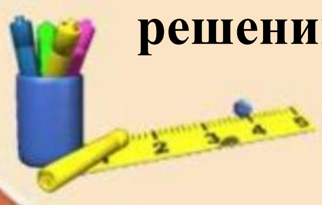
$$\begin{cases} \dfrac{x^2+ax-2}{x^2-x+1}<2, \\ \dfrac{x^2+ax-2}{x^2-x+1}>-3. \end{cases}$$

2. **При каких значениях параметра p функция определена при всех xєR ?**

$$y=\sqrt{(4-p)x^2-5x+\frac{5}{8}(1-p)}$$

3. **При каких значениях параметра а система неравенств**
   а) имеет единственное решение;
   б) не имеет решений;
   в) имеет бесконечно много решений?

$$\begin{cases} x^2-8x+15\geq 0, \\ x^2-(a+4)x+4a\leq 0. \end{cases}$$



1. Найти все значения параметра *a*, при которых решением системы является вся прямая.

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+ax-2}{x^2-x+1}<2, \\ \dfrac{x^2+ax-2}{x^2-x+1}>-3. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+ax-2}{x^2-x+1}<2, \\ \dfrac{x^2+ax-2}{x^2-x+1}>-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+ax-2-2x^2+2x-2}{x^2-x+1}<0, \\ \dfrac{x^2+ax-2+3x^2-3x+3}{x^2-x+1}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2-(a+2)x+4}{x^2-x+1}>0, \\ \dfrac{4x^2+(a-3)x+1}{x^2-x+1}>0. \end{cases}$$

Так как квадратный трехчлен $x^2-x+1=(x^2-2\cdot 0,5\cdot x+0,25)+0,75=$ $(x-0,5)^2+0,75>0$ при любом значении x, то получим систему неравенств:

Оцените знаменатель дробей.

$$\begin{cases} x^2-(a+2)x+4>0, \\ 4x^2+(a-3)x+1>0. \end{cases}$$

Решим второе неравенство системы: 09/14/2023

2.

$$4x^2 + (a-3)x + 1 > 0.$$

Решением неравенства является вся числовая прямая, если

$D < 0 \Leftrightarrow \ (a-3)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 < 0$, т. е. квадратичная функция

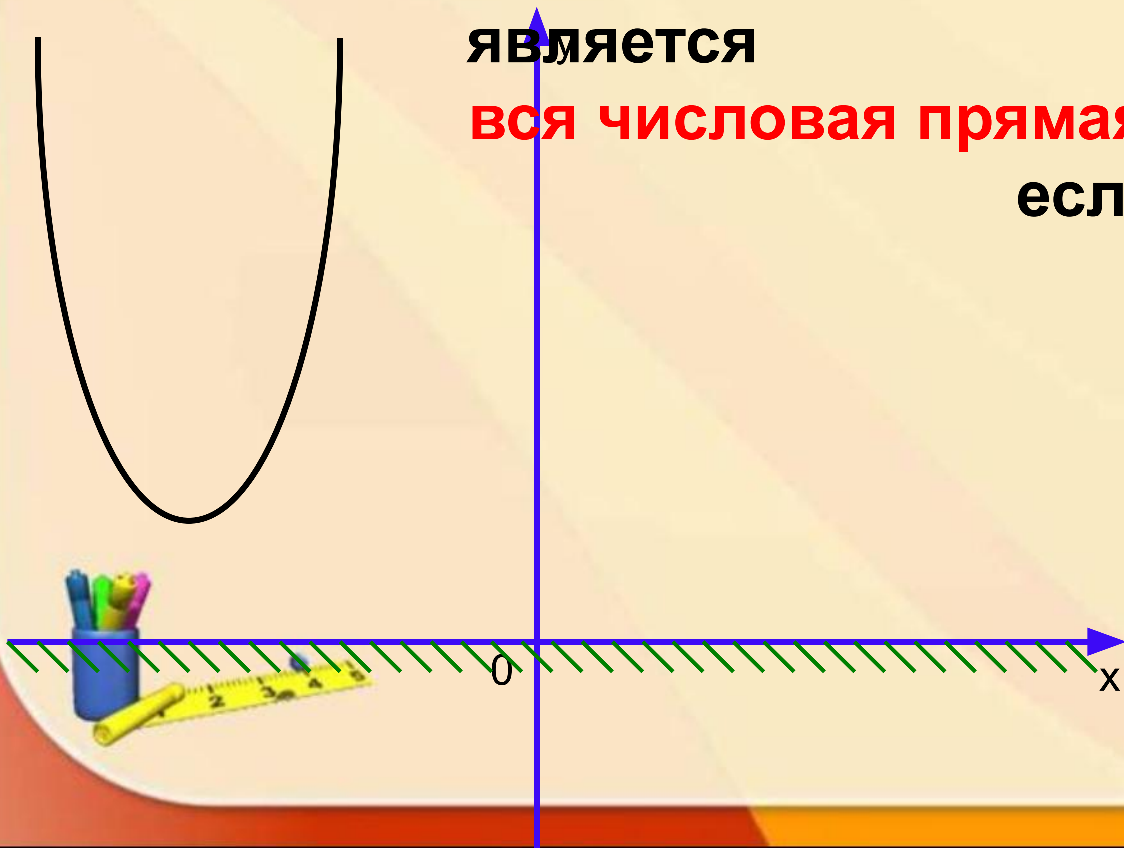
$y = 4x^2 + (a-3)x + 1$ **не пересекает ось абсцисс.**

Решением неравенства

является

вся числовая прямая,

если…



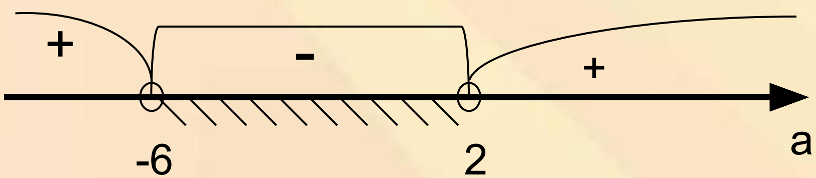
$$(a-3)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 < 0$$

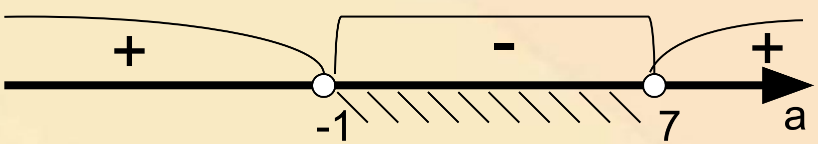
Решим систему неравенств:

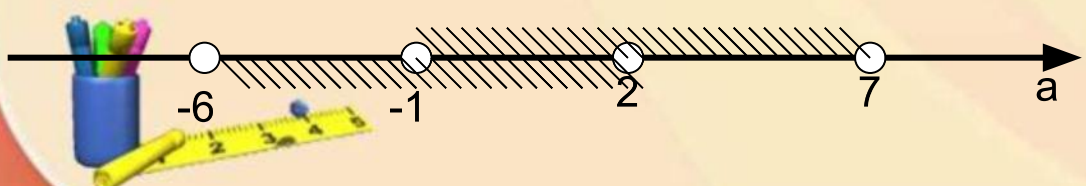
09/14/2023

$$\begin{cases}(a+2)^2-16<0,\\(a-3)^2-16<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+4a-12<0,\\a^2-6a-7<0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(a+6)(a-2)<0,\\(a+1)(a-7)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-6<a<2,\\-1<a<7.\end{cases}$$







Ответ: (-1;2).

2. При каких значениях параметра р функция определена при всех х∈R ?

09/14/2023

$$y=\sqrt{(4-p)x^2-5x+\frac{5}{8}(1-p)}$$

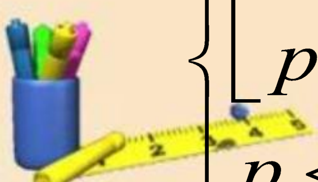
Решение.

Область определения функции - множество действительных чисел, удовлетворяющих условию… $(4-p)x^2-5x+\frac{5}{8}(1-p)\ge 0$

Какие условия должны выполняться, чтобы **решением** этого неравенства $(4-p)x^2-5x+\frac{5}{8}(1-p)\ge 0$ являлась **вся числовая прямая?**

$$\begin{cases} D\le 0, \\ 4-p>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25-4\cdot\frac{5}{8}(1-p)(4-p)\le 0, \\ p<4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p^2-5p-6\ge 0, \\ p<4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} p\le -1, \\ p\ge 6, \end{array}\right. \\ p<4 \end{cases} \Leftrightarrow \quad p\le -1.$$



Ответ:(-∞ ; -1].