Проект

10 способов решения квадратных уравнений

Творческое название проекта

Маленькие хитрости решения квадратных уравнений

ДЕВИЗ: В математике большую роль играют маленькие хитрости.

Автор проекта: Рылова Виктория
ученица 8Г класса МОУ СОШ №1
с углубленным изучением
отдельных предметов «Полифорум»

Основополагающий вопрос проекта:

«Насколько разнообразны способы решения квадратных уравнений?»

Гипотеза:

Предполагаю, что квадратные уравнения можно решить несколькими разными способами

Цель:

Изучение теоретических основ и применение на практике различных способов решения квадратных уравнений

Задачи:

1. Подобрать информацию по теме из письменных источников и сети Интернет
2. Синтезировать информацию по плану
3. Изучить различные способы решения квадратных уравнений и апробировать материал на практике

План работы:

Определение темы и цели проекта, формулирование темы исследования

Определение источника информации

Определение способа сбора и анализа информации

Определение способа представления результатов

Аннотация

Проект "Способы решения квадратных уравнений" отражает результаты исследования, проведенного мной о том, какие существуют способы решения квадратных уравнений и что из этого можно взять полезного для себя и моих друзей.

Тема проекта связана с тем, чтобы, используя способы решения квадратных уравнений можно найти неизвестное об известном.

В школьном курсе математики изучаются формулы корней квадратных уравнений, с помощью которых можно решать любые квадратные уравнения.

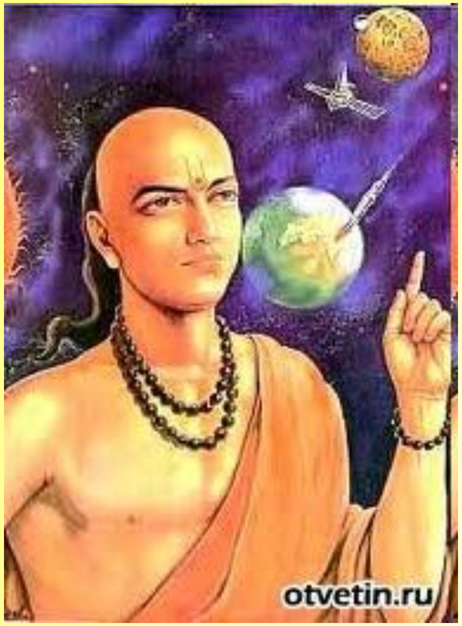
Однако имеются и другие приёмы решения уравнений, которые позволяют очень быстро и рационально решать квадратные уравнения.

Из истории квадратных уравнений

Квадратные уравнения умели решать около 2000 лет до н. э. вавилоняне. Применяя современную алгебраическую запись, можно сказать, что в их клинописных текстах встречаются, кроме неполных, и такие, например, полные квадратные уравнения:

$$x^2 + x = \frac{3}{4}, \quad x^2 - x = 14\frac{1}{2}.$$

Почти все найденные до сих пор клинописные тексты приводят только задачи с решениями, изложенными в виде рецептов, без указаний относительно того, каким образом они были найдены.



Индийский ученый Брахмагупта (VII в.), изложил общее правило решения квадратных уравнений, приведенных к единой канонической форме:

$$ax^2 + bx = c, \quad a > 0$$

В уравнении коэффициенты, кроме а, могут быть отрицательными. Правило Брахмагупта по существу совпадает с нашим.

Брахмагупта

Формулы решения квадратных уравнений были впервые изложены в книге, написанной итальянским математиком Леонардо Фибоначчи (XIIIв.). **x2 + bx = c,** при всевозможных комбинациях знаков коэффициентов b, c было сформулировано в Европе лишь в 1544 г.

Леонардо Фибоначчи

Лишь в XVII в. благодаря трудам Жирара, Декарта, Ньютона и других ученых способ решения квадратных уравнений принимает современный вид.

Я мыслю, следовательно, существую.

Декарт

Гений есть терпение мысли, сосредоточенной в известном направлении.

Ньютон

Все уравнения алгебры имеют столько решений, сколько их показывает наименование наивысшей величины.

Жирар

Все математики знали, что под алгеброй были скрыты несравненные сокровища, но не умели их найти

Виет


Различные способы решения квадратных уравнений
Разложение левой части уравнения на множители
Метод выделения полного квадрата
Метод коэффициентов
Решение квадратных уравнений по формуле
Решение уравнений с использованием теоремы Виета
Графическое решение квадратного уравнения
Решения квадратных уравнений способом «переброски»
Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки
Решение квадратных уравнений с помощью номограммы
Геометрический способ решения квадратных уравнений

1. СПОСОБ: *Разложение левой части уравнения на множители*

Решим уравнение

$x^2 + 10x - 24 = 0$.

Разложим левую часть на множители:

$x^2 + 10x - 24 =$

$=(x + 12)(x - 2)$.

Следовательно,

$(x + 12)(x - 2) = 0$

Так как произведение равно нулю, то, один из его множителей равен нулю. Поэтому левая часть уравнения обращается нуль при $x = 2$, а также при $x = - 12$. Это означает, что число 2 и $- 12$ являются корнями уравнения $x^2 + 10x - 24 = 0$.

Цель:

привести квадратное уравнение общего вида к виду $A(x)\cdot B(x)=0$, где $A(x)$ и $B(x)$ – многочлены относительно x.

Способы:

- **Вынесение общего множителя за скобки;**
- **Использование формул сокращенного умножения;**
- **Способ группировки.**

2. СПОСОБ: *Метод выделения полного квадрата.*

Суть метода: *привести квадратное уравнение общего вида к неполному квадратному уравнению.*

Решим уравнение $x^2 + 6x - 7 = 0$.

Выделим в левой части полный квадрат.

Преобразуем теперь левую часть уравнения

$x^2 + 6x - 7 = 0$, прибавляя к ней и вычитая 9. Имеем:

$x^2 + 6x - 7 =$

$= x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 9 - 9 - 7 =$

$= (x + 3)^2 - 9 - 7 = (x + 3)^2 - 16.$

Таким образом, данное уравнение можно записать так:

$(x + 3)^2 - 16 = 0,$

$(x + 3)^2 = 16.$

Следовательно, $x + 3 - 4 = 0$, *или* $x + 3 = -4$

$x_1 = 1, \qquad x_2 = -7.$

3. СПОСОБ: *Решение квадратных уравнений по формуле*

$$a = 1$$

$$b \neq 0, c \neq 0$$

$$x^2 + px + g = 0$$

D >0 2корня

D =0 1корень

D<0 Нет корней

Формулы корней:

1

$$x_{1,2} = \frac{-p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - g};$$

2

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

3

при b=2k;

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$$

4. СПОСОБ: Решение уравнений с использованием теоремы Виета.

Как известно, приведенное квадратное уравнение имеет вид

$x^2 + px + c = 0.$ (1)

Его корни удовлетворяют теореме Виета, которая при $a = 1$ имеет вид

$$\begin{cases} x_1 x_2 = q, \\ x_1 + x_2 = -p \end{cases}$$

Отсюда можно сделать следующие выводы (по коэффициентам p и q можно предсказать знаки корней).

Если ($q > 0$), то уравнение имеет два одинаковых по знаку корня и это зависти от второго коэффициента p.

Если $p < 0$, то оба корня отрицательны.

Если $p < 0$, то оба корня положительны.

5. СПОСОБ: Решение уравнений способом «переброски».

При этом способе коэффициент *а* умножается на свободный член, как бы «перебрасывается» к нему, поэтому его называют *способом «переброски»*. Этот способ применяют, когда можно легко найти корни уравнения, используя теорему Виета и, что самое важное, когда дискриминант есть точный квадрат

Решим уравнение $2x^2 – 11x + 15 = 0$.
«Перебросим» коэффициент 2 к свободному члену, в результате получим уравнение
$y^2 – 11y + 30 = 0$.
Согласно теореме Виета $y = 5$, $y = 6$, то $x_1 = 5/2$, $x = 6/2$
Ответ*:* 2,5; 3.

6. СПОСОБ: Свойства коэффициентов квадратного уравнения

Пусть дано квадратное уравнение
$ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$.

Если, $a + b + c = 0$, то

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a}$$

Если $b = a + c$, то

$$x_1 = -1, x_2 = \frac{-c}{a}$$

$$1978x^2 - 1984x + 6 = 0$$

$$x_1 = 1;$$

$$x_2 = \frac{6}{1978}$$

$$319x^2 + 1988x + 1669 = 0$$

$$x_1 = -1;$$

$$x_2 = -\frac{1669}{319}.$$

7. СПОСОБ: *Графическое решение квадратного уравнения*

преобразуем уравнение
$x^2 + px + q = 0$
$x^2 = - px - q.$
Построим графики зависимости $y = x^2$ и $y = - px - q$. График первой зависимости - парабола, проходящая через начало координат. График второй зависимости - прямая (рис.1). Возможны следующие случаи:

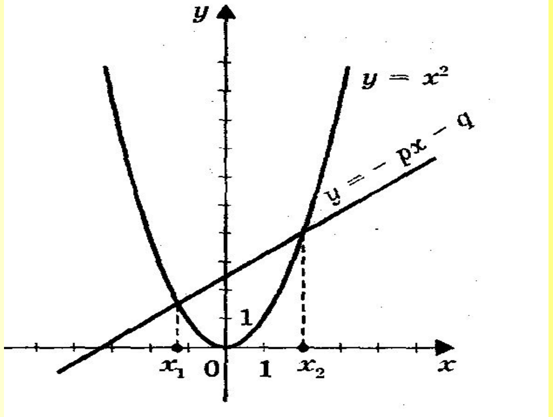


Рис. 1

Прямая и парабола могут касаться (только одна общая точка), т.е. уравнение имеет одно решение;

прямая и парабола не имеют общих точек, т.е. квадратное уравнение не имеет корней.

прямая и парабола могут пересекаться в двух точках, абсциссы точек пересечения являются корнями квадратного уравнения;

<u>8. СПОСОБ:</u> *Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки.*

$ax^2 + bx + c = 0$

Итак:

1) построим точки (центр окружности) и *A(0; 1)*;
2) проведем окружность с радиусом *SA*;
3) абсциссы точек пересечения этой окружности с осью *Ох* являются корнями исходного квадратного уравнения.

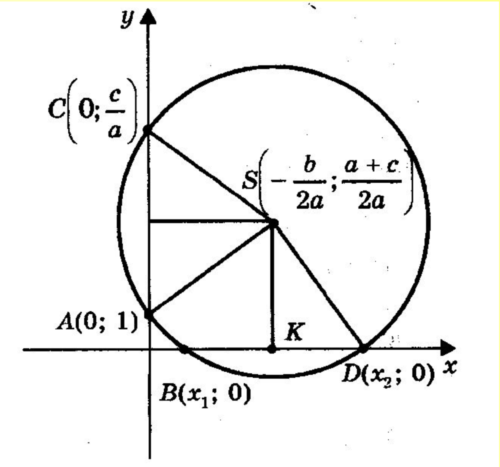


Рис. 5

При этом возможны три случая.

1)окружность пересекает ось Ох в двух точках *B(x1;0)* и *D(x2; 0)*, где *x1* и *x2* - корни квадратного уравнения *$ax^2 + bx + c = 0$*.

2)окружность касается оси Ох в точке *B(x1; 0)*, где x1 - корень квадратного уравнения.

3) окружность не имеет общих точек с осью абсцисс (рис.6,в), в этом случае уравнение не имеет решения.

9. СПОСОБ: Решение квадратных уравнений с помощью номограммы.

Таблица XXII. с.83 (см. Брадис В.М. Четырехзначные математические таблицы. - М., Просвещение, 1990).

Номограмма для решения уравнения $z^2 + pz + q = 0$. Эта номограмма позволяет, не решая квадратного уравнения, по его коэффициентам определить корни уравнения.

Криволинейная шкала номограммы построена по формулам (рис.11):

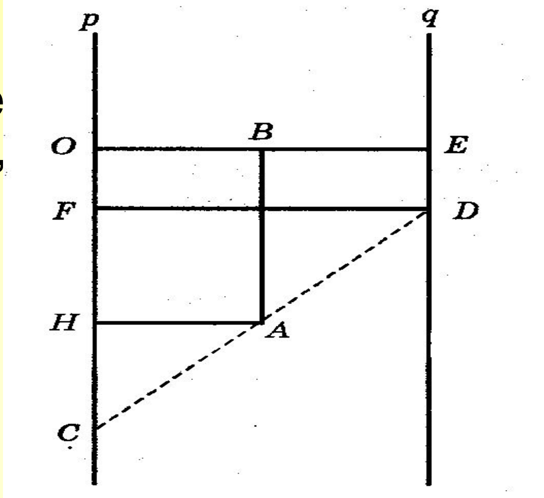


Рис. 11

$$OB = \frac{a}{1+z},\ AB = \frac{-z^2}{1+z}.$$

$$\frac{p-q}{p-AB} = \frac{a}{OB},$$

$z^2 + pz + q = 0$,

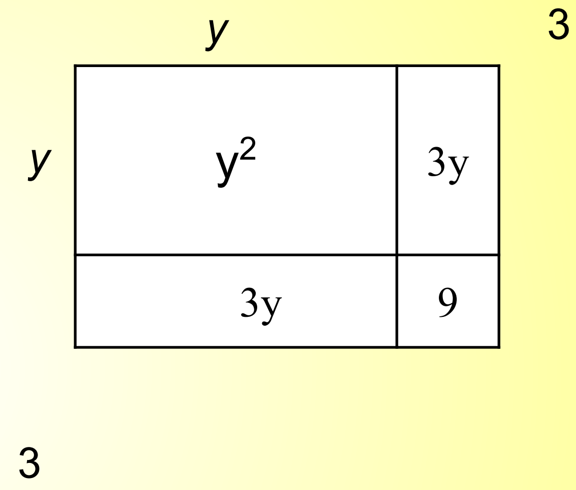
причем буква z означает метку любой точки криволинейной шкалы.

10. СПОСОБ: *Геометрический способ решения квадратных уравнений.*

Как древние греки решали уравнение $y^2 + 6y - 16 = 0$. Решение представлено на рисунке, где $y^2 + 6y = 16$,

или $y^2 + 6y + 9 = 16 + 9$.

Выражения $y^2 + 6y + 9$ и $16 + 9$ геометрически представляют собой один и тот же квадрат, а исходное уравнение $y^2 + 6y - 16 + 9 - 9 = 0$ – одно и то же уравнение. Откуда и получаем, что $y + 3 = +5$ и $y + 3 = -5$, или $y = 2$, $y_2 = -8$



Выводы:

- моя работа дает возможность по-другому посмотреть на те задачи, которые ставит перед нами математика.
- данные приёмы решения заслуживают внимания, поскольку они не отражены в школьных учебниках математики;
- овладение данными приёмами помогает мне экономить время и эффективно решать уравнения;
- потребность в быстром решении обусловлена применением тестовой системы выпускных экзаменов;

Заключение

«В математике следует помнить не формулы, а процессы мышления»

В.П.Ермаков

Благодарю за внимание