Függvényvizsgálat

A diasorozat az Analízis 2 (Mozaik Kiadó 2005.) c. könyvhöz készült.

Készítette: Dr. Ábrahám István

A függvényvizsgálat (függvénydiszkusszió) igen fontos terület.

A függvények vizsgálata egyúttal a természeti - társadalmi törvényeknek függvény alakjában megfogalmazott tulajdonságai felderítését is jelenti.

Általában a következő sorrend szerint végezzük a vizsgálatokat:

I. Az „elemi úton” meghatározható függvényjellemzők

1. Az értelmezési tartomány konkrét felírása (ha nem adták volna meg).

2. A zérushelyek, y tengelypont kiszámolása. **(Zérushely: ahol y=0; y tengelypont: ahol x=0.)**

3. A folytonosság vizsgálata. Szakadási helyek megadása.

4. Paritás vizsgálat (páros vagy a páratlan függvény, vagy egyik sem).

5. Egyéb elemi jellemzők: periodicitás, ill. más, a függvényutasítás által meghatározott speciális tulajdonságok vizsgálata.

Példa: végezzük el az $\mathbf{f:\ f(x)=\dfrac{2x^3-8x^2}{(x-4)(x-3)(x+3)}}$ függvény diszkusszióját (vizsgálatát)!

1. Az értelmezési tartomány konkrétan: $\mathbf{x\in R-\{-3\,;3\,;4\}}$. ***U.i.: a nevező nem lehet 0.***

A képlet átalakítható: $\mathbf{\dfrac{2x^2(x-4)}{(x-4)(x-3)(x+3)}=\dfrac{2x^2}{x^2-9}=g(x)}$.

A g(x) egy pont (x=4) kivételével megegyezik f(x)-szel. Így elegendő a vizsgálatot a g(x) függvényen elvégezni.

2. Zérushely (ahol y=0): $2x^2=0$, azaz $x=0$.
y tengelypont (ahol x=0, helyettesítés): y=0.

3. A nevezőt az $x=4$ helyen nullává tevő $x–4$ tényező megvan a számlálóban is, ugyanúgy első fokon. Ezen helyen a függvénynek megszűntethető szakadása van.

Ez azt jelenti, hogy ha a g(x) függvényt ábrázoljuk, akkor az f(x)-et megkapjuk, annyi eltéréssel, hogy az f(x)-nél a 4 helyen „lyuk” van a függvénygörbén.

Az $x–3$ és az $x+3$ tényező nincs meg a számlálóban, így az $x=3$ és az $x=–3$ helyeken a függvénynek nem megszűntethető szakadásai vannak.

A függvény másutt folytonos, mert folytonos függvények hányadosa (műveletttartás).

4. A g függvény páros, mert $g(–x)=g(x)$. (**Az ábrázolásnál ezt az információt jól ki lehet használni.**)

5. Egyéb jellemző közvetlenül nem látszik, nem keressük.

II. Helyi szélsőérték, monotonitás vizsgálat

A vizsgálathoz az első és a második deriváltakat használjuk fel:

$$g'(x)=\frac{4x(x^2-9)-2x\cdot 2x^2}{\left(x^2-9\right)^2}=\frac{-36x}{\left(x^2-9\right)^2}. \qquad g''(x)=\frac{108x^2+324}{(x^2-9)^3}.$$

Helyi szélsőérték ott lehet, ahol $g'(x)=0$, azaz $–36x=0$, $x=0$.

Mivel $g''(0)<0$, tehát az $x=0$ pontban van helyi szélsőérték és ez maximum.

Ebben a pontban a függvényérték is 0. Eredményünk írható így is: $P_{max}(0;0)$.

Másutt nincs helyi szélsőérték, mert ha lenne, az a deriválásos módszerünk kimutatná.

Monotonitási szakaszok

1. A szakaszhatárokat általában a helyi szélsőértékek, illetve a nem megszűntethető szakadási helyek adják.

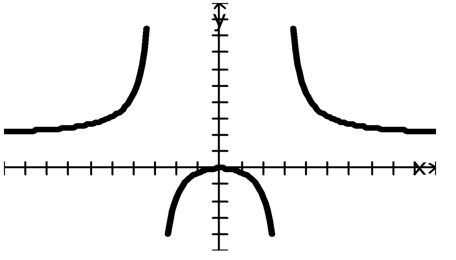
2. Az adott szakaszon a monotonitást legtöbbször az első derivált előjelével vizsgáljuk: ha az $f'(x) \geq 0$ a szakaszon, akkor az $f(x)$ növekvő, ha pedig $f'(x) \leq 0$, akkor az $f(x)$ csökkenő.

Így: a $]-\infty; -3]$ intervallumon $g'(x)>0$, tehát $g(x)$ növekvő.

A $[-3; 0]$ szakaszon $g'(x)>0$, a $g(x)$ itt is nő.

Elegendő egy konkrét szakaszbeli pontban megvizsgálni a derivált előjelét. Az is belátható, hogy minden negatív x esetén a g' pozitív (kivéve az x=–3-at).

A függvény páros volta miatt az y tengelyre szimmetrikusan minden hasonlóan történik. Az eddig megtalált jellemzőkkel vázolhatjuk a függvény gráfját:



III. Inflexiós pontok, görbületi szakaszok meghatározása

Ott lehet inflexiós pont („görbületváltási hely”), ahol a második derivált értéke 0.

Akkor van ezen a helyen inflexiós pont, ha a harmadik derivált itt nem 0,

vagy: ha a második derivált ebben a pontban előjelet vált.

Általában az egyszerűbben végrehajtható módszert célszerű választani.

Mivel a második derivált $(108x^2+324) \neq 0$, ezért a függvénynek nincs inflexiós pontja.

Görbületi szakaszok

1. A szakaszhatárok kijelölése: általában az inflexiós pontok és a nem megszűntethető szakadási helyek jelölik ki a szakaszhatárokat.

2. Az adott szakaszon a görbületet a második derivált előjele határozza meg: ha az f''(x) ≥ 0, akkor konvex, ha az f''(x) ≤ 0, akkor konkáv az eredeti függvény az adott szakaszon.

Így: a]–∞; –3[intervallumon g''(x)>0, tehát g(x) konvex.

A]–3; 3[szakaszon g''(x)<0, azaz g(x) konkáv.

A]3; ∞ [intervallumon g''(x)>0, tehát g(x) konvex.

Ez az információ nem mond ellent az eddig megismert jellemzőknek.

IV. Határértékek

A határértékeket az ÉT „szélein" vizsgáljuk, azaz általában a + vagy – végtelenben, illetve a nem megszűntethető szakadási helyeken. Esetünkben:

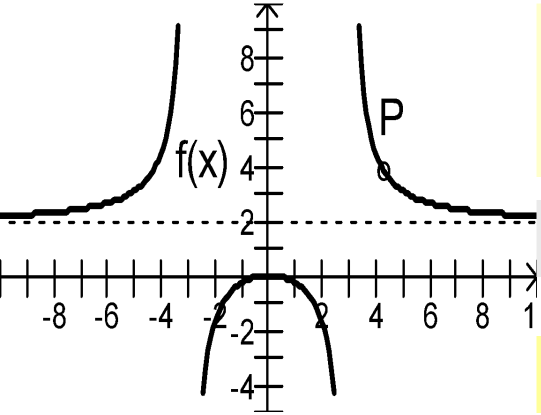
$$\lim_{-\infty} f(x) = \lim_{-\infty} \frac{2x^2}{x^2-9} = 2, \text{ és } \lim_{\infty} f(x) = 2. \quad \lim_{-3-0} \frac{2x^2}{x^2-9} = \infty, \lim_{-3+0} \frac{2x^2}{x^2-9} = -\infty. \quad \lim_{+3-0} \frac{2x^2}{x^2-9} = -\infty, \lim_{+3+0} \frac{2x^2}{x^2-9} = \infty.$$

A határérték vizsgálatot a –3-nál és a 3-nál nem kötelező elvégezni, hiszen ha például –3-ig állandóan nő a (folytonos) függvényünk, akkor itt a baloldali határérték csak végtelen lehet.

V. A függvénygörbe felrajzolása, értékkészlet megadása

Az I–IV. pontbeli információkból jó pontossággal felrajzolható a függvény gráfja.

Az értékkészlet leolvasásában, megadásában a pontos rajz ad nagy segítséget:



A rajz készítésekor a vázlatunkat pontosítottuk, ehhez a függvénygörbén néhány „hitelesítő” pontot számolunk ki.
Például: P(–4; 2,94), P(–2; –1,6), P(–1; –0,25).

A függvénygörbe az $x=4$ helyen „lyukas” (szakadási pont).

Az értékkészlet: $y > 2$ és $y \le 0$.

A függvényvizsgálat egyes lépéseit, eredményeit megjeleníthetjük táblázatos formában is, például így:

	$x < -3$	$-3 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 3$	$x > 3$
g'	+	+	0	–	–
g''	+	–	–	–	+
g	nő konvex	nő konkáv	H.max. Ért.: 0	csökk. konkáv	csökk. konvex

Előfordul, hogy egyéb jellemzőkre is kíváncsiak vagyunk, mint például a függvény aszimptotái, a töréspontbeli bal- és jobboldali differenciál hányadosok, vagy egy-egy pontban a bal- és jobboldali folytonosság.

A speciális jellemzőket külön kérésre megadhatjuk, viszont a függvényvizsgálatot a fenti I–V. pontbeli teendők teljesítésével teljesnek tekinthetjük.

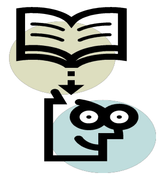
A gyakorlati problémáknál előfordul, hogy a feladathoz rendelt függvény vizsgálatánál nem kell teljes diszkussziót végeznünk, elegendő általában csak a helyi szélsőértékek, vagy a görbületek meghatározása.

Az eljárás ilyenkor a bemutatottal lényegében azonos.

Gyakorló feladat

Diszkutáljuk a következő függvényt: $f: f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+1}.$

Emlékeztetőül a vizsgálat javasolt lépései:



I. Az „elemi úton” meghatározható függvényjellemzők

II. Helyi szélsőérték, monotonitás vizsgálat

III. Inflexiós pontok, görbületi szakaszok meghatározása

IV. Határértékek

V. A függvénygörbe felrajzolása, értékkészlet megadása

Megoldás

I. Értelmezési tartomány lehet: $x\in R$. Zérushely: $x=1$. y tengelypont: $y=1$. Szakadás nincs.

II. Deriválások: $f'(x)=\dfrac{2(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$, $f''(x)=\dfrac{-4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$.

Az $f'=0=(x-1)(x+1)$, azaz: $x_1=1$ és $x_2=-1$.

Az $f''(-1)<0 \Rightarrow P_{max}(-1;2)$, és $f''(1)>0 \Rightarrow P_{min}(1;0)$.

Monotonitási szakaszok: $]-\infty;-1]$: $f'(x)>0 \Rightarrow$ f(x) növekvő. $[-1;1]$: $f'(x)<0 \Rightarrow$ f(x) csökkenő.

$[1;\infty[$: $f'(x)>0 \Rightarrow$ f(x) növekvő.

III. Görbület, inflexió: ott lehet, ahol $f''(x)=0$. Ebből: $x_3=0$, $x_4=-\sqrt{3}$, $x_5=\sqrt{3}$.

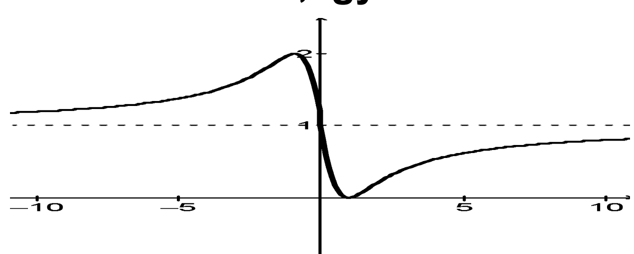
A görbületi szakaszok: $\left]-\infty;-\sqrt{3}\right]$ $f''>0 \Rightarrow f(x)$ konvex, $\left[-\sqrt{3};0\right]$ $f''<0 \Rightarrow f(x)$ konkáv.

$\left[0;\sqrt{3}\right]$ $f''>0 \Rightarrow f(x)$ konvex, $\left[\sqrt{3};\infty\right[$ $f''<0 \Rightarrow f(x)$ konkáv.

Az x_3, x_4, x_5 helyek mindegyikénél görbületváltás volt, így mindhárom helyen inflexiós pont van.

IV. Határérték: $\lim\limits_{\pm\infty} f(x)=1.$

V. Értékkészlet, rajz: ÉK: $0\le y\le 2$.



A vizsgálat egyes lépéseit táblázatba is foglalhatjuk.

„Szöveges” szélsőérték feladatok

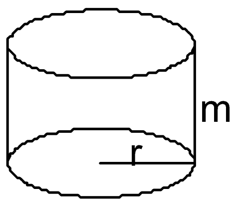
Gyakori, hogy a vizsgálandó függvény matematikai alakját nekünk kell „előállítanunk” a feladat szövegéből és csak néhány függvényjellemzőt (általában szélsőértéket) kell számolni.

A függvényjellemzőket a szöveges (gyakorlati) feladatok esetén általában bizonyos induló feltételek (például a változó csak pozitív szám lehet) mellett keressük.

Így ezeket a feladatokat szokták feltételes szélsőérték feladatoknak is nevezni.

Induló feltételeket nemcsak szöveges feladatokhoz lehet adni.

Példa: a henger alakú, 1 liter térfogatú testek közül melyik a legkisebb felszínű?



V=1 liter=1 dm^3.

A megoldás lépései

1. Eldöntjük, hogy mire keresünk szélsőértéket. **Ez most a henger felszíne.**

2. Egyenletet írunk fel a keresett szélsőértékre. **$F=2T+P=2r^2\pi+2r\pi\cdot m$.**

3. Egyváltozóssá tesszük a felvett függvényt. **Az adatok felhasználásával:**

Tudjuk: $V=T\cdot m=2r^2\pi m$ és V=1, így $m=\frac{1}{r^2\pi}$. Helyettesítés után: $F=2r^2\pi+\frac{2}{r}$.

4. Szélsőérték keresés. **A függvényvizsgálatnál látott módon. Feltétel: r>0.**

$F'=4r\pi-\frac{2}{r^2}$. $F''=4\pi+\frac{4}{r^3}$. **Ott lehet szélsőérték, ahol F’=0:** $4r\pi-\frac{2}{r^2}=0$, azaz $r^3=\frac{1}{2\pi}$.

Tehát r≈0,542. Mivel F”(0,542)>0, ezért ezen a helyen minimum van.

5. Válasz a szövegben feltett kérdésre. **r≈5,42 cm, m≈10,84 cm, F_{min}≈5,54dm^2.**

Megjegyzések

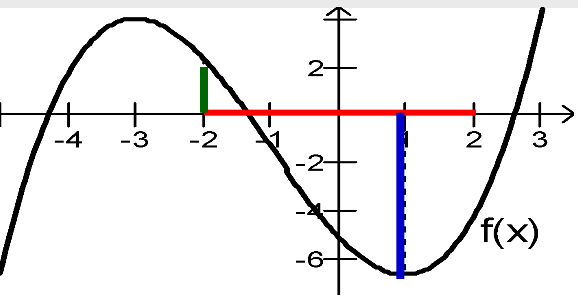
1. Globális és lokális szélsőérték

Egy függvény helyi szélsőértéke nem mindig esik egybe az értelmezési tartományon vett legnagyobb, illetve legkisebb függvényértékekkel, az abszolút (globális) szélsőértékekkel.

Példa: adjuk meg az $f(x)=\frac{x^3}{3}+x^2-3x-5$ szélsőértékeit a [–2; 2] intervallumon.

Ha elvégeztük a teljes függvényvizsgálatot, akkor a leszűkített értelmezési tartományú függvényre vonatkozó információkat már egyszerű megadni.

A függvény gráfját korábban már felvettük:



A függvény folytonos, így a [–2; 2] intervallumon a legnagyobb értékét –2-nél veszi fel, értéke itt≈2,3, ami nem helyi szélsőérték.

A legkisebb érték ez esetben a helyi szélsőérték pontban van.

Ha viszont a függvényünket a [–10; 2] szakaszon vizsgálnánk, akkor a legkisebb függvényérték már nem x=1-nél lenne, hiszen x=–10-nél y≈– 208,33.

2. Függvényvizsgálat az n-edik deriváltak (n>3) felhasználásával

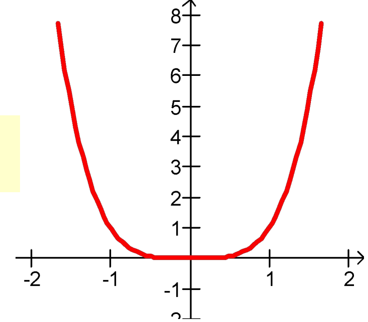
Példa: adjuk meg az $f(x)=(x–1)^4$ helyi szélsőértékeit és inflexiós pontjait!

Deriválások, zérushelyek: $f'(x)=4(x-1)^3$, $f'(x)=0$, $x_o=1$, itt lehet szélsőérték.

$f''(x)=12(x-1)^2$, $f''(1)=0$. Nincs szélsőérték.

$f'''(x)=24(x-1)$, $f'''(1)=0$. Inflexiós pont sincs?

Ismert viszont az $f(x)=(x-1)^4$, a negyedfokú parabola képe:



A függvénynek **minimuma** van $x=0$-nál.

A deriválásokkal ilyen esetekben is elvégezhető a vizsgálat.

A szabály: ha a függvény deriváltjai az x_o helyen az n-edik deriváltig nullák, de az n+1-edik derivált ezen a helyen már nem nulla, akkor:

Ha az n páratlan, a függvénynek az x_o pontban helyi szélsőértéke van, amelynek minősége: ha az $f^{(n+1)}(x_o)>0$, akkor minimum, ha az $f^{(n+1)}(x_o)<0$, akkor maximum.

Ha az n páros, akkor a függvénynek az x_o pontban inflexiós pontja van.

A példánk megoldása: az f(x) esetén: $f'''(1)=0$, de $f^{(4)}(x)=24$, így $f^{(4)}(1)\neq 0$.

Az $x=1$ pontban tehát f(x)-nek helyi szélsőértéke van és: $f^{(4)}(1)>0$, így a szélsőérték minimum.

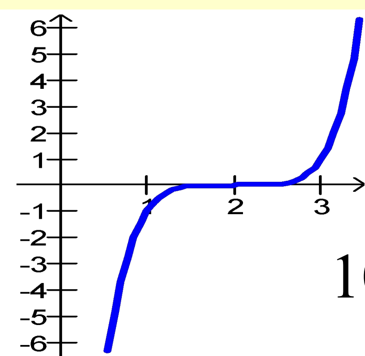
Példa: keressük a $g(x)=(x-2)^5$ függvény helyi szélsőértékeit és inflexiós pontjait.

Deriválások: $g'(x)=5(x-2)^4$, $g''(x)=20(x-2)^3$, $g'''(x)=60(x-2)^2$, $g^{(4)}(x)=120(x-2)$, $g^{(5)}(x)=120$.

A negyedik deriválttal bezárólag az $x=2$ pontban az összes derivált értéke 0.

De az ötödik derivált nem nulla, így a $g(x)$-nek az $x=2$ pontban inflexiós pontja van.

A függvény gráfja hasonlít a harmadfokú függvény (jobbra 2-vel eltolt) képéhez.



A kétváltozós függvények szélsőértékei

Az f(x;y) függvény szélsőérték keresése az egyváltozós f(x) függvény vizsgálatával analóg.

Tétel: az f(x; y)-nak ott lehet szélsőértéke, ahol az első parciális deriváltak nullák:

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= 0 \\ f'_y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Az egyenletrendszernek $P_o(x_o;y_o)$ legyen a megoldása.

A P_0 pontban akkor van szélsőérték, ha a második deriváltakból képezett:

$D = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - \left(f''_{xy}\right)^2$ kifejezés a $P_o(x_o;\, y_o)$ pontban pozitív: $D(x_o;\, y_o)>0$.

A szélsőérték minősége: ha $f''_{xx}(x_0;y_0) > 0$, akkor helyi minimum,

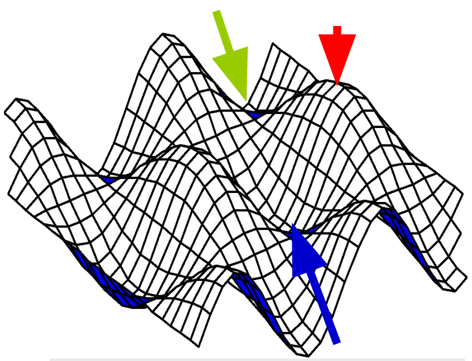
ha $f''_{xx}(x_0;y_0) < 0$, akkor helyi maximum van P_0-ban.

Ha pedig $D(x_o;\, y_o)<0$, akkor a függvénynek nyeregpontja van a P_o pontban.

(Ha $D(x_o;\, y_o)=0$, akkor más, további – nem részletezett – vizsgálatra van szükség.)

A kétváltozós függvény helyi maximuma a függvénynek megfelelő felületen általában „hegycsúcs-szerű" kiemelkedés, a minimum pedig „bemélyedés".

A nyeregpont szemléletes kifejezés, egyik irányú síkmetszete a felületnek maximumot ad az illető pontban, a másik irányú síkmetszet gráfján ebben a pontban minimum lesz.



f: f(x;y)=sin2xcosy

A felület a nyeregpontban a „ló nyergéhez" hasonló.

Példa: adjuk meg az $f(x;y)=x^3+x^2y+2y^3+4y^2-3$ helyi szélsőértékeit és nyeregpontjait!

Megoldás: a szükséges feltétel: $\left.\begin{aligned} f'_x &= 3x^2+2xy=0 \\ f'_y &= x^2+6y^2+8y=0 \end{aligned}\right\}$

Az egyenletrendszer megoldásánál ügyeljünk arra, hogy a gyökvesztést elkerüljük!

Az első egyenletből: $x(3x+2y)=0$, azaz $x=0$, vagy $3x+2y=0$.

Ha $x=0$, akkor a második egyenlet: $6y^2+8y=0$, azaz $2y(3y+4)=0$. Így: $P_1(0;0)$ és $P_2(0;-1{,}33)$.

Ha az első egyenletben $3x+2y=0$, azaz $y=-1{,}5x$, ezt helyettesítve a második egyenletbe újabb megoldást is kapunk:

$$x=\frac{24}{29} \text{ és } y=\frac{-36}{29}, \text{ így: } P_3\left(\frac{24}{29};-\frac{36}{29}\right).$$

Az elegendő feltételhez elkészítjük a második deriváltakat: $f''_{xx}=6x+2y,\ f''_{xy}=2x,\ f''_{yy}=12y+8.$

Ezután a $D(x;y)$ előjelét vizsgáljuk a P_i pontokban: $D(P_1)=f''_{xx}(0;0)\cdot f''_{yy}(0;0)-\left(f''_{xy}(0;0)\right)^2=0.$

Mivel a $D(P_1)=0$, ezért más vizsgálat szükséges. A függvényérték ebben a pontban -3.

$D(P_2)=\left(6\cdot 0+2\cdot\frac{-4}{3}\right)\left(12\cdot\frac{-4}{3}+8\right)-(2\cdot 0)^2=\frac{64}{3}.$ **A $D(P_2)>0$, ezért a P_2 pontban szélsőérték van.**

$f''_{xx}(P_2)<0$, **ezért a szélsőérték maximum, értéke (az eredeti f(x; y)-ba helyettesítünk):** $-\frac{17}{27}$.

A P_3 pontra: $D(P_3)<0$, azaz ebben a pontban nyeregpont van.

A fejezet tárgyalását befejeztük.