



# ЕЛЕКТРИКА І МАГНЕТИЗМ

## Електронний курс лекцій

Укладач: Данилов  
А.Б.



# Лекція 15

## Теорема Гаусса та її застосування.

Всі науки можна класифікувати  
на дві групи:

1. Фізика.
2. *Колекціонування марок.*

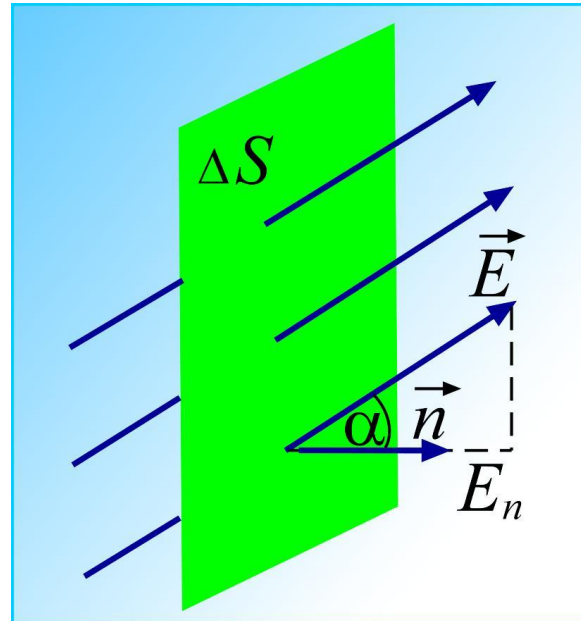
*Ернест Резерфорд*

# План лекції

- Потік вектора напруженості електричного поля.
- Теорема Остроградського-Гаусса.
- Застосування теореми Остроградського-Гаусса до розрахунку електричних полів.
- Теорема Гаусса у диференціальній формі.
- Робота сил електростатичного поля.

Лекція 15  
Теорема Гаусса

Потік вектора  $\vec{E}$



*Потік вектора  $E$  крізь площадку  $\Delta S$*

$$\Delta\Phi_E = E \Delta S \cos \alpha = E_n \Delta S$$

Лекція 15  
Теорема Гаусса

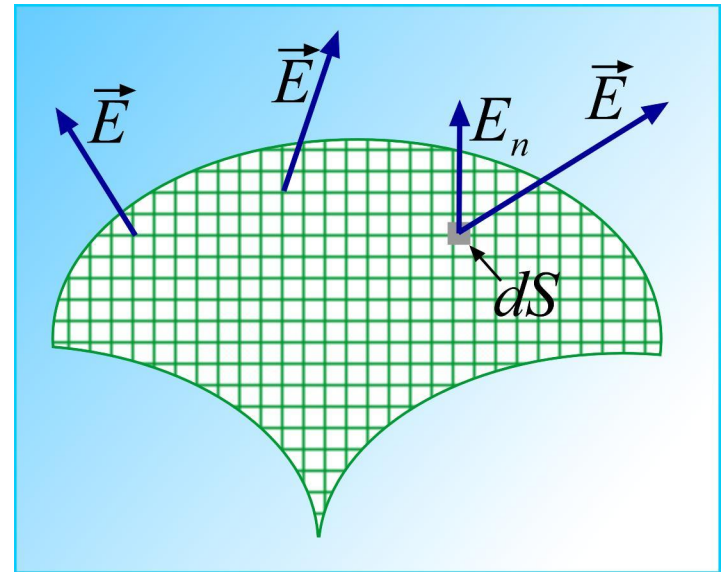
*Потік вектора  $E$*

Елементарний електричний потік

$$d\Phi_E = E_n dS$$

Повний потік крізь поверхню  $S$

$$\Phi_E = \int_S E_n dS$$



**Лекція 15**  
**Теорема Гаусса**

*Теорема Гаусса*



*Гаусс Карл Фрідріх,  
(1777-1855)*

*Німецький математик і фізик.  
Роботи з алгебри, теорії чисел,  
диференціальної геометрії і теорії  
чисел, електрики і магнетизму,  
астрономії.*

Лекція 15  
Теорема Гаусса

Теорема Гаусса

*Потік вектора напруженості  $\Phi_E$  електростатичного поля у вакуумі крізь довільну замкнену поверхню  $S$  зсередини назовні дорівнює алгебричній сумі тих точкових зарядів, які охоплюються поверхнею  $S$ , поділений на електричну сталу  $\epsilon_0$ .*

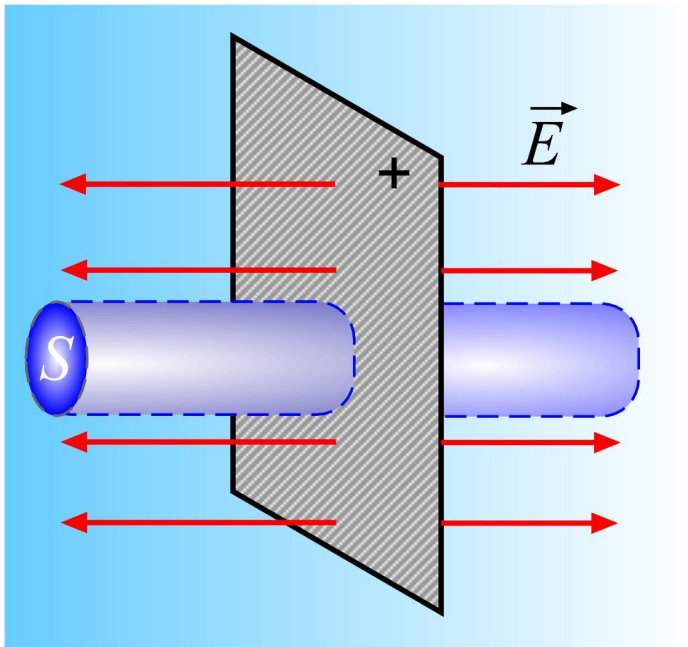
$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i$$



Лекція 15  
Теорема Гаусса

Приклади  
розрахунку полів за  
Гауссом

*Напруженість поля нескінченної площини*

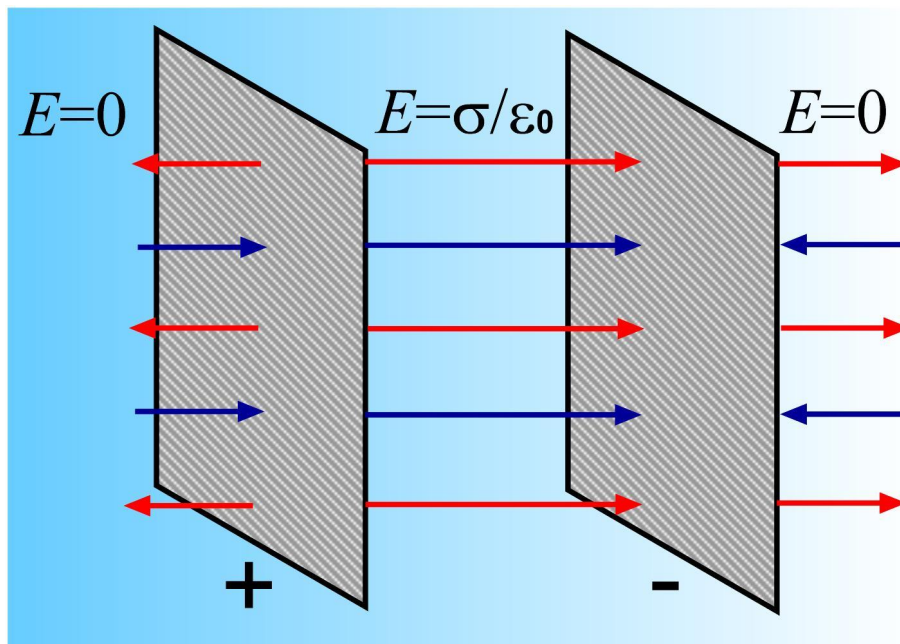


$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Лекція 15  
Теорема Гаусса

Приклади  
розрахунку полів за  
Гауссом

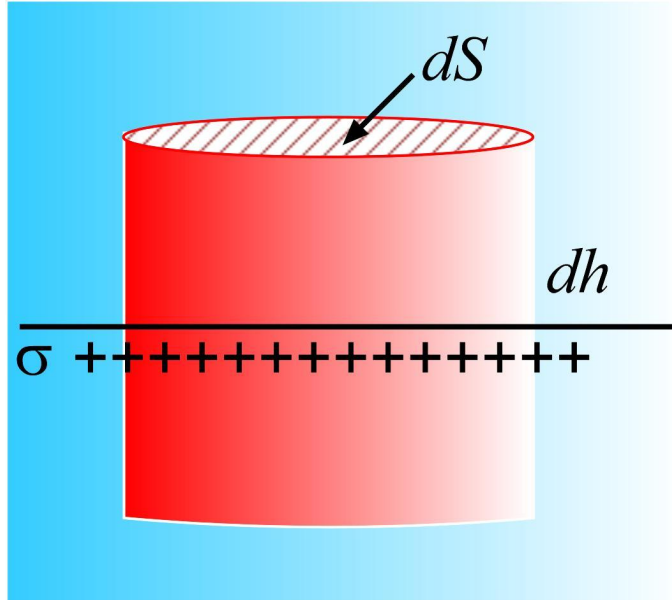
Напруженість поля  
двох різнойменно заряджених  
площин



Лекція 15  
Теорема Гаусса

Приклади  
розрахунку полів за  
Гауссом

*Напруженість поля  
поблизу поверхні зарядженого провідника*

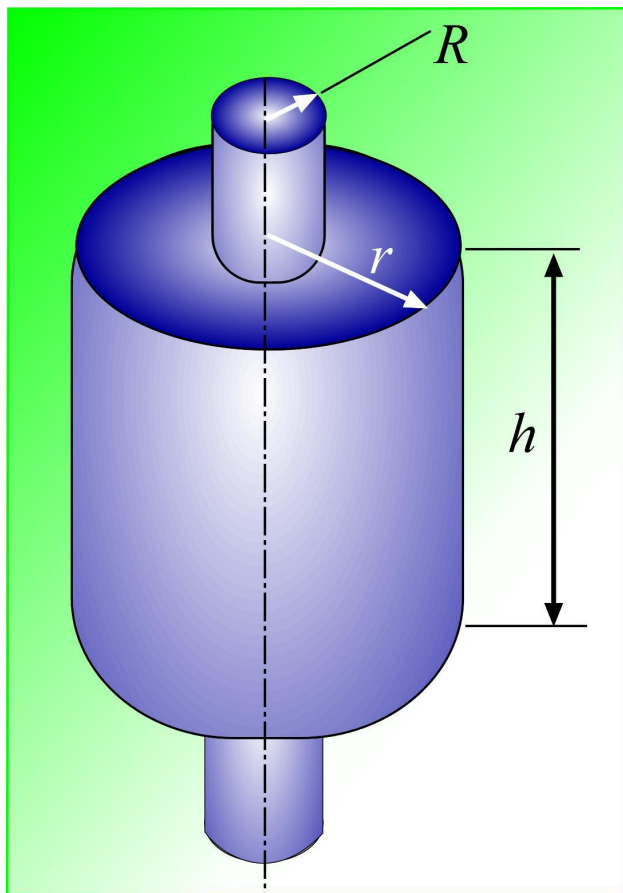


$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Лекція 15  
Теорема Гаусса

Приклади  
розрахунку полів за  
Гауссом

*Напруженість поля  
нескінченної зарядженої нитки, довгого циліндра*



Провідний циліндр радіуса  $R$ ,  
по якому заряд розподілено  
рівномірно з лінійною густиною

$\tau$

Ззовні

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Всередині

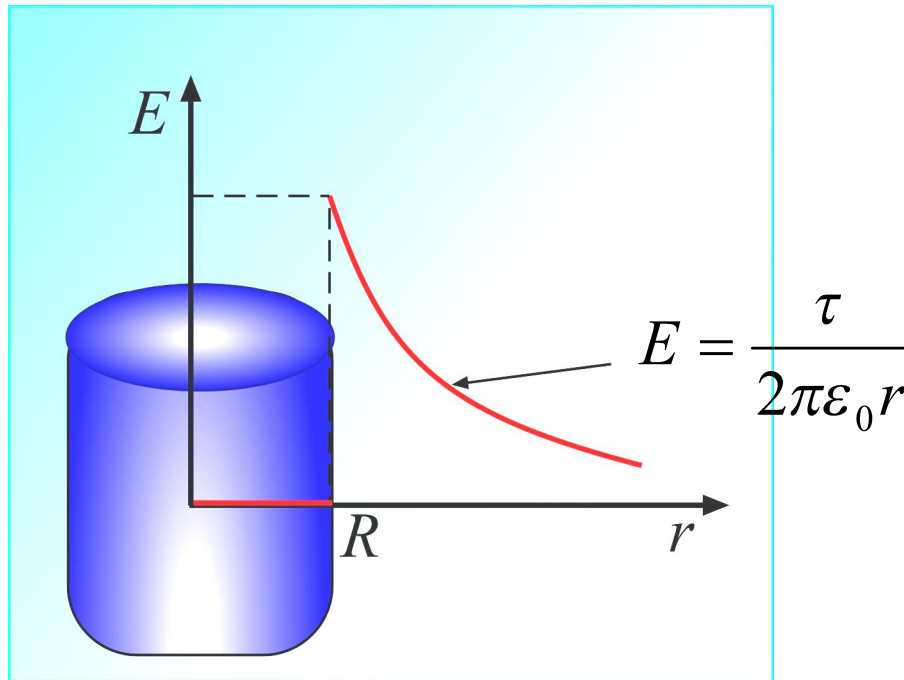
$$E = 0$$



Лекція 15  
Теорема Гаусса

Приклади  
розрахунку полів за  
Гауссом

*Напруженість поля  
нескінченної зарядженої нитки, довгого циліндра*



Лекція 15  
Теорема Гаусса

Приклади  
розрахунку полів за  
Гауссом

*Напруженість поля  
нескінченного довгого діелектричного циліндра*

Непровідний циліндр радіуса  $R$ , в якому заряд розподілено рівномірно з об'ємною густиною  $\rho$

**Ззовні циліндра**

$$\Phi_E = ES_\sigma = E2\pi r h = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho V_{\text{непров.ц.}} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \pi R^2 h$$

$$E = \frac{\rho \pi R^2 h}{2\pi r h \varepsilon_0} = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}$$

**Всередині циліндра**

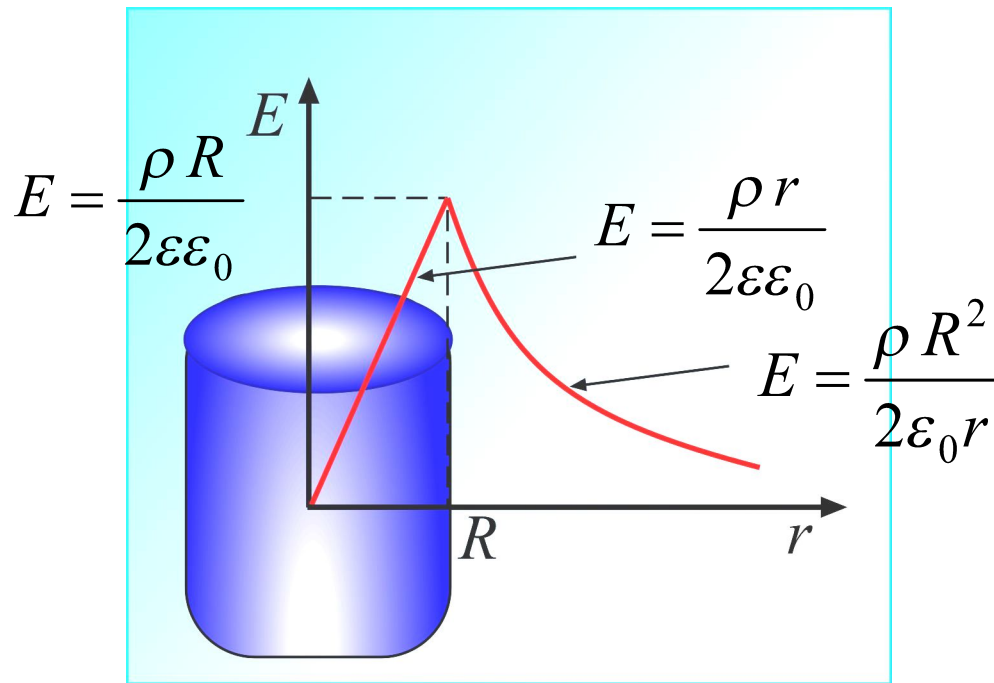
$$\Phi_E = ES_\sigma = E2\pi r h = \frac{\rho V_{\text{дон.ц.}}}{\varepsilon \varepsilon_0} = \frac{\rho \pi r^2 h}{\varepsilon \varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho r}{2\varepsilon \varepsilon_0}$$

Лекція 15  
Теорема Гаусса

Приклади  
розрахунку полів за  
Гауссом

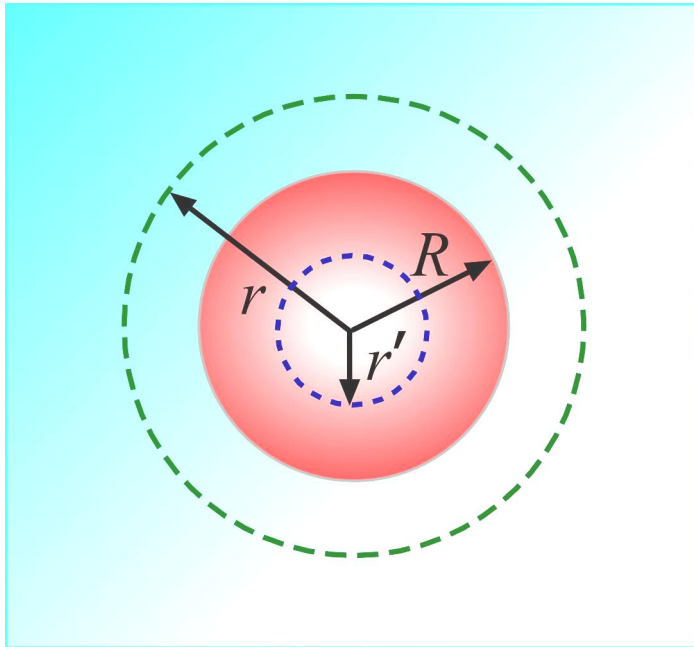
*Напруженість поля  
нескінченного довгого діелектричного циліндра*



Лекція 15  
Теорема Гаусса

Приклади  
розрахунку полів за  
Гауссом

*Напруженість поля  
рівномірно зарядженої сфери*



Провідна  
сфера:

Зовні  
і

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Всередині

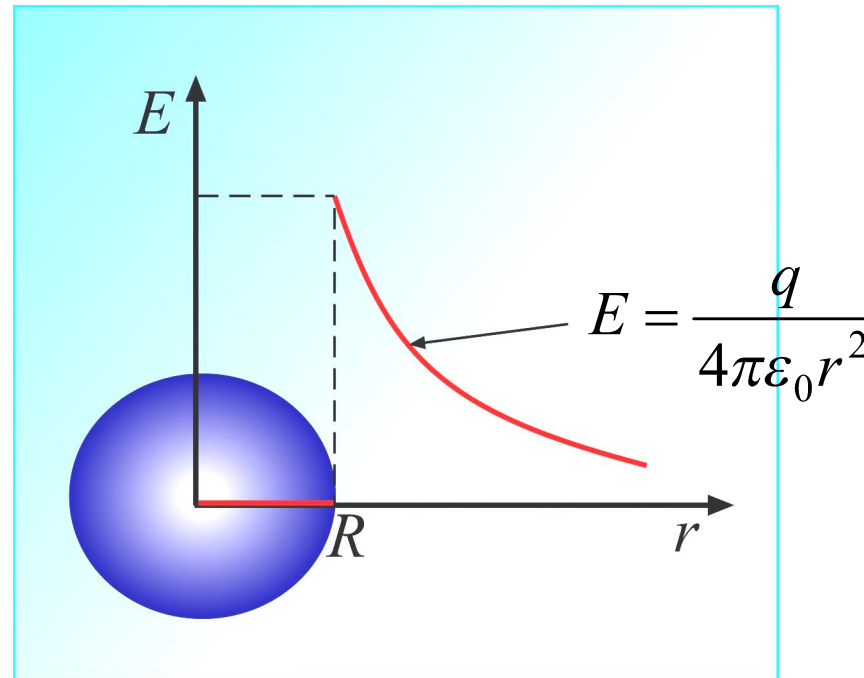
$$E = 0$$



Лекція 15  
Теорема Гаусса

Приклади  
розрахунку полів за  
Гауссом

*Напруженість поля  
рівномірно зарядженої сфери*



Лекція 15  
Теорема Гаусса

Приклади  
розрахунку полів за  
Гауссом

**Напруженість поля  
непровідної кулі**

Ззовні кулі

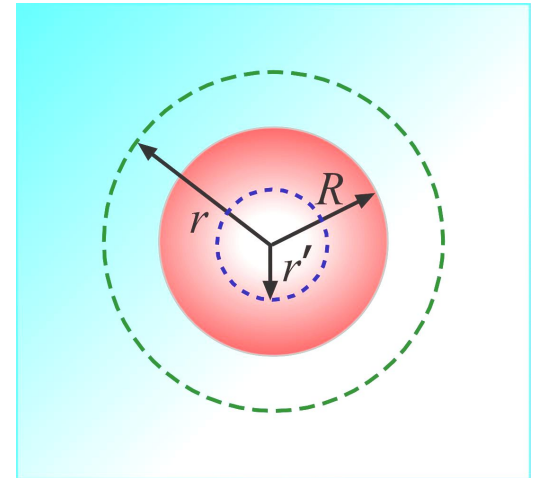
$$\Phi_E = ES = E4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\rho 4\pi R^3}{3\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho 4\pi R^3}{4\pi r^2 3\varepsilon_0} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$

Всередині  
кулі

$$\Phi_E = ES = E4\pi r'^2 = \frac{q'}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\rho 4\pi r'^3}{3\varepsilon\varepsilon_0}$$

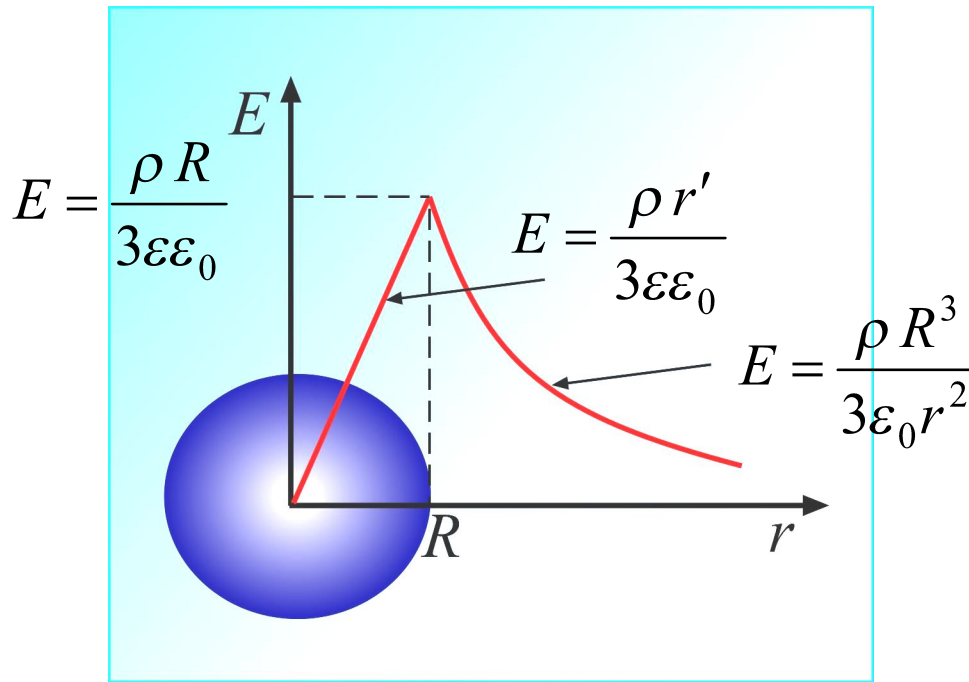
$$E = \frac{4\pi\rho r'^3}{4\pi r'^2 3\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\rho r'}{3\varepsilon\varepsilon_0}$$



Лекція 15  
Теорема Гаусса

Приклади  
розрахунку полів за  
Гауссом

*Напруженість поля  
непровідної кулі*



Лекція 15  
Теорема Гаусса

Поняття  
дивергенції

*Дивергенцією* деякого векторного поля  $A(\mathbf{r})$  називається  
границя відношення

$$\text{div } A = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S A_n dS}{V}$$

У декартовій системі координат

$$\text{div } A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\text{div } A = (\nabla A)$$

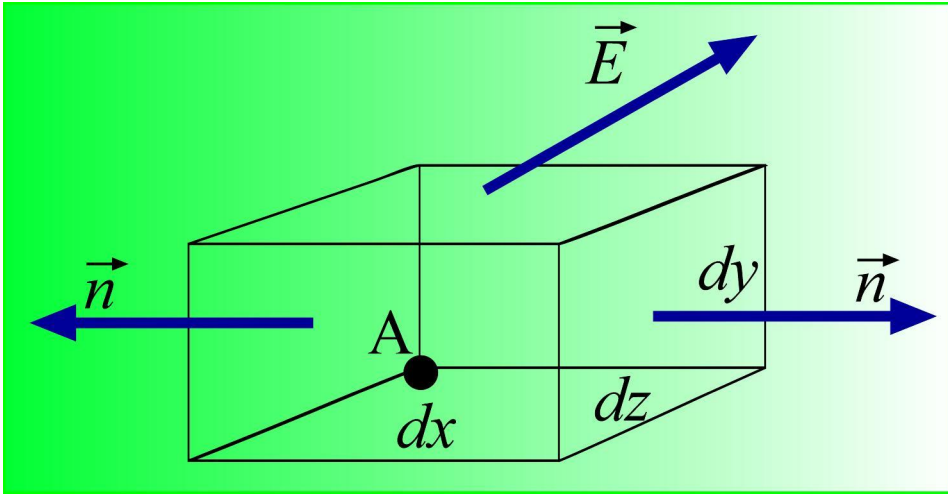
$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$$



# Лекція 15

## Теорема Гаусса

### Теорема Гаусса в диференціальній формі



$$\oint_S E_n dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

- Дивергенція фізично характеризує потужність джерел або стоків.
- Заряди є джерелами (додатний) і стоками (від'ємний) електричного поля.

# Лекція 15

## Теорема Гаусса

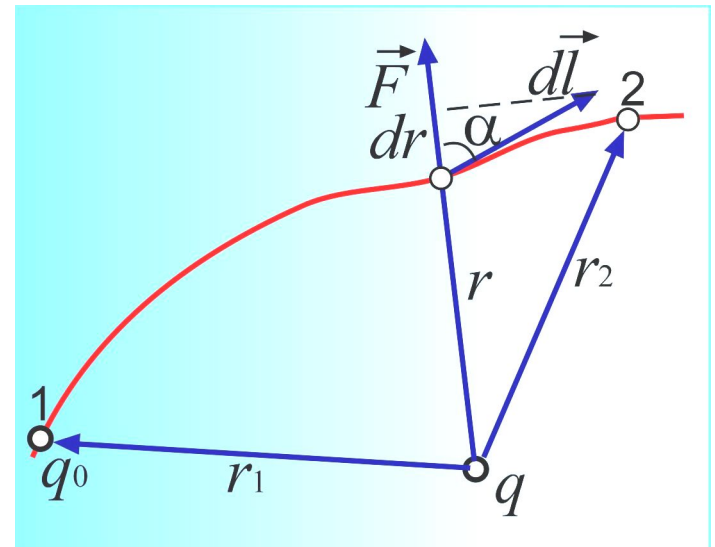
### Робота сил електростатичного поля

- Елементарна робота сил електростатичного поля

$$dA = (\vec{F} \cdot d\vec{l}) = F dl \cos \alpha = q_0 E dl \cos \alpha$$

- Для поля точкового заряду

$$dA = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2}$$



## Лекція 15 Теорема Гаусса

## Робота сил електростатичного поля

Робота сил електростатичного поля точкового заряду при переміщенні в цьому полі пробного заряду з точки 1 в точку 2:

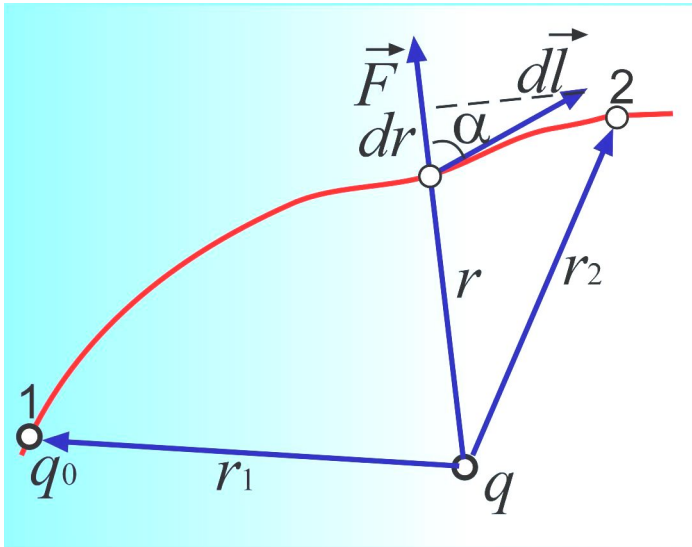
$$A_{1-2} = \int_{(1)}^{(2)} dA = q_0 \int_{(1)}^{(2)} (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}) = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Робота додатна, якщо:

- однойменні заряди віддаляються;
- різнойменні заряди наближаються.

Робота від'ємна, якщо:

- різнойменні заряди віддаляються;
- однойменні заряди наближаються.

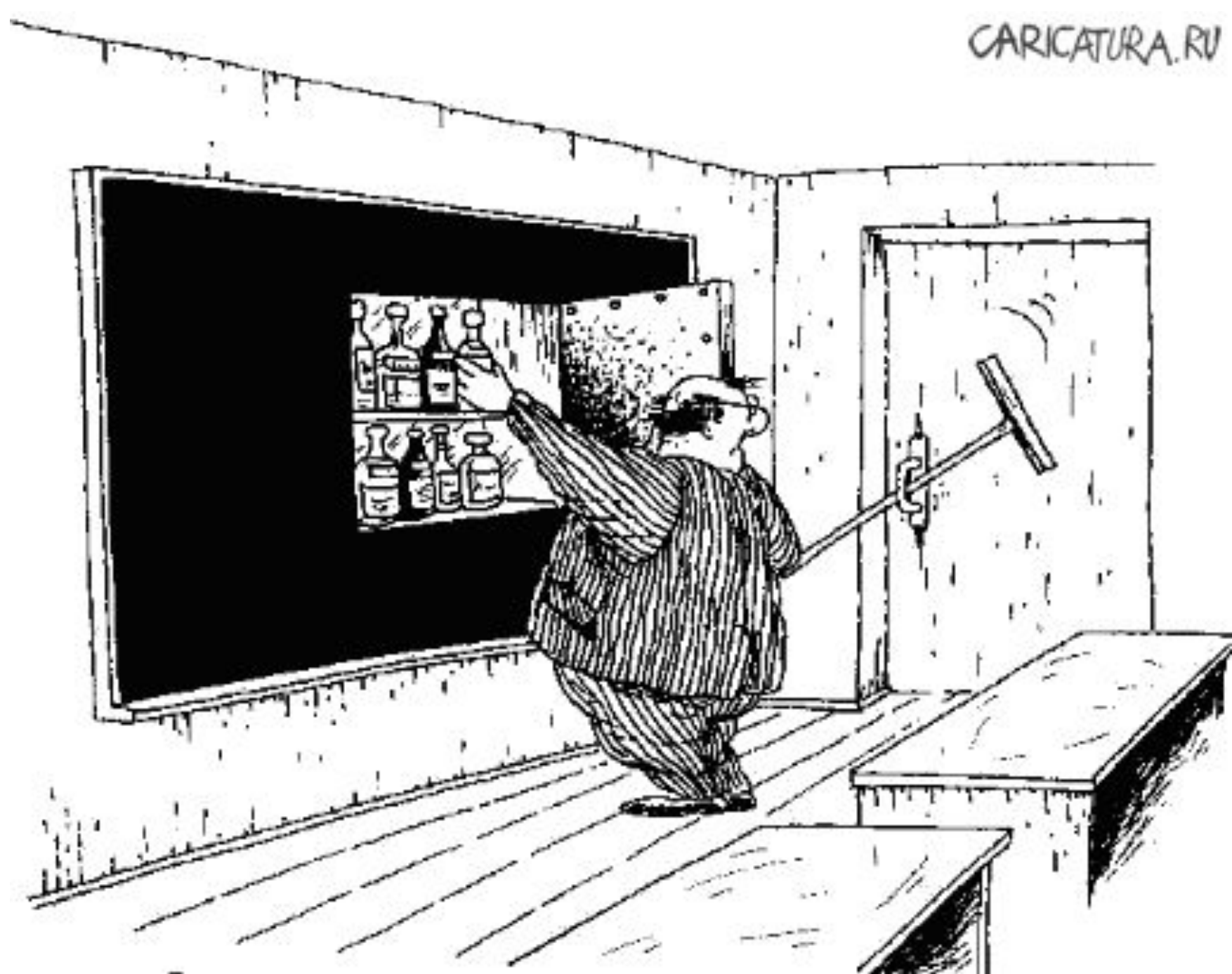


**Лекція 3**  
**Потенціал**  
**електростатичного**  
**поля**

*Робота сил*  
*електростатичного поля*

Робота електростатичного поля не залежить від форми шляху переміщення заряду від точки 1 до точки 2, а визначається лише положенням початкової і кінцевої точки.

Силіві поля, що задовольняють таку умову, називаються *потенціальними*, або *консервативними*





***Дякую за***