

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО  
ОБРАЗОВАНИЯ

«УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

кафедра инженерной графики

**Самохвалов Ю.  
И.**

# **НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ**

*Учебное пособие*

*Разработчик:*

*Данилова Ю. Л.*

Екатеринбург

2008 г.

далее

## **1. МЕТОД ПРОЕКЦИЙ**

**Литература. Вопросы для самопроверки**

## **2. ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ. МЕТОД МОНЖА**

**Литература. Вопросы для самопроверки**

**Задачи и упражнения**

## **3. ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ**

**Литература. Вопросы для самопроверки**

**Задачи и упражнения**

## **4. ПЛОСКОСТЬ**

**Литература. Вопросы для самопроверки**

**Задачи и упражнения**

**Комментарии к задачам и упражнениям**



назад

далее

## Список принятых обозначений

$A, B, C, D, \dots$	$1, 2, 3, \dots$	- прописные латинские буквы и арабские цифры используются для обозначения точек в пространстве
$A', B', C', \dots$	$1', 2', 3', \dots$	- горизонтальные проекции точек
$A'', B'', C'', \dots$	$1'', 2'', 3'', \dots$	- фронтальные проекции точек
$A''', B''', C''', \dots$	$1''', 2''', 3''', \dots$	- профильные проекции точек
$A_1', B_1', A_1'', B_1'', A_2'', B_2''$		- проекции точек на дополнительные плоскости проекций
$AB, AC, 1-2,$		- отрезок прямой или кривой линии
$l, m, p, q$		- прямая линия
$A'B', A''B'', 1'-2', \dots$		- соответственно проекции отрезков
$l', l'', \dots$		и линий
$ABC, A'B'C', A''B''C''$		- плоские фигуры и их проекции
$\alpha, \beta, \gamma, \dots$		- плоскости
$\alpha_H, \alpha_V, \beta_H, \beta_V$		- следы плоскостей на плоскостях проекций
$\alpha_X, \alpha_Y, \beta_X$		- точки схода следов плоскостей (точки пересечения плоскостей с осями проекций)
$H, V, W$		- горизонтальная, фронтальная и профильная плоскости проекций
$H_1, H_2, V_1$		- дополнительные плоскости проекций
$x=H \cap V, y=H \cap W, z=V \cap W$		- оси проекций (линии пересечения плоскостей проекций)
$x_1, y_1, y_2$		- дополнительные оси проекций при преобразованиях чертежа
$\cap$		- пересечение
$\cup$		- объединение
$\in$		- принадлежность



# 1. МЕТОД ПРОЕКЦИЙ

Основным методом построения геометрических моделей трехмерного пространства и его элементов является метод проекций. Этот метод реализуется путем создания проекционного аппарата – совокупности геометрических элементов, определенным образом расположенных в пространстве и позволяющих строить плоское изображение (модель) любого пространственного объекта.

## 1.1. Центральное проецирование

Аппарат центрального проецирования состоит из следующих элементов (рис. 1):

- 1)  $S$  – центр проекций;
- 2)  $H$  – плоскость проекций.

Необходимо соблюдать условие  $S \notin H$  – центр проецирования  $S$  не принадлежит плоскости проекций  $H$ .

Операция проецирования заключается в следующем. Из точки  $S$  проводятся проецирующие лучи через  $A, B, \dots$  - точки объекта, расположенного в пространстве, до пересечения с плоскостью проекций  $H$ . Точка пересечения проецирующего луча с плоскостью проекций определяет положение проекции или изображение точки на плоскости проекций (на модели)

$A, B, C, D, \dots$  - точки пространства, объекты проецирования

$SA, SB, \dots$  - проецирующие лучи

$A', B', C' \dots$  - проекции точек

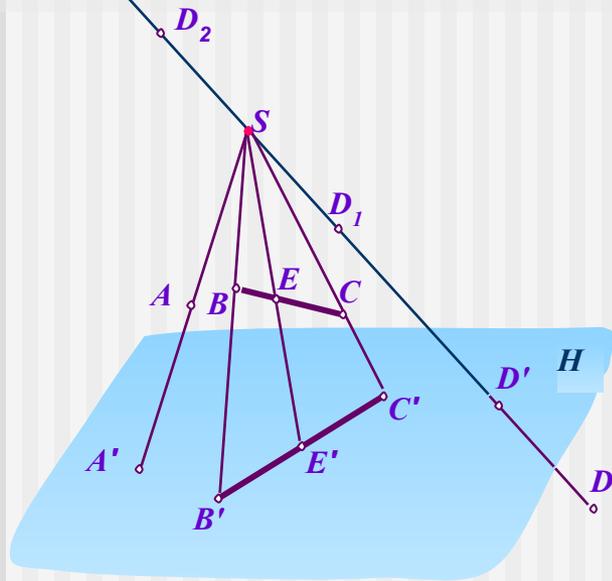


Рис. 1

Алгоритм построения проекций можно записать в символическом виде:

$$SA \cap H = A'$$

Читается: проецирующий луч проводится из точки  $S$  через точку  $A$  и в пересечении с плоскостью  $H$  определяет положение проекции  $A'$ .



назад

к вопросам

далее

По этому алгоритму можно построить проекцию (изображение, модель) любого объекта, расположенного в пространстве, эта проекция носит название «центральная проекция».

Свойства центрального проецирования:

1) проекцией точки является точка;

2) свойство **коллинеарности**: проекцией прямой линии является прямая линия.

На рис. 1 отрезок прямой **BC** и точка **S** образуют в пространстве плоскость, которая пересекает плоскость проекций по прямой линии, представленной отрезком **B'C'** - изображением (проекцией) **BC**;

3) свойство **инцидентности** (принадлежности) – проекция точки, лежащей на прямой, лежит на проекции этой прямой. Если  $E \in BC$ , то  $E' \in B'C'$ ;

4) проекции объектов отображаются на плоскость проекций с **искажением их величины**.

Величина проекции **B'C'** больше самого отрезка **BC** (см. рис. 1). Величина проекции любого отрезка, проходящего через точку **D**, будет меньше изображаемого отрезка. В натуральную величину будут отображаться только геометрические элементы, лежащие в плоскости проекций **H**. В этом случае проекция будет совпадать с самим геометрическим элементом.

Метод центрального проецирования имеет широкое применение в практике и реализуется в фото- и кинопроекторной аппаратуре, любой оптической аппаратуре (микроскоп, телескоп и т. д.).

Однако центральное проецирование обладает существенным недостатком, ограничивающим его применение на основании свойства 4 и отсутствия взаимно однозначного соответствия между отображаемым пространством и плоскостью отображения.



назад

к вопросам

далее

Для центрального проецирования будет справедливым предложение: «каждой точке пространства  $A, B, C, \dots$  соответствует точка на плоскости проекций  $A', B', C', \dots$ ». Обратное предложение – «каждой точке плоскости проекций соответствует точка в пространстве» - для центрального проецирования ложно.

Например, если на плоскости проекций есть точка  $D'$ , то определить ее положение в пространстве невозможно, поскольку точке  $D'$  плоскости  $H$  в пространстве соответствуют точки  $D, D_1, D_2, \dots$  - множество точек луча  $SD'$ . Число точек ( $D_n$ ) на луче  $SD'$  определяется величиной  $\infty^1$  – **однопараметрическое** множество. Однопараметрическое потому, что любая точка на прямой  $SD'$  определяется одним параметром (размером удаления от некоторой фиксированной точки – начала отсчета, например точки  $S$ ).

Число точек на плоскости, кажется, должно быть больше, чем на прямой линии, но по аналогии с прямой число точек на плоскости определяется величиной  $\infty^2$  – **двупараметрическое** множество. Понятия «больше» и

«меньше» при сравнении величин  $\infty^1$  и  $\infty^2$  не имеют смысла, и число 2 просто обуславливает количество параметров, определяющих точку на плоскости. Если речь идет о множестве точек  $\infty^1$ , то мы имеем дело с рядом точек, расположенным на линии (прямой или кривой, не имеет значения)  $\infty^2$  – множество точек на поверхности (кривой) или на плоскости. По аналогии можно заявить, что множество точек  $\infty^3$  – это точки трехмерного пространства,  $\infty^4$  – точки четырехмерного пространства и так далее.

В аппарате центрального проецирования мы отображаем  $\infty^3$  точек пространства на  $\infty^2$  точек плоскости отображения, то есть при отображении происходит потеря одного параметра. Это приводит к тому, что метод центрального проецирования строит неадекватную модель отображения пространства или модель, не обладающую метрическими свойствами.

В самом деле, на прекрасном изображении – фотографии невозможно определить, скажем, рост молодых людей и, более того, невозможно определить, кто из них выше ростом, если они располагаются на разных расстояниях от объектива фотоаппарата.

Для построения адекватной модели пространства нужно установить взаимно однозначное соответствие между отображаемым пространством и его плоской моделью.



назад

к вопросам

далее

Рассмотрим следующий вариант аппарата центрального проецирования: плоскость отображения  $H$  (рис. 2), центры проекций -  $S_1$  и  $S_2$ , объект проецирования – точка  $A$  трехмерного пространства.

Операция проецирования.

1.  $S_1 \cup S_2$  – объединение центров проецирования определяет ось или базис аппарата проецирования.
2.  $(S_1 \cup S_2) \cap H = S_{12}$  – ось центров пересекает плоскость проекций в точке  $S_{12}$ , определяющей взаимное отображение центров проецирования (в аппарате на рис. 1 центр  $S$  проецирования на плоскость проекций не имеет отображения).
3.  $(S_1 - S_2) \cup A$  – объединение оси с точкой – объектом проецирования - определяет проецирующую плоскость.
4.  $(S_1 - S_2 - A) \cap H = a \in S_{12}$  – проецирующая плоскость  $(S_1 - S_2 - A)$  пересекает плоскость отображения  $H$  по прямой  $a$ , проходящей через точку  $S_{12}$ . Прямую  $a$  можно рассматривать как осевую проекцию точки  $A$  на плоскость  $H$ .

5. Проецирование точки  $A$  из центров  $S_1$  и  $S_2$  дает пару центральных проекций  $A_1$  и  $A_2$ .

Этот процесс совершается в плоскости  $S_1 - S_2 - A$ , поэтому ( $A_1$  и  $A_2 \in a$ ) проекции  $A_1$  и  $A_2$  лежат на прямой  $a$  (прямую  $a$  удобно назвать линией проекционной связи, поскольку она связывает проекции  $A_1$  и  $A_2$  между собой и с точкой  $S_{12}$ ).

Любая другая точка пространства в этом проекционном аппарате будет отображаться на плоскости  $H$  по вышеприведенному алгоритму, то есть каждая точка пространства будет отображаться парой точек, лежащей на линии проекционной связи, проходящей через общую точку  $S_{12}$ .

Отсюда можно вывести правило: **пара точек плоскости  $H$ , лежащая на прямой, проходящей через точку  $S_{12}$ , однозначно определяет некоторую точку пространства** (точка  $B$  на рис. 2).

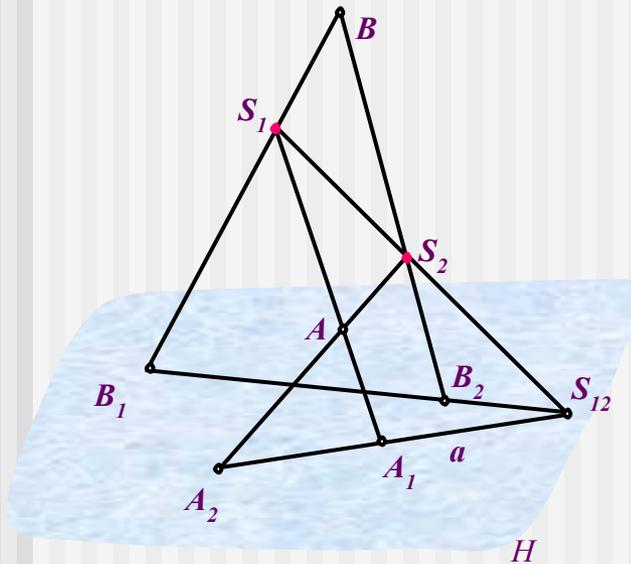


Рис. 2



назад

к вопросам

далее

Чтобы установить адекватность модели отображения, нужно посчитать параметры отображения.

Множество прямых с центром в точке  $S_{12}$  образуют пучок прямых – это однопараметрическое множество  $\infty^1$ , поскольку каждая прямая определяется в пучке углом от произвольно фиксированной прямой пучка (начала отсчета).

На каждой прямой пучка расположено  $\infty^1$  точек сорта  $A_1$  и  $\infty^1$  точек сорта  $A_2$ . Объединение этих множеств  $\infty^1 \cdot \infty^1 \cdot \infty^1 = \infty^3$  определяет число пар точек  $(A_1, A_2)$  на плоскости отображения.

Таким образом, множество  $\infty^3$  точек пространства отображается на плоскость  $H$  множеством  $\infty^3$  пар точек – проекций.

Метод отображения точки пространства двумя проекциями на плоскости отображения называется **МЕТОДОМ ДВУХ ИЗОБРАЖЕНИЙ**.

Этот метод лежит в основе всех моделей отображения, применяемых в инженерной практике.

## 1.2. Косоугольное проецирование

Проекционный аппарат косоугольного проецирования состоит из плоскости проекций  $H$  и направления проецирования, которое задано вектором  $S$ .

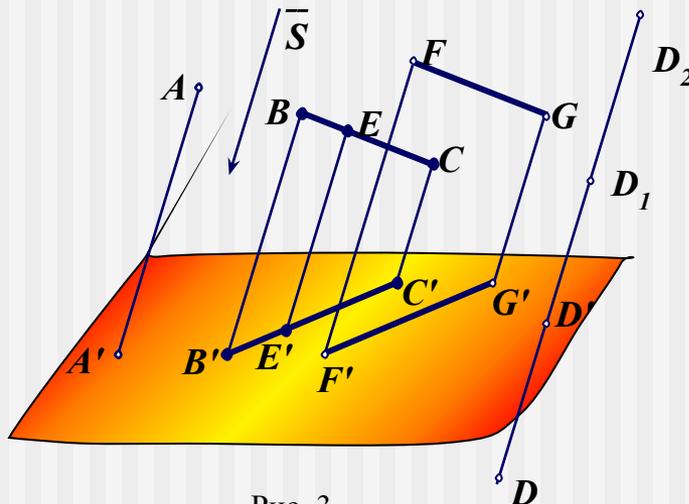


Рис. 3

Вектор  $S$  наклонен к плоскости проекций  $H$  под произвольным углом, не равным  $90^\circ$  (рис. 3). Операция проецирования аналогична центральному проецированию. Алгоритм построения проекций идентичен центральному проецированию:

$$A \in S \quad A \cap H = A'$$

Читается: проекция  $A'$  точки пространства является результатом пересечения проецирующего луча  $SA$ , проходящего через точку  $A$ , с плоскостью  $H$ .



назад

к вопросам

далее

Косоугольное проецирование обладает всеми свойствами центрального проецирования и имеет некоторые собственные свойства:

- отношение проекций отрезков, лежащих на параллельных прямых или на одной прямой, равно отношению самих отрезков, которое определяется простым отношением трех точек на одной прямой

$$(B'E'C') = (BEC) = \frac{B'E'}{E'C'} = \frac{BE}{EC} = const;$$

-  $B'C'$  и  $F'G'$  - проекции параллельных прямых параллельны между собой. Если  $BC \parallel FG$ , то  $B'C' \parallel F'G'$ . Это свойство легко объяснить параллельностью плоскостей, проецирующих прямые  $BC$  и  $FG$  на плоскость  $H$ .

### 1.3. Прямоугольное проецирование

В прямоугольном проецировании  $S$  направлен перпендикулярно к плоскости  $H$ , т. е. проецирующие лучи, определяющие проекции точек, направлены к плоскости проекций под прямым углом. В некоторых учебниках это проецирование носит название «ортогональное проецирование».

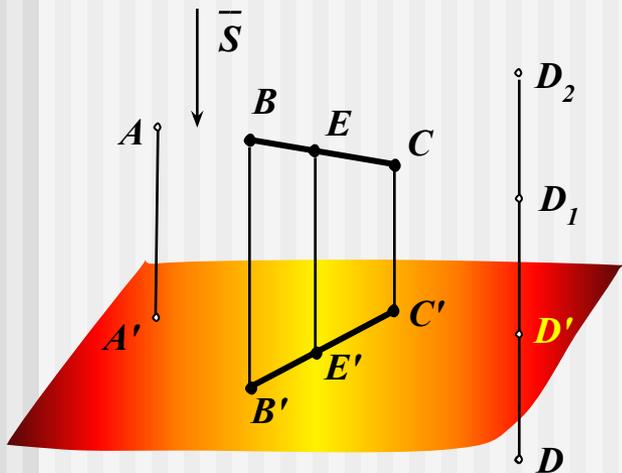


Рис. 4

Проекционный аппарат (рис. 4) прямоугольного проецирования аналогичен проекционному аппарату косоугольного проецирования. Алгоритм построения проекции идентичен предыдущим методам. Прямоугольное проецирование обладает семью свойствами косоугольного проецирования.

Достоинства и недостатки параллельного (косоугольного и прямоугольного) и центрального проецирования аналогичны.

Для построения изображений в конструкторской и технической документации применяется в основном метод прямоугольного проецирования, косоугольное проецирование применяется значительно реже.



назад

к вопросам

далее

## 1.4. Аксонометрические проекции

**Аксонометрия** (греч. *axon* – ось + *metreo* – измерять) – способ изображения предметов на чертеже, при котором на плоскость изображения проецируются как сам предмет, так и оси прямоугольной системы координат, к которым изображаемый предмет отнесен. Это определение в основном отражает сущность этого способа построения изображений.

Графическая реализация этого способа представлена на рис. 5.

Обозначения:

**A** – объект в пространстве;

**OXYZ** – система отнесения объекта (система координат);

**SH** – проекционный аппарат аксонометрии;

**S, OXY** – проекционный аппарат для построения проекции **A<sub>1</sub>**;

**A<sub>1</sub>** – проекция объекта на одну из плоскостей отнесения;

**A□** - аксонометрическая проекция объекта **A** на плоскости **H**;

**O□X□Y□Z□** - оси аксонометрии;

**A<sub>1</sub>□** - вторичная аксонометрическая проекция объекта.

Определяя геометрические размеры объекта - длина, ширина, толщина – мы вводим определенную систему координат для оценки геометрических размеров; это и есть система отнесения объекта **OXYZ** (см. рис. 5). Поскольку длина, ширина и толщина мыслятся по взаимно перпендикулярным направлениям, то систему **OXYZ** можно считать системой прямоугольных декартовых координат с единичными отрезками по осям.



назад

к вопросам

далее

Если спроецировать объект  $A$ , отнесенный к системе  $OXYZ$ , на плоскость  $H$  по направлению  $S$ , то получится проекция  $A'$  и проекция системы отнесения  $O'X'Y'Z'$ , но в силу недостатка центрального проецирования, присущего и параллельному проецированию, изображение  $A'$  необратимо, т. е. по этому изображению невозможно решить вторую основную задачу начертательной геометрии. Для того чтобы аксонометрическое изображение читалось, применяют метод двух изображений.

Объект  $A$  проецируется на одну из плоскостей отнесения (на рис. 5 на плоскость  $OXY$ ) по направлению  $S_1$ , которое совпадает с третьей осью отнесения ( $OZ$ ).

Полученную проекцию  $A_1$  проецируют на аксонометрическую плоскость  $H$  по направлению  $S$  вместе с объектом  $A$  и системой отнесения  $OXYZ$ .

В результате на плоскости  $H$  получаются два изображения:  $A'$  - аксонометрия объекта и  $A_1'$  - вторичная проекция объекта, связанные в систему осями аксонометрии  $O'X'Y'Z'$ .

Если на двух изображениях  $A'$  и  $A_1'$  можно опознать изображения (проекции) точки  $B - B'$  и  $B_1'$ , то по системе  $O'X'Y'Z'$  однозначно определяются три координаты этой точки, что указывает на возможность реконструкции всего объекта в пространстве и позволяет решать любые задачи в этой системе изображения.

Координаты точки  $B$  на рис. 5 определяются следующим образом:

$O'B_x$  - координата  $x$ ;

$B_xB_1'$  - координата  $y$ ;

$B_1'B'$  - координата  $z$ .

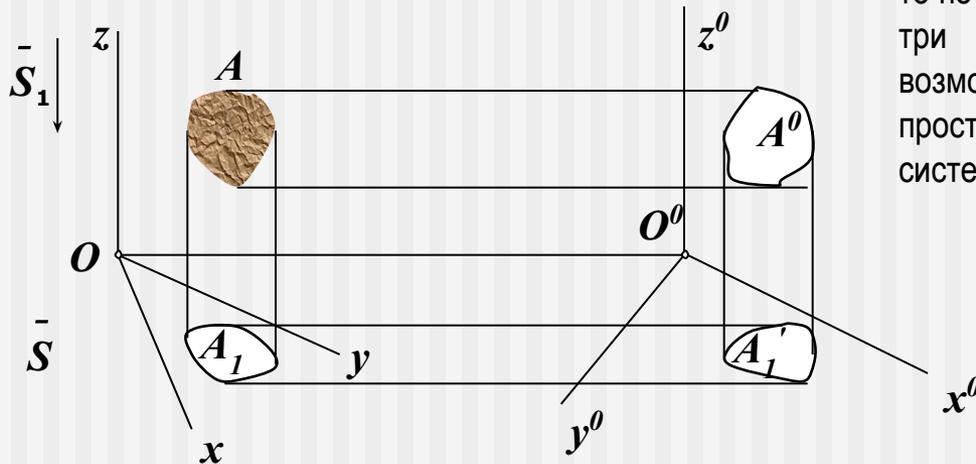


Рис. 5



назад

к вопросам

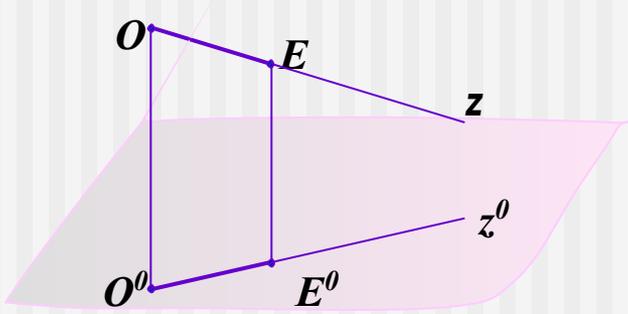
далее

### 1.4.1. Классификация аксонометрических проекций

Аксонометрические проекции классифицируются по методу проецирования и по коэффициентам искажения на осях аксонометрии.

По методу проецирования возможны три аксонометрические проекции:

- центральная,
- косоугольная,
- прямоугольная



При любом из этих проецирований оси прямоугольных координат системы отнесения **OXYZ** будут проецироваться на плоскость **H** с искажением. Искажение характеризуется коэффициентом, т. е. отношением величины проекции отрезка к его натуральной величине (рис. 6).

$$\frac{|O^0E^0|}{|OE|} = k_z;$$

Рис. 6

Классификация аксонометрических проекций по коэффициентам искажения:

- 1) изометрия  $k_x = k_y = k_z$ ;
- 2) диметрия  $k_x = k_y \neq k_z$ ;
- 3) триметрия  $k_x \neq k_y \neq k_z$ .

ЕСКД – единая система конструкторской документации, рекомендует к применению три вида аксонометрических проекций – прямоугольную изометрию, прямоугольную диметрию и косоугольную диметрию.



## 1.4.2. Прямоугольная изометрия

Строится по методу прямоугольного проецирования.

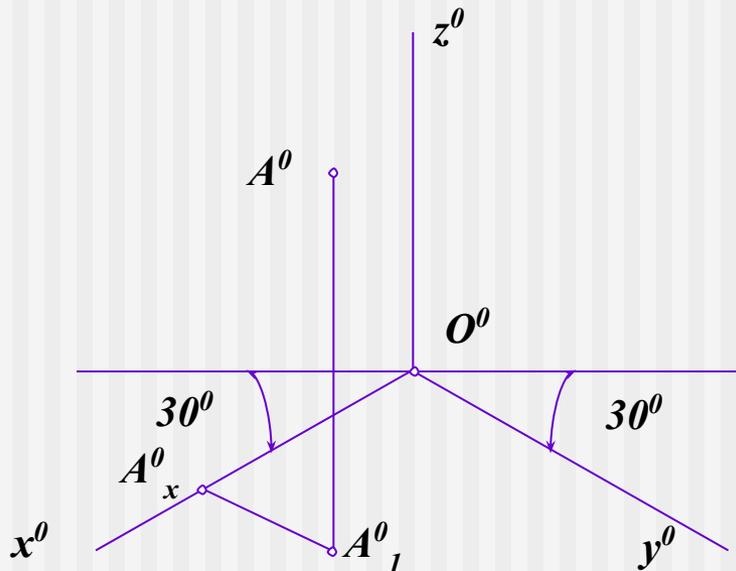
Коэффициенты искажения по осям  $x$ ,  $y$  и  $z$  одинаковы:  $k_x = k_y = k_z \cong 0,82$ .

Поскольку коэффициент **0,82** неудобен для использования, на практике применяется приведенная или увеличенная прямоугольная изометрия, коэффициенты искажения по осям которой  $k_x = k_y = k_z = 1$ .

При этом происходит увеличение изображения в **1,22** раза.

Ось  $z^0$  проводится вертикально.

Оси  $x^0$  и  $y^0$  под углом **30°** к горизонту так, что углы между осями  $x^0$ ,  $y^0$ ,  $z^0$  равны и составляют по **120°**.



Оси системы  $O^0X^0Y^0Z^0$  наделяются свойством прямоугольной системы декартовых координат.

На рис. 7 показано построение точки  $A(6, 3, 7)$ .

Рис. 7



назад

к вопросам

далее

Необходимо знать правила построения аксонометрической проекции окружности, расположенной параллельно плоскостям отнесения  $OXY$ ,  $OXZ$  и  $YOZ$ .

Окружность в этом случае проецируется на плоскость изображения в виде эллипса.

Сопряженные диаметры эллипса, параллельные осям аксонометрии, равны диаметру окружности.

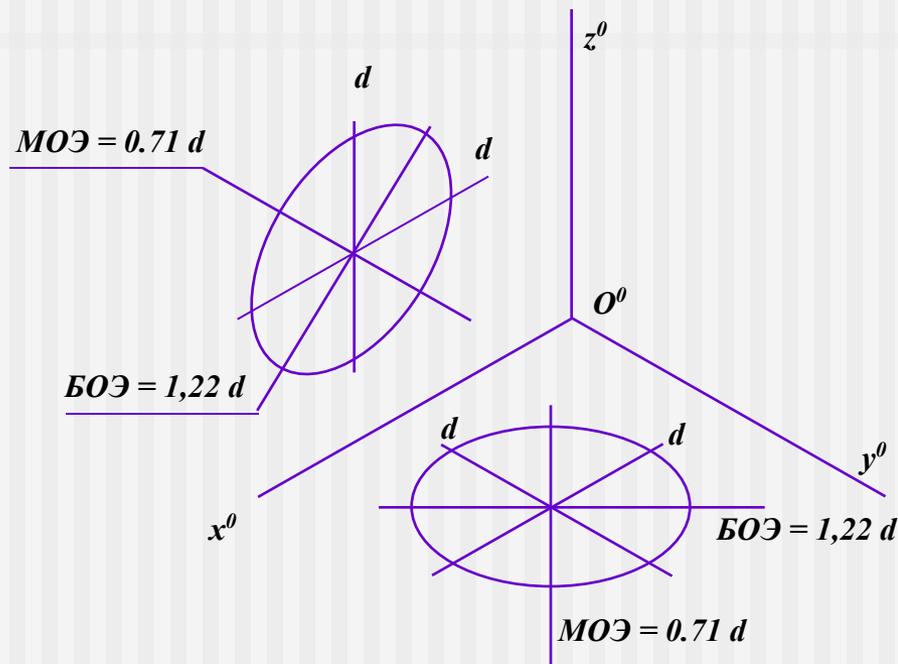


Рис. 8

Большая ось эллипса (БОЭ) проводится перпендикулярно отсутствующей оси.

Величина большой оси эллипса –  $1,22$  диаметра окружности.

Если эллипс строится в плоскости  $X \square O \square Y \square$ , то БОЭ перпендикулярна оси  $O \square Z \square$ .

Малая ось эллипса перпендикулярна большой и равна  $0,71d$  (рис. 8).



назад

к вопросам

далее

### 1.4.3. Прямоугольная диметрия

Ось  $Z^0$  прямоугольной диметрии проводится вертикально, ось  $X^0$  - под углом  $7^{\circ}10'$  к горизонту и ось  $Y^0$  - под углом  $41^{\circ}25'$  к горизонту (рис. 9).

Для построения углов  $7^{\circ}10'$  и  $41^{\circ}25'$  удобно воспользоваться отношением катетов прямоугольных треугольников с этими углами или тригонометрическими функциями тангенсов этих углов:

$$\operatorname{tg} 7^{\circ}10' = \frac{1}{8} \qquad \operatorname{tg} 41^{\circ}25' = \frac{7}{8}$$

Коэффициенты искажений  $\bar{\kappa}_x = \bar{\kappa}_z = 0,94$ ,  $\kappa_y = 0,47$ .

Стандартная проекция – увеличенная, имеет коэффициенты  $\kappa_x = \kappa_z = 1$ ,  $\kappa_y = 0,5$ . Увеличение изображения происходит в 1,06 раза.

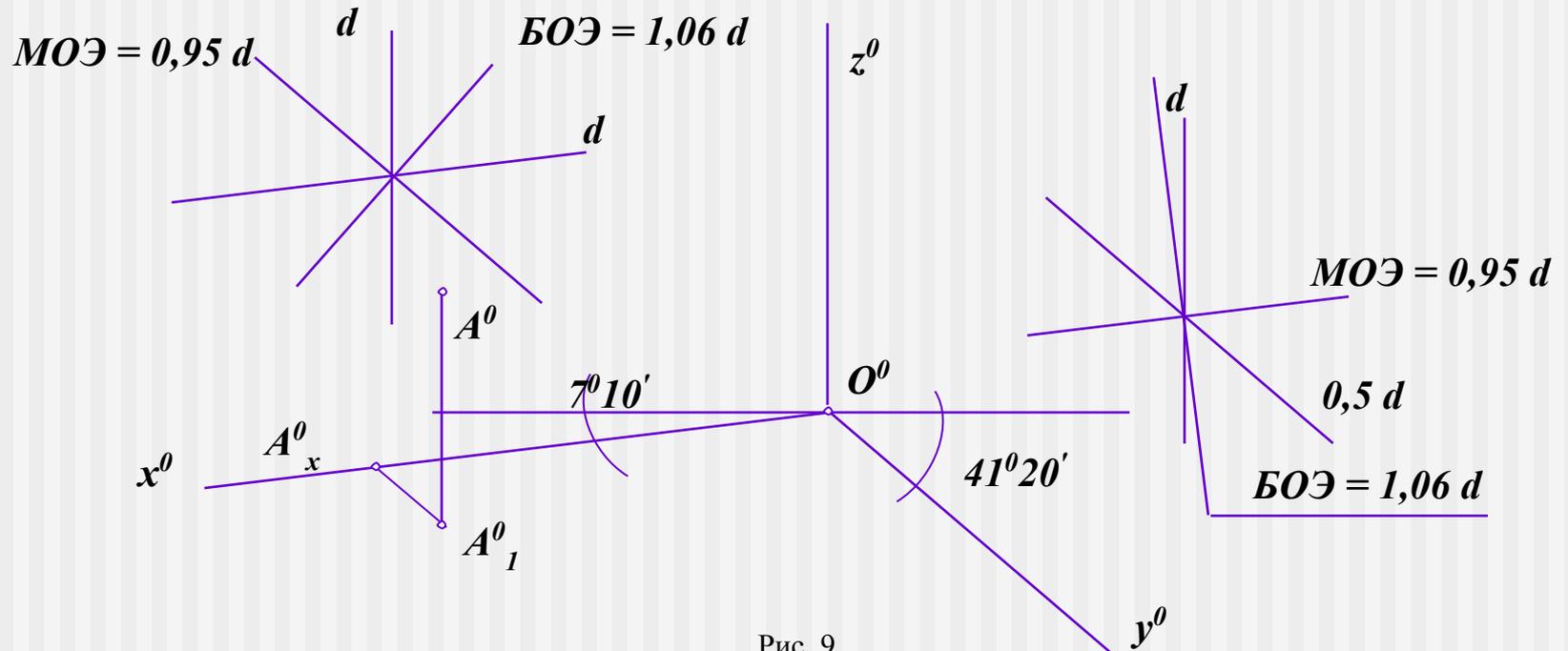


Рис. 9

Построение точки  $A(6, 4, 5)$  аналогично построению точки в прямоугольной изометрии.



назад

к вопросам

далее



## Литература

1. **Фролов С. А.** Начертательная геометрия. М.: Машиностроение, 1978. С. 4, 15-21, 203-216.
2. **Гордон В. О., Семенцов–Огиевский М. А.** Курс начертательной геометрии. М., 1962. С. 10-15.

## Вопросы для самопроверки

1. Расскажите устройство аппарата центрального проецирования. Как осуществляется операция проецирования?
2. Дайте определение проекции точки.
3. Изложите свойства центральных и параллельных проекций.
4. Назовите основной недостаток центрального и параллельного проецирования.
5. Дайте классификацию аксонометрических проекций.
6. Какие коэффициенты искажения по осям в прямоугольной диметрии? Как строится изображение точки по координатам?
7. Как строятся эллипсы в прямоугольной диметрии?
8. Как строится четырехцентровый овал, заменяющий эллипс?



назад

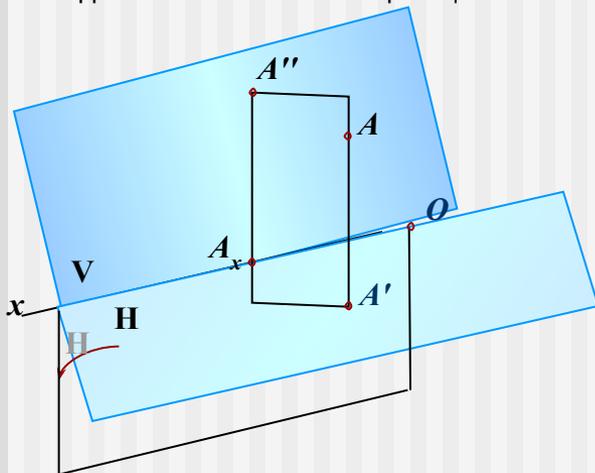
далее

## 2. ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ. МЕТОД МОНЖА

### 1.1. Прямоугольные проекции точки

Современная система изображения строится на основе прямоугольного проецирования объекта на две взаимно перпендикулярные плоскости проекций. Этот метод изображения был предложен французским ученым, общественным и политическим деятелем времен Великой французской революции Гаспаром Монжем [1].

$V$  – фронтальная плоскость проекций



$H$  – горизонтальная плоскость проекций

Рис. 11

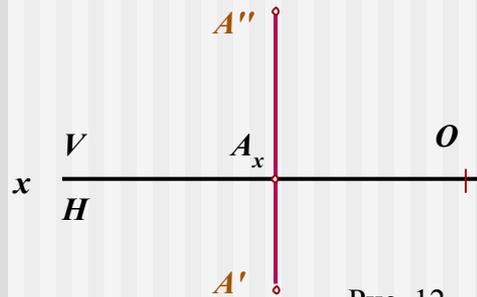


Рис. 12

Построение изображения по методу Г. Монжа:

Точка  $A$  – объект в пространстве – проецируется на две взаимно перпендикулярные плоскости проекций  $H$  и  $V$ , которые называются соответственно горизонтальная и фронтальная.

В результате получаются две проекции -  $A'$  - горизонтальная проекция точки  $A$  и  $A''$  - фронтальная проекция точки  $A$  (см. рис. 11).

$V \cap H = X$  – ось проекций или закрепления плоскостей проекций,

Следующая операция – совмещение горизонтальной плоскости проекций  $H$  с фронтальной путем вращения ее вокруг  $OX$  – оси проекций или линии закрепления плоскостей проекций (см. рис. 11).

Совмещенное положение плоскостей называется «эпюр», что в переводе с французского обозначает «плоский чертеж».

На рис. 12 изображен эпюр пространственной конструкции рис. 11. Горизонтальная проекция  $A'$  и фронтальная  $A''$  «связаны» между собой прямой  $A'A''$ .

Это линия называется «линией проекционной связи».

Она всегда перпендикулярна осям проекций.



назад

к вопросам

далее

Система изображения, построенная по этому методу, очень легко связывается с системой прямоугольных координат.

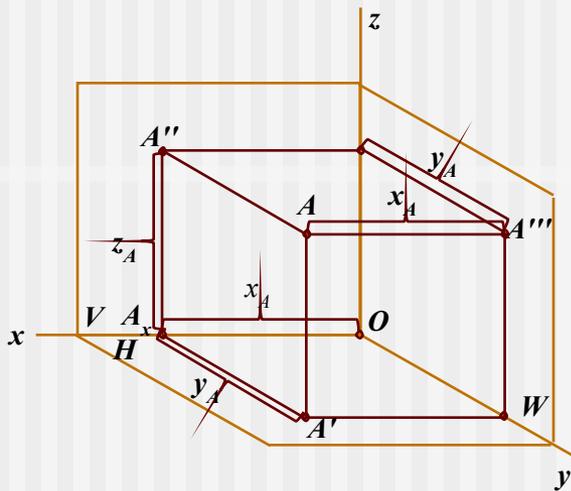


Рис. 13

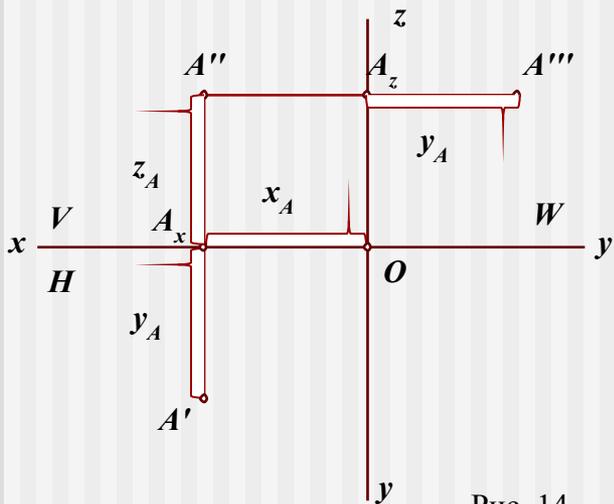


Рис. 14

Если точку  $O$  (рис. 13) принять за начало отсчета, то отрезок  $OA_x$  выражает координату  $x$  точки  $A$ ; отрезок  $A_xA''$  - координату  $z$  точки  $A$ ; отрезок  $A_xA'$  - координату  $y$  точки  $A$ .

Таким образом, если на эюре (см. рис. 12) взять точку  $O$  (начало отсчета) на оси  $OX$ , то координаты  $x$ ,  $y$  и  $z$  точки  $A$  определяются однозначно, а это означает точное определение положения точки  $A$  в пространстве.

Проекционный аппарат системы изображения Г. Монжа представляет собой две взаимно перпендикулярные плоскости проекций  $V$  и  $H$  и прямоугольное проецирование на обе плоскости.

Этот аппарат может быть дополнен третьей плоскостью проекций, перпендикулярной к  $V$  и  $H$  (см. рис. 13).

Третья плоскость обозначается  $W$  и называется **профильной плоскостью проекций**.

Плоскость  $W$ , пересекаясь с  $V$ , дает ось проекций  $z$ , а с  $H$  – ось  $y$ .

Третья проекция точки  $A$  –  $A'''$  называется **профильной проекцией** точки  $A$

- $|A-W|$  - координата  $x_A$ ;
- $|A-V|$  - координата  $y_A$ ;
- $|A-H|$  - координата  $z_A$ .



назад

к вопросам

далее

Построение трех проекций на эюре (см. рис. 14) осуществлено по координатам.

Координата  $x_A$  – абсцисса точки **A** - определяет на эюре точку  $A_x$ , через которую можно провести линию проекционной связи между фронтальной и горизонтальной проекциями; она перпендикулярна оси **OX**.

Вниз по линии связи от точки  $A_x$  откладывается координата  $y_A$ , вверх координата  $z_A$ ; получаются две проекции - **A'** - горизонтальная и **A''** - фронтальная.

Третья проекция строится на линии проекционной связи между фронтальной и профильной проекциями. Через **A''** проводится прямая линия перпендикулярно оси **OZ**, и от точки  $A_z$  откладывается координата  $y_A$  – получается **A'''** - профильная проекция точки **A**.

Координатный метод построения третьей проекции более прост и более точен по сравнению с методом замкнутой проекционной связи между проекциями.

Современный чертеж в отличие от эюра Монжа не имеет осей проекций и называется бесосным, или незакрепленным, эюром.

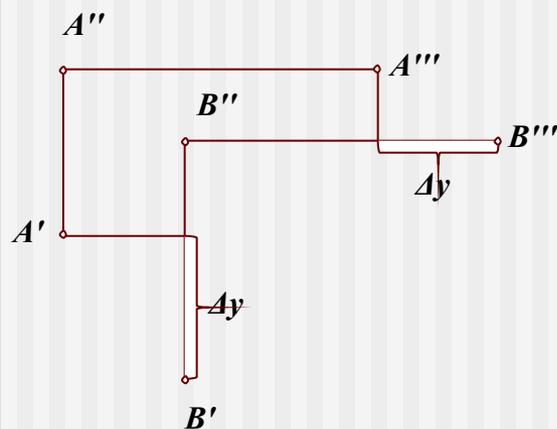


Рис. 15

Бесосный эюр (рис. 15) имеет преимущество в том, что проекции объектов на чертеже могут располагаться произвольно, но с обязательным соблюдением проекционной связи между проекциями.

На рис. 15 построены бесосный эюр точки **A**, и три проекции **A'**, **A''**, **A'''**.

Чтобы на этом эюре построить три проекции точки **B** (**B'** и **B''** могут быть взяты произвольно), можно воспользоваться замкнутой проекционной связью, которая осуществляется посредством линии преломления проекционной связи (*l-l*), проведенной под углом  $45^\circ$  к горизонту.

Однако, этот метод построения профильной проекции мало пригоден для построения сложных чертежей, которые строятся координатным методом.



назад

к вопросам

далее

На рис. 16 построены три проекции пирамиды  $SABCD$ .

Пирамида (см. рис. 16, а) отнесена к системе прямоугольных координат  $OXYZ$ .

На эюре (см. рис. 16, б) построены проекции осей координат –  $O'X'Y'Z'$  - горизонтальная,  $O''X''Y''Z''$  – фронтальная,  $O'''X'''Y'''Z'''$  – профильная.

Проекции осей на эюре можно располагать произвольно, но с сохранением проекционной связи.

Затем по координатам строятся проекции вершин пирамиды на плоскостях  $V$ ,  $H$  и  $W$ , соединяются ребрами, и получаются проекции пирамиды.

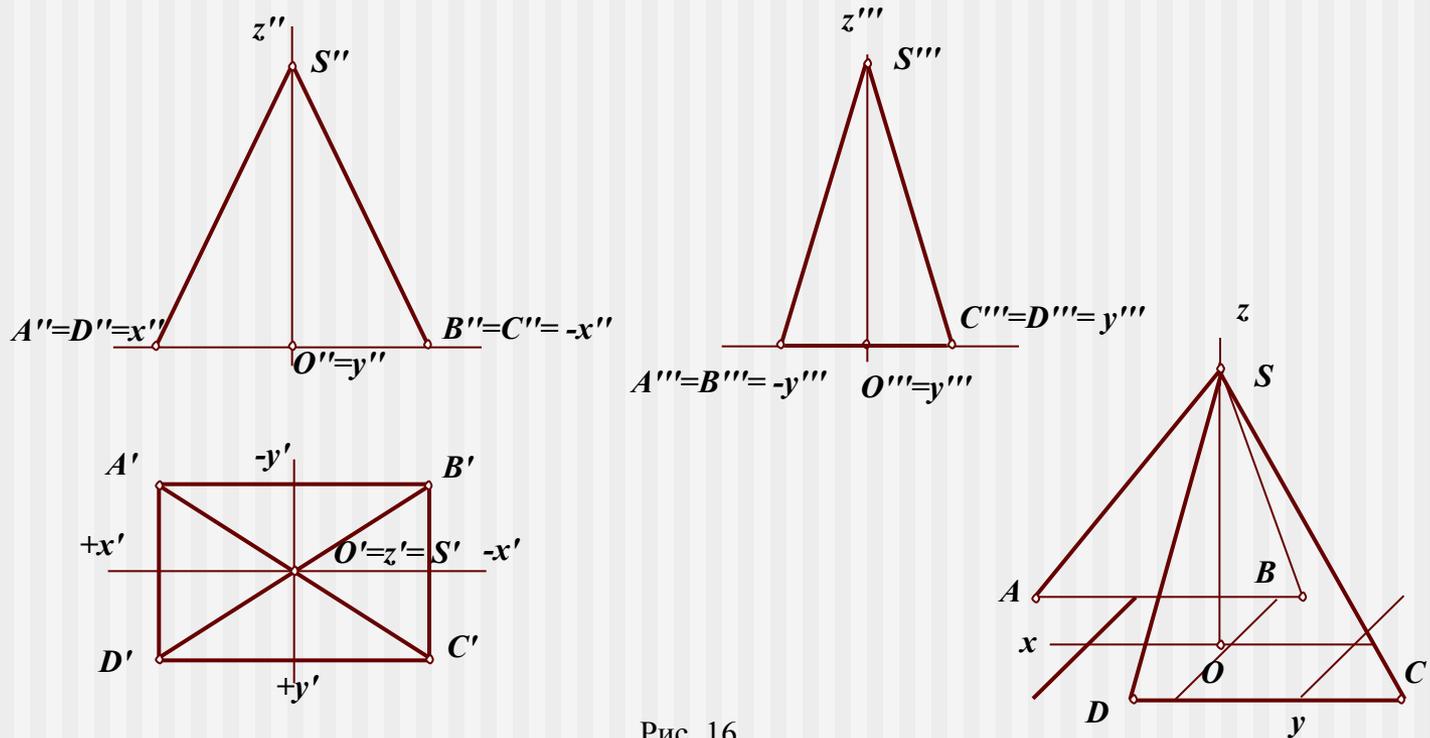


Рис. 16



назад

к вопросам

далее

## 2.2. Прямоугольные проекции прямой линии

### 2.2.1. Прямая общего положения

Прямая линия вполне определяется двумя точками пространства. На чертеже прямая линия обычно задается отрезком. Если прямая не параллельна и не перпендикулярна ни одной плоскости проекций, то она называется **прямой общего положения**. На рис. 17 изображен отрезок **AB** прямой общего положения.

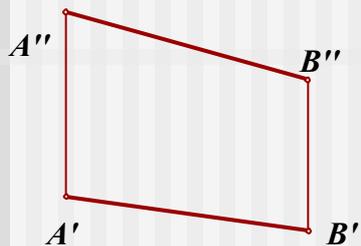


Рис. 17

**A'B'** - следует читать: «горизонтальная проекция отрезка прямой общего положения»;  
**A''B''** - «фронтальная проекция отрезка прямой общего положения».

По изображению на рис. 17 можно примерно определить положение отрезка в пространстве, а именно: точка **A** расположена выше, чем точка **B** (это видно на фронтальной проекции отрезка) и точка **A** удалена «от нас» дальше, чем точка **B** (видно на горизонтальной плоскости проекций).

Разность удаления точек **A** и **B** от плоскости проекций **H** фактически является разностью координат **z** этих точек -  $\Delta z$  (рис. 18). Разность удаления точек от плоскости **V** -  $\Delta y$ .

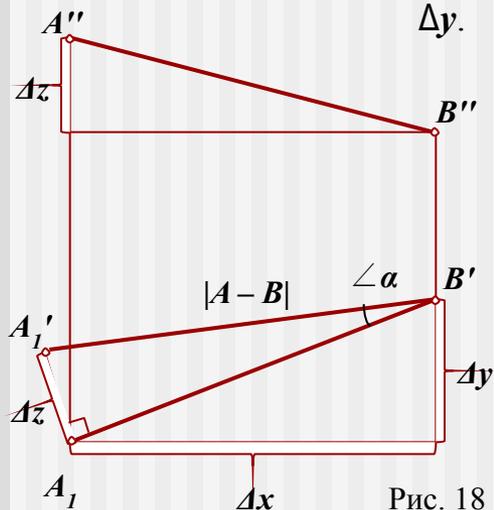


Рис. 18

Для определения натуральной величины отрезка **AB** можно воспользоваться **методом прямоугольного треугольника**. Построим прямоугольный треугольник, одним катетом которого будет горизонтальная (фронтальная) проекция,

вторым - разность удаления точек от плоскости **H (V)**, величина  $z (y)$ , гипотенуза такого треугольника определяет натуральную величину отрезка **AB** (рис. 18).

Гипотенуза  $\Delta A_1 A'' B_1$  определяет натуральную величину отрезка **AB** и угол его наклона к плоскости **H**. Углом наклона прямой к плоскости является угол между данной прямой и её проекцией на эту плоскость, поэтому угол  $\alpha$  определяет наклон прямой **AB** к горизонтальной плоскости.

Для определения угла наклона прямой **AB** к плоскости **V** нужно

построить прямоугольный треугольник, одним катетом которого будет фронтальная проекция **A''B''**, вторым - **y** концов отрезка; гипотенуза определит натуральную величину отрезка **AB**, а угол между гипотенузой и катетом **A''B''** будет искомым углом наклона отрезка к фронтальной плоскости проекций -  $\angle \beta$ .



назад

к вопросам

далее

## 2.2.2. Точка на прямой

Если точка лежит на отрезке прямой, то проекции этой точки лежат на одноименных проекциях отрезка прямой. Это уже известное из предыдущей главы свойство принадлежности. Точка, лежащая на отрезке прямой, обладает еще одним свойством: она делит отрезок, и ее проекции делят проекции отрезка на пропорциональные части. Эта пропорциональность вытекает из простого отношения точек на прямой:

$$(ABC) = \frac{AC}{CB} = \text{const};$$

$$(ABC) = (A'C'B') = (A''B''C'') = \text{const}.$$

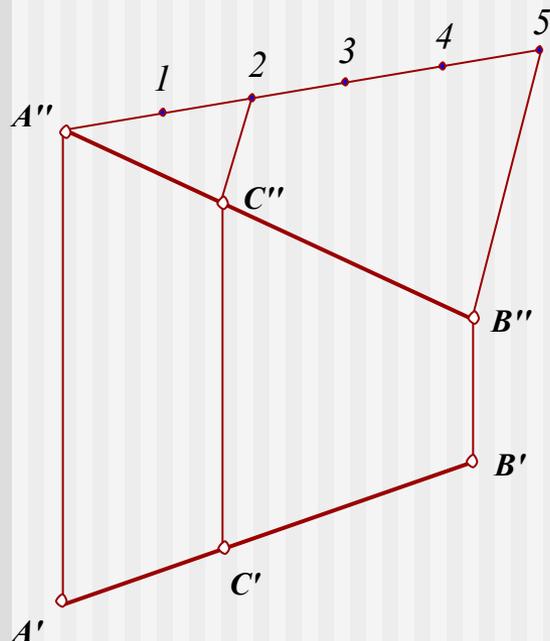


Рис. 19

Операция деления отрезка в заданном отношении.

Отрезок **AB** (рис. 19) нужно разделить точкой **C** в отношении **2:3**, считая от точки **A**. Операция деления отрезка в заданном отношении заключается следующим:

1) через любой конец одной проекции проводится прямая линия под произвольным острым углом, и на ней откладывается пять равных произвольных отрезков (число отрезков равно сумме чисел отношения);

2) конец пятого отрезка соединяется с проекцией **B''**, а через конец второго отрезка проводится прямая **2C''**  $\square$  **5B''**.

Эта прямая определяет положение фронтальной проекции точки **C''**, которая делит данный отрезок **A''B''** в отношении **2:3**.

С помощью проекционной связи определяется горизонтальная проекция **C'**, которая делит горизонтальную проекцию отрезка в заданном отношении.



назад

к вопросам

далее

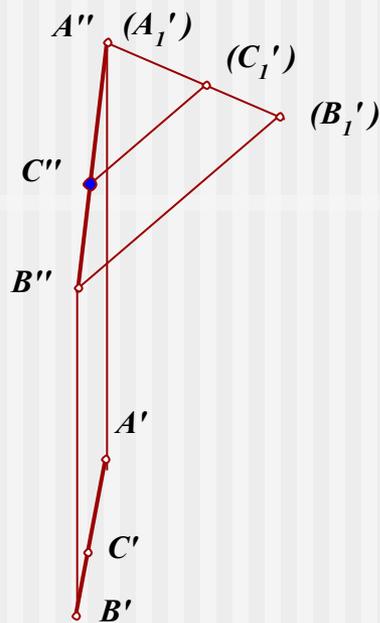


Рис. 20

Этот прием имеет большое значение при построении проекций точек, лежащих на проекциях прямых, круто наклоненных к оси проекций.

На рис. 20 нужно построить фронтальную проекцию точки  $C''$ . Можно воспользоваться проекционной связью, однако минимальное отклонение от вертикальности линии связи повлечет за собой большую ошибку. Построение будет значительно точнее, если отрезок  $AB$  разделить в отношении  $A'C' : C'B'$ .

Из точки  $A''$  проведем прямую под острым углом к  $A''B''$  (см. рис. 20), и на ней от точки  $A''$  отложим отрезки  $A'C'$  и  $C'B'$ .

$B_1'$  соединим с  $B''$  и параллельно этому направлению проведем  $C_1'C''$ , получим искомую фронтальную проекцию  $C''$ .

### 2.2.3. Следы прямой линии

Прямая линия общего положения может быть продолжена в обоих направлениях до бесконечности. При таком продолжении прямая обязательно должна пересечь плоскости проекций.

Точка пересечения прямой с плоскостью проекций называется следом этой прямой.

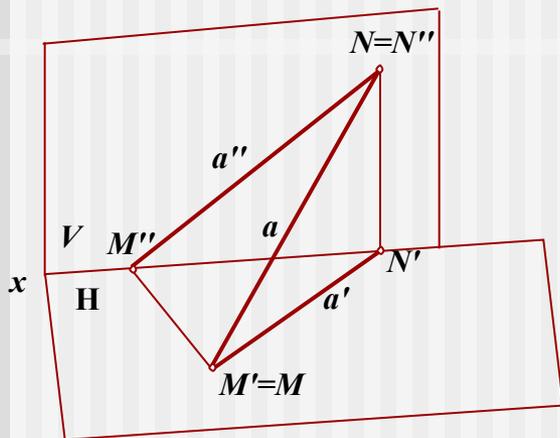


назад

к вопросам

далее

Точка пересечения прямой  $a$  с горизонтальной плоскостью называется горизонтальным следом и обозначается  $M$  (рис. 21), горизонтальная проекция  $M'$  совпадает с самим следом, а фронтальная проекция  $M''$  лежит на оси  $x$ . Пересечение прямой  $a$  с фронтальной плоскостью проекций  $V$  (точка  $N$ ) называется фронтальным следом. Фронтальная проекция  $N''$  совпадает с самим следом  $N$ , горизонтальная проекция  $N'$  лежит на оси проекций  $x$ .



На рис. 21

- $M$  – горизонтальный след;
- $M'$  - горизонтальная проекция горизонтального следа;
- $M''$  - фронтальная проекция горизонтального следа;
- $N$  – фронтальный след;
- $N'$  - горизонтальная проекция фронтального следа;
- $N''$  - фронтальная проекция фронтального следа.

Построение следов прямой на эюре:

1) фронтальная проекция  $A''B''$  продолжается до пересечения с осью  $x$  (рис. 22), и отмечается  $M''$  (фронтальная проекция горизонтального следа). Из  $M''$  проводится линия связи, и на пересечении с горизонтальной проекцией  $A'B'$  отмечается горизонтальная проекция горизонтального следа;

2) горизонтальная проекция отрезка  $A'B'$  продолжается до пересечения с осью  $x$ , и отмечается  $N'$  - горизонтальная проекция фронтального следа прямой  $AB$ . Из  $N'$  проводится линия связи, и на пересечении с продолжением фронтальной проекции  $A''B''$  отмечается фронтальная проекция фронтального следа  $N''$ .

Рис. 21

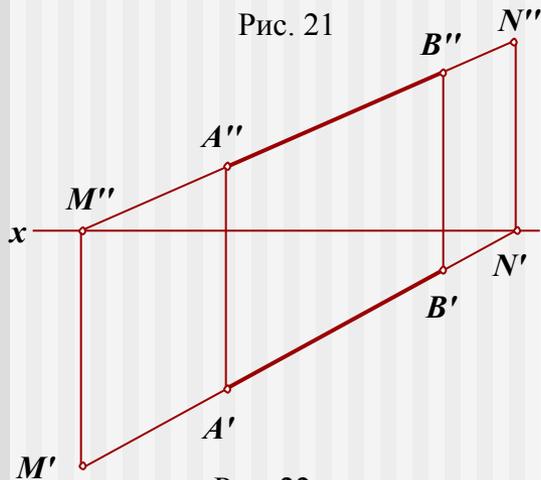


Рис. 22



назад

к вопросам

далее

## 2.3. Прямые частного положения

К прямым частного положения относятся прямые, параллельные или перпендикулярные плоскостям проекций. Прямые, параллельные плоскостям проекций, называются линиями уровня.

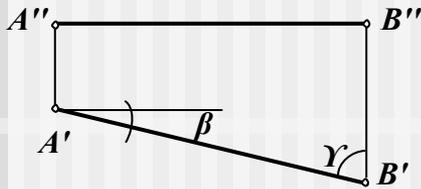


Рис. 23

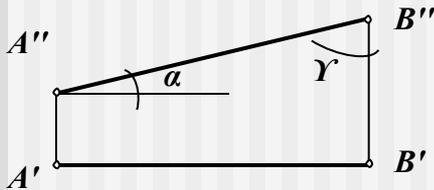


Рис. 24

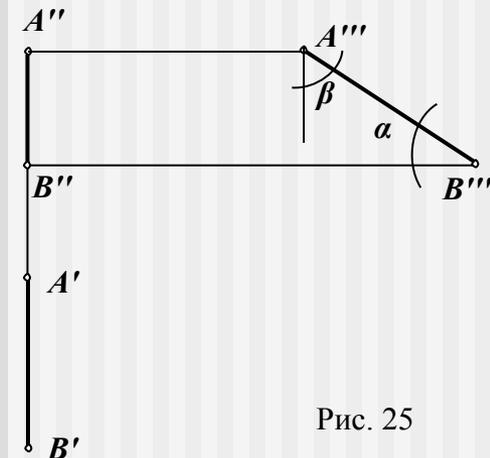


Рис. 25

### 2.3.1. Линии уровня

Прямая, параллельная горизонтальной плоскости проекций, называется **горизонтальной прямой**.

На рис. 23 дан эюр горизонтальной прямой, проекции которой обладают следующими свойствами:

- 1) фронтальная проекция горизонтальной прямой всегда горизонтальна;
- 2) горизонтальная проекция горизонтальной прямой определяет натуральную величину отрезка и углы наклона прямой к плоскостям  $V - \beta$  и  $W - \gamma$ .

Прямая, параллельная фронтальной плоскости проекций, называется **фронтальной прямой**. Проекции фронтальной прямой (рис. 24) обладают следующими свойствами:

- 1) горизонтальная проекция фронтальной прямой всегда горизонтальна;
- 2) фронтальная проекция фронтальной прямой определяет натуральную величину отрезка и углы наклона к плоскостям проекций  $H - \alpha$  и  $W - \gamma$ .

Прямая, параллельная профильной плоскости проекций, называется **профильной прямой** (рис. 25). Её свойства:

- 1) фронтальная и горизонтальная проекции профильной прямой на эюре располагаются вертикально;
- 2) профильная проекция профильной прямой определяет натуральную величину отрезка и углы наклона к плоскостям проекций: к  $V - \text{угол } \beta$  и к  $H - \text{угол } \alpha$  (см. рис. 25).



### 2.3.2. Проецирующие прямые

Вторая группа прямых частного положения – это прямые, перпендикулярные плоскостям проекций. Они по направлению совпадают с проецирующими лучами и поэтому называются проецирующими прямыми.

Прямая, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций, называется **горизонтально проецирующей прямой**. Проекции этой прямой обладают следующими свойствами:

- 1) горизонтальная проекция горизонтально проецирующей прямой вырождается в точку (рис. 26);
- 2) фронтальная проекция горизонтально проецирующей прямой располагается вертикально и определяет натуральную величину отрезков прямой.

Следует также отметить, что горизонтально проецирующая прямая параллельна фронтальной  $V$  и профильной  $W$  плоскостям проекций, а также параллельна оси  $z$ .

Прямая, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций, называется **фронтально проецирующей прямой**. Её свойства:

- 1) фронтальная проекция фронтально проецирующей прямой вырождается в точку;
- 2) горизонтальная и профильная проекции фронтально проецирующей прямой перпендикулярны соответственно осям  $x$  и  $z$  (рис. 27).

Фронтально проецирующая прямая параллельна горизонтальной и профильной плоскостям проекций, а также оси проекций  $y$ .

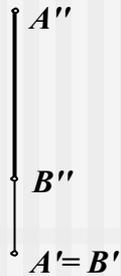


Рис. 26

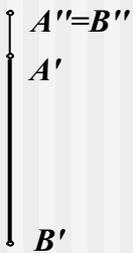


Рис. 27

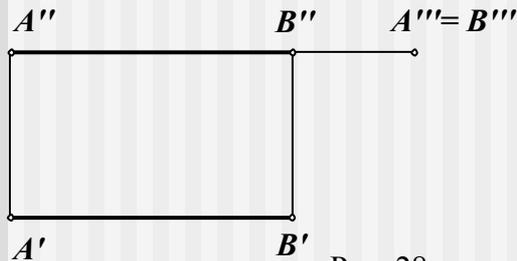


Рис. 28

**Профильно проецирующая прямая (рис. 28)** - перпендикулярна профильной плоскости проекций. Её свойства:

- 1) профильная проекция профильно проецирующей прямой вырождается в точку;
- 2) фронтальная и горизонтальная проекции профильно проецирующей прямой на эюре располагаются горизонтально, параллельно оси  $x$ .



## Литература

1. *Гордон В. О., Семенцов-Огиевский М. А.* Курс начертательной геометрии. М., 1962. С. 15 - 41.
2. *Фролов С. А.* Начертательная геометрия. М.: Машиностроение, 1979. С. 25 - 30, 46 – 51.
3. *Посвянский А. Д.* Краткий курс начертательной геометрии. М., 1965. С. 18 – 24, 31 – 40.

## Вопросы для самопроверки

1. В чем заключается метод Г. Монжа, как метод построения чертежа?
2. Как построить чертеж точки по координатам на закрепленном и безосном эпюре?
3. Дайте определение натуральной величины и угла наклона прямой общего положения к плоскостям проекций. В чем заключается метод прямоугольного треугольника?
4. Как разделить отрезок прямой на чертеже в заданном отношении?
5. Дайте определение следов прямой линии. Покажите, как строятся следы прямой линии на чертеже.
6. Сформулируйте свойства проекций линий уровня.
7. Сформулируйте свойства проекций проецирующих прямых.



## Задачи и упражнения

**Упражнение 1.** Построить на закрепленном эпюре три проекции точек, заданных координатами:

$A(12, 3, 5)$ ;  $B(10, 4, -2)$ ;  $C(8, -3, 6)$ ;  $D(6, -5, -3)$ ;  $E(4, 0, 3)$ ;  $F(2, 6, 0)$

$G(-1, 0, 0)$ .

**Упражнение 2.** Построить на чертеже точку  $A(5, 4, 3)$ , точку  $B$ , симметричную точке  $A$  относительно фронтальной плоскости проекций ( $V$ ), точку  $C$ , симметричную точке  $A$  относительно оси  $OX$ .

**Упражнение 3.** Построить три проекции точки  $A$ , если известно  $x_A=5$ ,  $l_y=7$ ,  $l_x=6$  ( $l_y$  и  $l_x$  – расстояние от точки  $A$  до оси  $OY$  и  $OX$  соответственно).

**Упражнение 4.** Самостоятельно сформулировать и решить задачи подобные упражнению 2 и 3.

**Задача 5.** Определить расстояние от точки  $A(10, 5, 4)$  до точки  $B(2, 2, 7)$ . Задачу решить в системе двух плоскостей проекций  $V/H$ .

**Задача 6.** Построить следы прямой линии ( $M$  – горизонтальный след,  $N$  – фронтальный след), заданной отрезком  $AB$ ,  $A(12, 8, 3)$ ,  $B(3, 2, 7)$ . На отрезке  $MN$  найти точку  $K$ , удаленную на 4 единицы от точки  $M$  и на три единицы от точки  $N$  (точка  $K$  делит отрезок  $MN$  в отношении 4 : 3), измерить и записать координаты точки  $K$  в масштабе чертежа.

**Упражнение 7.** Через точку  $A(10, 8, 2)$  провести прямую линию параллельно плоскости  $H$ , под углом  $30^\circ$  к фронтальной плоскости проекций  $V$ .

**Упражнение 8.** Построить прямую, все точки которой удалены от плоскости  $V$  вдвое дальше, чем от плоскости  $H$ , от плоскости  $H$  прямая удалена на 20 мм.

**Задача 9.** На прямой  $AB$ :  $A(10, 7, 2)$   $B(1, 1, 8)$  - построить точку  $C$ , одинаково удаленную от плоскостей проекций  $V$  и  $H$ . Записать координаты точки  $C$  в масштабе чертежа.



## 3. ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ

### 3.1. Параллельные прямые

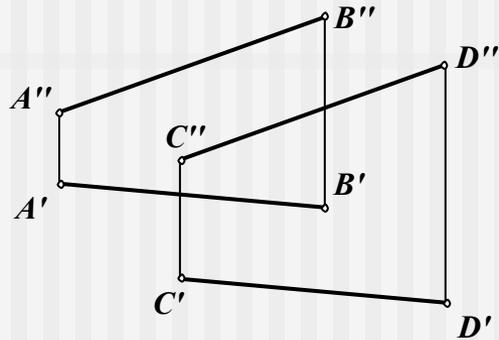


Рис. 29

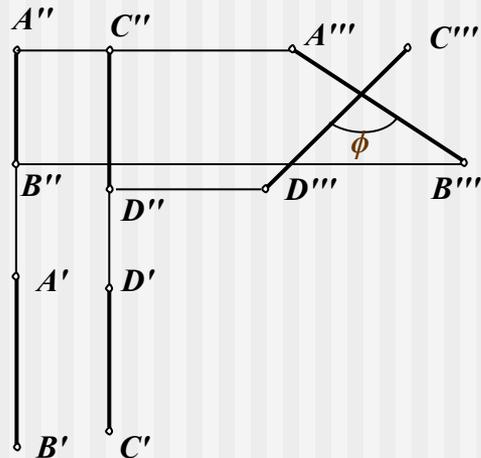


Рис. 30

Прямые в пространстве могут быть параллельными, могут пересекаться и скрещиваться.

Если прямые в пространстве параллельны, то их одноименные проекции параллельны (рис. 29).

Обратное утверждение – если две одноименные проекции двух прямых параллельны, то они являются проекциями параллельных прямых – не всегда справедливо. Исключение могут составлять линии уровня; так, на рис. 30 фронтальные и горизонтальные проекции прямых  $AB$  и  $CD$  параллельны, однако профильная проекция прямых указывает на то, что эти прямые скрещиваются.

### 3.2. Пересекающиеся прямые

Свойство проекций пересекающихся прямых: если прямые в пространстве пересекаются, то одноименные проекции этих прямых пересекаются и точки пересечения проекций лежат на одной линии связи (рис. 31).

### 3.3. Скрещивающиеся прямые

Если две прямые в пространстве не пересекаются и не параллельны, то они скрещиваются.

Свойство проекций скрещивающихся прямых – проекции скрещивающихся прямых могут пересекаться, но точки пересечения не лежат на одной линии связи (рис. 32).



назад

к вопросам

далее

Скрещивающиеся прямые характеризуются плоскостью параллелизма и углом скрещения.

Плоскость параллелизма - это плоскость, параллельная обеим скрещивающимся прямым.

Угол скрещения – угол между проекциями скрещивающихся прямых на плоскость параллелизма.

На рис. 30 скрещивающиеся прямые  $AB$  и  $CD$  – профильные прямые; следовательно, профильную плоскость проекций  $W$  можно считать плоскостью параллелизма.

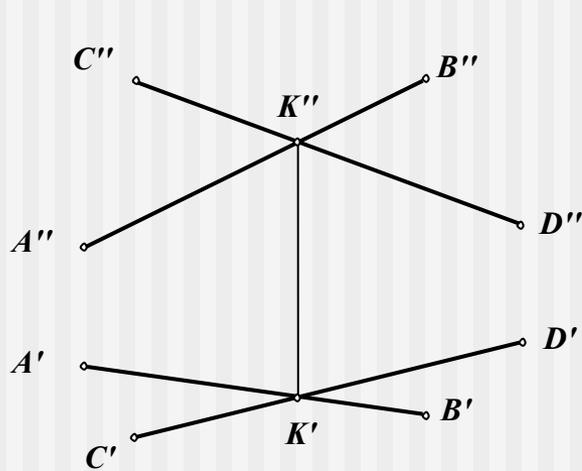


Рис. 31

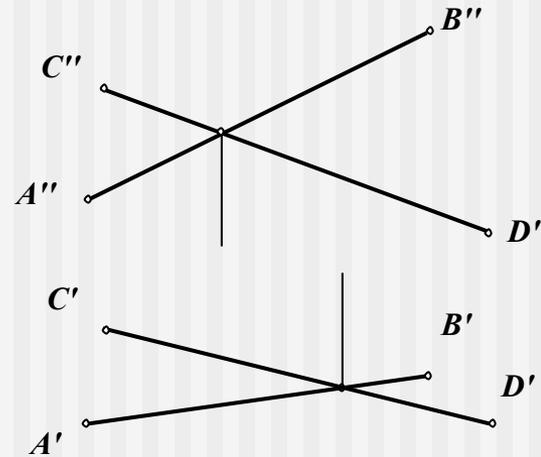


Рис. 32

Угол  $\phi$  между профильными проекциями прямых  $A''B''$  и  $C''D''$  (рис. 30) является углом скрещения этих прямых.



назад

к вопросам

далее

### 3.4. Проекции плоских углов

Две пересекающиеся прямые образуют плоский угол. Свойства проекций плоских углов представляют для начертательной геометрии определенный интерес. Свойство проекций острого и тупого плоских углов: если одна сторона острого или тупого плоского угла параллельна плоскости проекций, то на эту плоскость проекций острый угол проецируется в виде острого, тупой - в виде тупого.

Наибольший интерес представляет свойство проекций прямого плоского угла: **если одна сторона прямого плоского угла параллельна плоскости проекций, то на эту плоскость прямой плоский угол проецируется в натуральную величину.**

Это свойство может быть использовано при решении задачи на определение расстояний между геометрическими элементами, в частности расстояния от точки до линии уровня.

Пример: определить расстояние от точки  $C$  до горизонтальной прямой  $AB$  (рис. 33).

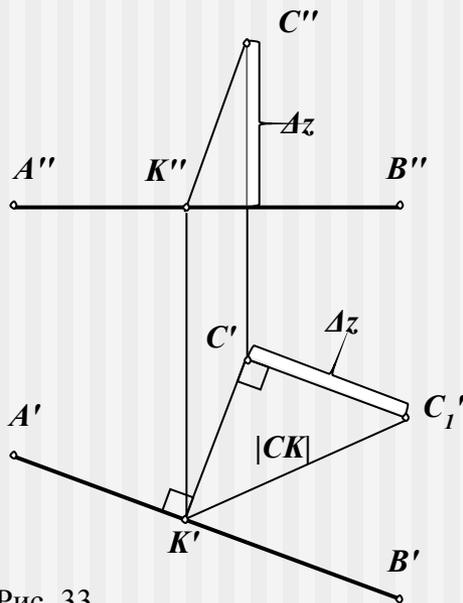


Рис. 33

Решение: расстояние от точки до прямой измеряется перпендикуляром, опущенным из точки  $C$  на прямую  $AB$ . Этот перпендикуляр с прямой  $AB$  составляет прямой плоский угол; в силу свойства проекций он спроецируется на плоскость  $H$  в натуральную величину. Поэтому:

- 1) из  $C'$  проводится перпендикуляр к  $A'B'$  и отмечается горизонтальная проекция  $K'$  - точка пересечения перпендикуляра с горизонтальной прямой  $AB$ ;
- 2) проводится линия проекционной связи из  $K'$  и на  $A''B''$  отмечается  $K''$ . Проекция  $C'K'$  и  $C''K''$  определяют расстояние от точки  $C$  до прямой  $AB$ ;
- 3) поскольку отрезок  $CK'$  - прямая общего положения, то натуральную величину  $CK'$  можно определить способом прямоугольного треугольника, изложенного в разделе 2.1. 



назад

к вопросам

далее

## Литература

1. *Гордон В. О.* Курс начертательной геометрии. М., 1962. С. 43 –46.

## Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте свойства проекций параллельных прямых.
2. Сформулируйте свойства проекций пересекающихся прямых.
3. Чем характеризуются скрещивающиеся прямые?
4. Сформулируйте свойство проекций прямого плоского угла.

## Задачи и упражнения

**Задача 1.** Через точку  $A$  провести прямую линию, пересекающую две заданные скрещивающиеся прямые  $l$  и  $m$  и ось  $OY$  (рис. 34).

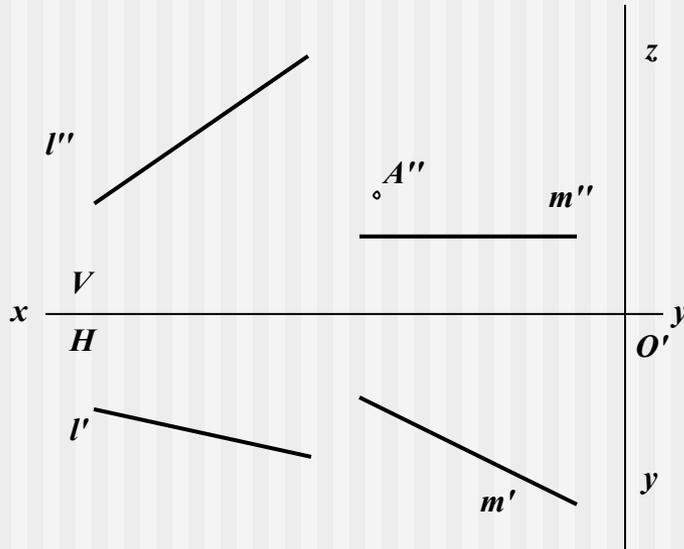


Рис. 34



назад

далее

**Задача 2.** Построить две проекции квадрата, если известно положение вершины  $A$ , а диагональ  $BD$  расположена на горизонтальной прямой (рис. 35).

**Упражнение 3.** Определить расстояние от точки  $A$  до фронтальной прямой  $l$  (рис. 36).

**Задача 4.** Построить две проекции правильного треугольника со стороной  $AB$ , расположенной на горизонтальной прямой  $l$  (рис. 37) и наклоненного к плоскости  $H$  под углом  $30^\circ$ .

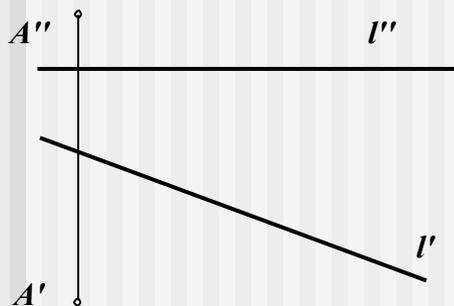


Рис. 35

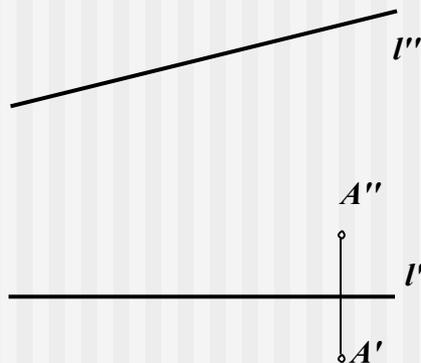


Рис. 36

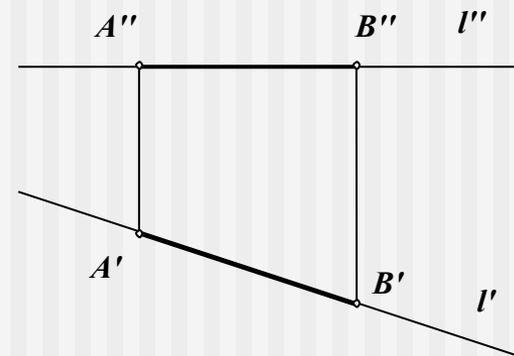
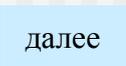


Рис. 37



назад



далее

## 4. ПЛОСКОСТЬ

### 4.1 Определение и изображение плоскости на чертеже

Плоскость в пространстве вполне определяется тремя точками. Задать плоскость в пространстве можно различными геометрическими элементами, но все они являются производными от простейшего случая – трех точек, не лежащих на одной прямой.

Плоскость в пространстве задается:

- тремя точками, не лежащими на одной прямой;
- одной точкой и прямой, не проходящей через эту точку;
- двумя пересекающимися прямыми;
- двумя параллельными прямыми;
- любой плоской фигурой.

На эюре плоскость задается проекциями выше перечисленных геометрических элементов.

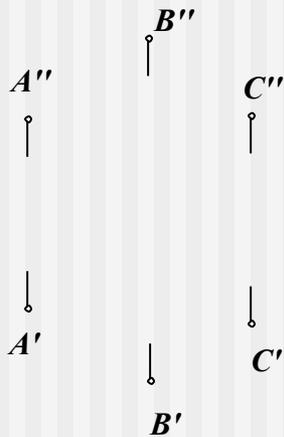


Рис. 38

плоскость на эюре задана проекциями трех точек, не лежащих на одной прямой.

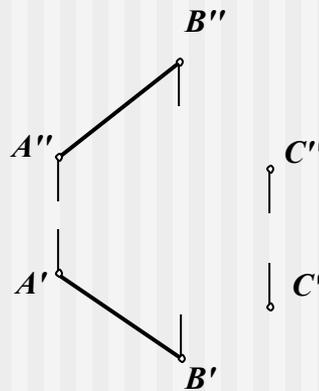


Рис. 39

плоскость на эюре задана проекциями точки  $C$  и прямой  $AB$  ( $C \notin AB$ ).

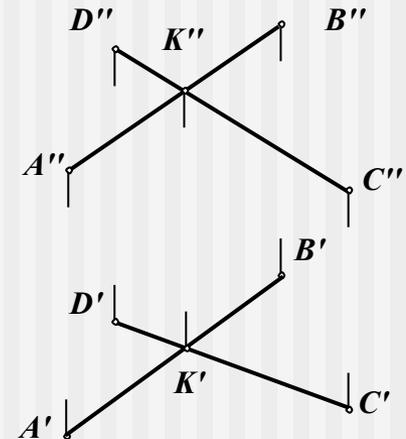


Рис. 40

проекции пересекающихся прямых  $AB$  и  $DC$  определяют на эюре плоскость.



назад

к вопросам

далее

Проекции параллельных прямых  $AB$  и  $CD$  (рис. 41) определяют плоскость на эюре. Треугольник  $ABC$  (задан на эюре проекциями – рис. 42) вполне определяет плоскость.

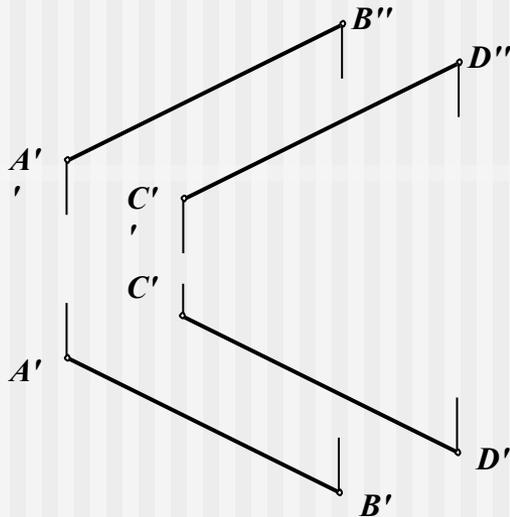


Рис. 41

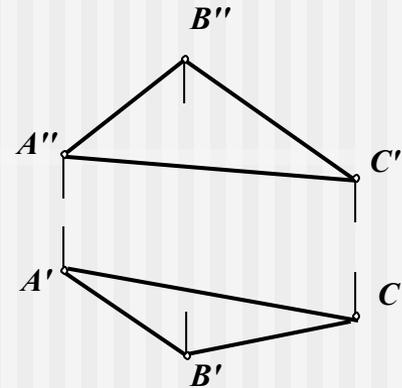


Рис. 42

Кроме перечисленных способов плоскость может быть задана на эюре следами. Если плоскость продолжать, то она, в конечном счете, пересечет плоскости проекций по прямым линиям, которые называются **следами данной плоскости**.

Плоскость  $\alpha$  (рис. 43) пересекается с плоскостями проекций  $H$ ,  $V$  и  $W$ , образуя следы:

$\alpha_H$  – горизонтальный след плоскости;

$\alpha_V$  – фронтальный след плоскости;

$\alpha_W$  – профильный след плоскости;

$\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$  – точки пересечения плоскости с осями проекций называются точками схода следов.



назад

к вопросам

далее



## 4.2. Точка и прямая в плоскости

### 4.2.1. Принадлежность точки и прямой плоскости

Плоскость как геометрический объект может содержать в себе точки, прямые и плоские фигуры – совокупность точек и прямых. Поэтому большое значение имеет признак принадлежности точки и прямой к плоскости. Этот признак может быть записан в виде двух предложений, которые обуславливают друг друга:

- 1) точка принадлежит плоскости, если лежит на прямой, принадлежащей этой плоскости;
- 2) прямая принадлежит плоскости, если имеет с ней две общие точки.

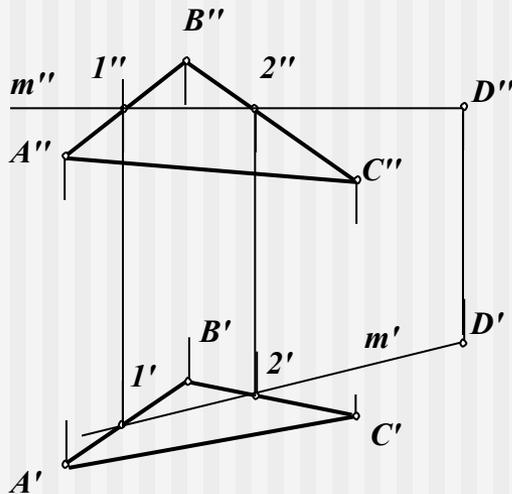


Рис. 45

Реализацию свойства принадлежности можно наглядно представить в виде следующего примера. В плоскости треугольника  $ABC$  лежит точка  $D$ ; нужно построить горизонтальную проекцию  $D'$ , если известно положение фронтальной проекции  $D''$  (рис. 45).

**Решение:** если точка  $D$  лежит в плоскости, можно провести в этой плоскости прямую, которая обязательно пройдет через точку  $D$  (см. рис. 45):

1) проводится фронтальная проекция прямой  $m$  ( $m''$ ) через проекцию  $D''$  (прямая  $m$  принадлежит плоскости треугольника  $ABC$ , так как имеет с ней две общие точки  $1$  и  $2$ ), отмечаются фронтальные проекции  $1''$  и  $2''$ ;

2) с помощью линий проекционной связи строим  $1'$  и  $2'$ , они определяют горизонтальную проекцию прямой  $m$  ( $m'$ );

3) с помощью линии проекционной связи на  $m'$  отмечается горизонтальная (искомая) проекция  $D'$ .



Плоскость  $\alpha$  на эюре рис. 46 задана следами, дана горизонтальная проекция  $A'B'$  - отрезка прямой, принадлежащей плоскости  $\alpha$ . Нужно построить фронтальную проекцию отрезка  $A''B''$ .

Если  $AB$  принадлежит плоскости  $\alpha$ , то она должна иметь с ней две общие точки:

1) продолжается проекция  $A'B'$  до пересечения с осью  $x$  и следом  $\alpha_H$  – получается горизонтальная проекция отрезка ( $1'2'$ );

2) если  $1'$  лежит на оси  $x$ , то  $1''$  должна лежать на  $\alpha_V$ , в противном случае  $AB$  не принадлежит плоскости  $\alpha$ . Также  $2''$  должна лежать на оси  $x$ ;

3) с помощью линий проекционной связи строится фронтальная проекция  $A''B''$  на проекции  $1''2''$ .

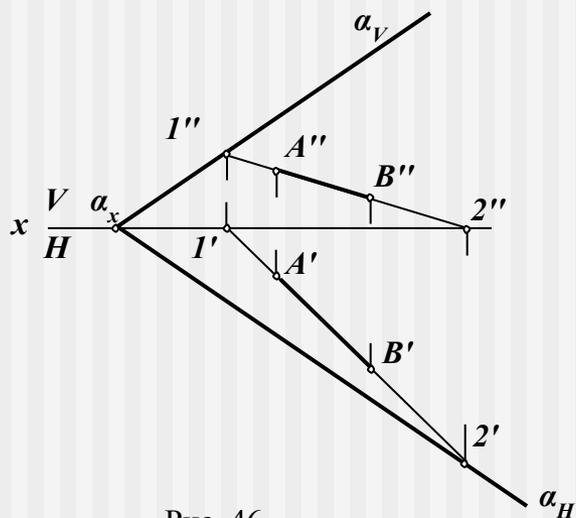


Рис. 46

Следствие – поскольку точка 2 фактически является горизонтальным, а точка 1 - фронтальным следом прямой  $AB$ , то можно сделать вывод, что *следы прямой, лежащей в плоскости, лежат на следах данной плоскости.*



назад

к вопросам

далее

## 4.2.2. Главные линии плоскости

Очень большое значение в начертательной геометрии имеют так называемые главные линии плоскости.

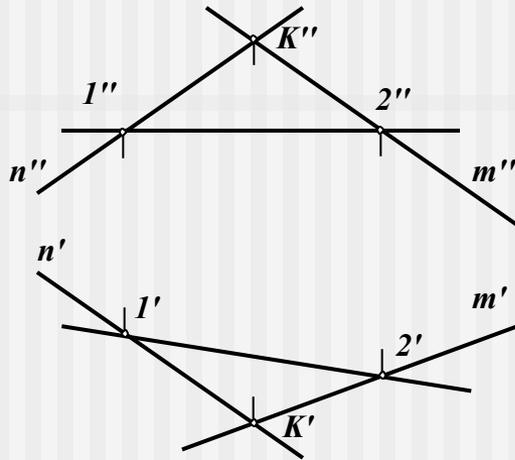


Рис. 47

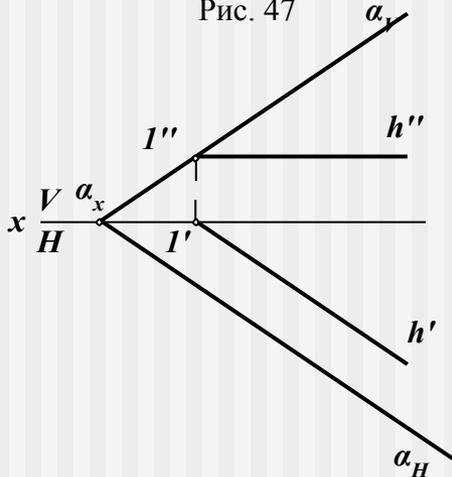


Рис. 48

**Горизонталь** – прямая, лежащая в плоскости и параллельная горизонтальной плоскости проекций. На рис. 47 в плоскости, заданной пересекающимися прямыми  $(m \cap n)$ , построена горизонталь  $(1-2)$ .

$(1'-2')$  – горизонтальная проекция горизонтали;

$(1''-2'')$  – фронтальная проекция горизонтали. Прямая  $(1-2)$  обладает всеми свойствами горизонтальной прямой и принадлежит плоскости  $m \cap n$ .

Горизонталь в плоскости  $\alpha$ , заданной следами, построена на рис. 48. Горизонталь  $h$  в плоскости  $\alpha$  проводится следующим образом:

$h''$  - фронтальная проекция горизонтали всегда горизонтальна (см. свойства проекций линий уровня). Точка  $I$  – фронтальный след горизонтали;

$h'$  - горизонтальная проекция горизонтали проводится параллельно горизонтальному следу плоскости  $\alpha_H$ , поскольку след фактически является горизонталью плоскости  $\alpha$ , а одноименные проекции двух горизонталей одной плоскости должны быть параллельны.



**Фронталь** плоскости – прямая, лежащая в плоскости и параллельная фронтальной плоскости проекций, обладает всеми свойствами фронтальной прямой.

На рис. 49 построена фронталь  $(1-2)$  в плоскости  $m \cap n$ , на рис. 50 – фронталь  $v$  в плоскости  $\alpha$ , заданной следами.

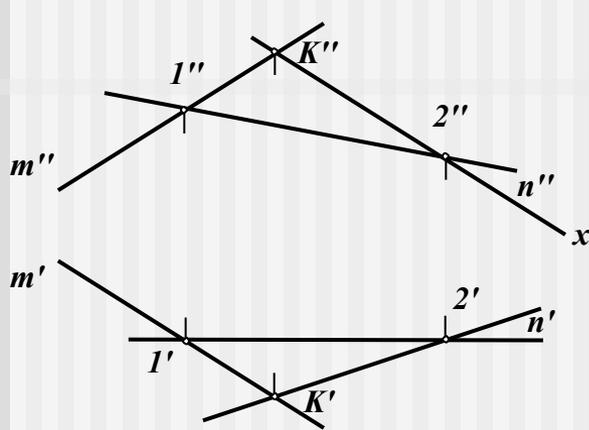


Рис. 49

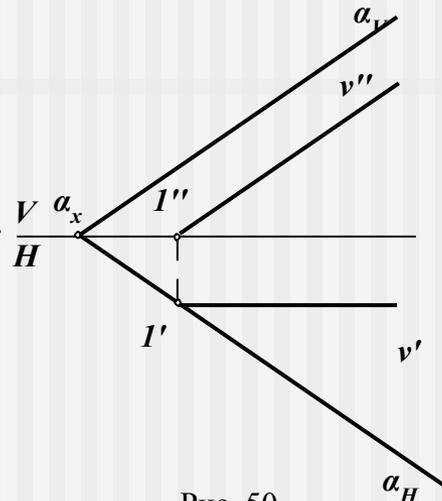


Рис. 50

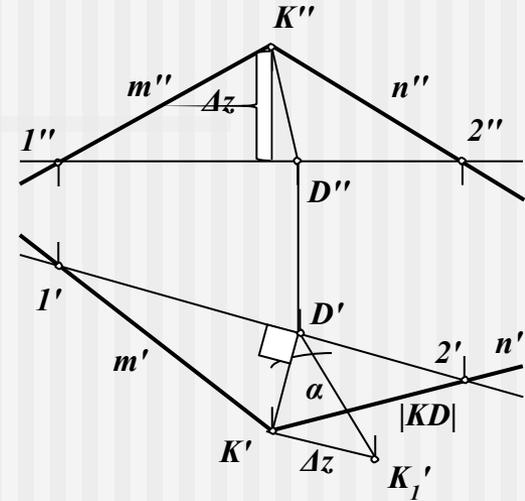


Рис. 51

В плоскости общего положения  $m \cap n$  (рис. 51) проведена горизонталь  $(1-2)$  и прямая  $(KD) \perp (1-2)$ .  $K'D'$  проводится перпендикулярно  $1'-2'$  на основании свойств проекций прямого плоского угла.

Способом прямоугольного треугольника определяется натуральная величина  $|KD|$  и угол наклона  $(KD)$  к плоскости проекций  $H$ .

Угол  $\alpha$  - линейный угол, образованный линией наибольшего ската с плоскостью  $H$ , измеряет двугранный угол или угол наклона плоскости  $m \cap n$  к горизонтальной плоскости проекций  $H$ .

Аналогичная операция производится при построении линии наибольшего уклона плоскости общего положения к фронтальной плоскости проекций.

Линия наибольшего уклона плоскости к горизонтальной плоскости проекций  $H$  называется **линией наибольшего ската** – это прямая, лежащая в плоскости и перпендикулярная горизонтали этой плоскости.

Линия наибольшего ската измеряет угол наклона данной плоскости к плоскости  $H$ .



назад

к вопросам

далее

### 4.3. Плоскости частного положения

4.3.1. Проецирующие плоскости - плоскости, перпендикулярные плоскостям проекций. Название этих плоскостей строится в зависимости от того, какой плоскости проекций перпендикулярна эта плоскость.

Горизонтально проецирующая плоскость – плоскость, перпендикулярная плоскости  $H$ , проецирующие лучи совпадают с этой плоскостью, и ее горизонтальная проекция «вырождается» в прямую линию (рис. 52).

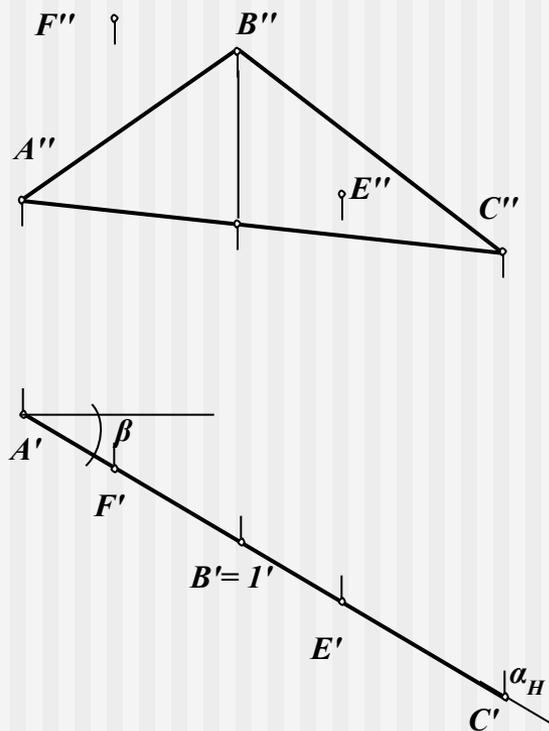


Рис. 52

На фронтальную плоскость проекций горизонтально проецирующая плоскость треугольника  $ABC$  отображается всем полем точек  $V$ .

Все точки и прямые, принадлежащие горизонтально проецирующей плоскости (треугольник  $ABC$ ), при проецировании на плоскость  $H$  попадают на прямую  $A'B'C'$ . Принадлежность горизонтальной проекции точки или прямой к проекции  $A'B'C'$  - достаточное условие принадлежности точки и прямой данной плоскости. Точки  $E$ ,  $F$  и прямая  $B-I$  принадлежат плоскости  $ABC$ , поскольку горизонтальные проекции их лежат на  $A'B'C'$ .

Если продолжить плоскость  $ABC$  до пересечения с горизонтальной плоскостью проекций, то полученный горизонтальный  $\alpha_H$  след (см. рис. 52) также совпадает с проекцией  $A'B'C'$ , поэтому в литературе можно встретить название «горизонтальный след-проекция горизонтально проецирующей плоскости».

Следует отметить положение фронтали в горизонтально проецирующей плоскости, которая будет являться горизонтально проецирующей прямой  $B-I$  (см. рис. 52).



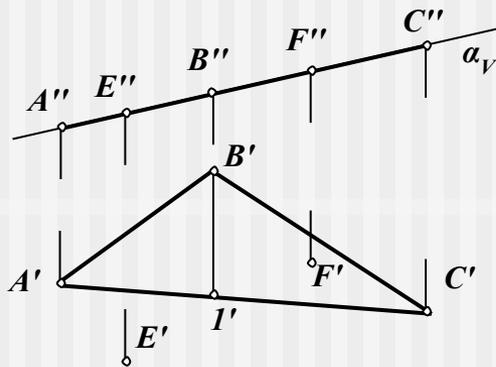


Рис. 53

**Фронтально проецирующая плоскость** – плоскость, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций (рис. 53).

На горизонтальную плоскость проекций фронтально проецирующая плоскость отображается всем полем точек, на фронтальную плоскость проекций она «вырождается» в прямую линию или определяется следом-проекцией  $A''B''C'' = \alpha_V$ .

Принадлежность точек и прямых плоскости  $ABC$  обуславливается принадлежностью их фронтальных проекций фронтальному следу-проекции. **Горизонталь  $B'I$  фронтально проецирующей плоскости  $ABC$  является фронтально проецирующей прямой.**

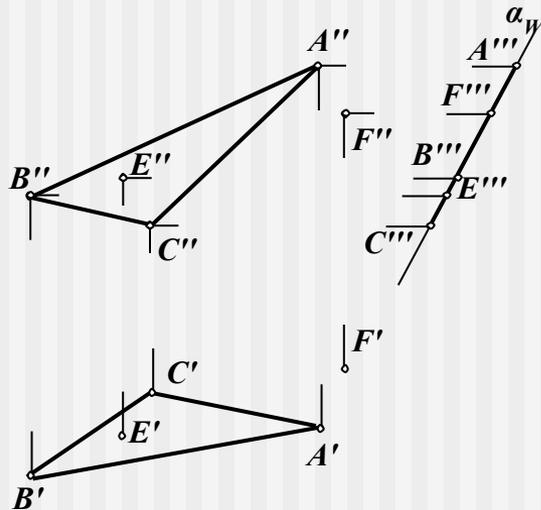


Рис. 54

**Профильно проецирующая плоскость** – плоскость, перпендикулярная профильной плоскости проекций (рис. 54).

Принадлежность точек и прямых определяется принадлежностью их профильных проекций профильному следу-проекции этой плоскости.

Интересно отметить, что в этой плоскости горизонталь и фронталь совпадают и одновременно являются профильно проецирующей прямой.



назад

к вопросам

далее

**4.3.2. Плоскости уровня** - плоскости, параллельные плоскостям проекций. Название их строится в зависимости от того, какой плоскости проекций будет параллельна данная плоскость.

**Горизонтальная плоскость** – плоскость, параллельная горизонтальной плоскости проекций  $H$ .

Горизонтальная плоскость проецируется на плоскость  $H$  всем полем точек, причем все геометрические элементы, принадлежащие ей (отрезки прямых, кривых линий, плоские фигуры, углы и т. д.), на плоскость  $H$  отображаются в натуральную величину.

На фронтальную плоскость проекций горизонтальная плоскость

«вырождается» в горизонтальную прямую линию (рис. 55).

Принадлежность геометрических элементов горизонтальной плоскости определяется принадлежностью их фронтальных проекций «вырожденной» фронтальной проекции плоскости. Точка  $D$  принадлежит плоскости  $ABC$ , поскольку фронтальная проекция  $D''$  принадлежит  $A''B''C''$  - фронтальной проекции горизонтальной плоскости.

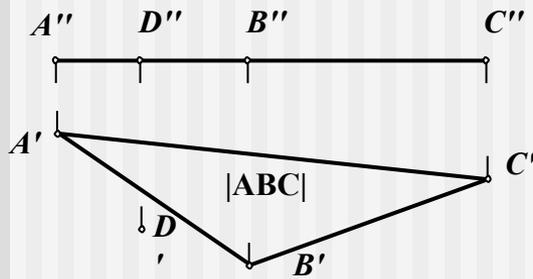


Рис. 55

Горизонтальная плоскость может рассматриваться как частный случай фронтально проецирующей плоскости, поэтому она обладает всеми свойствами фронтально проецирующей плоскости.

**Фронтальная плоскость** (рис. 56) параллельна фронтальной плоскости проекций, отображается на нее всем полем точек. Фронтальные проекции геометрических элементов (отрезков прямых и кривых линий, плоские фигуры, углы и т. д.), принадлежащих фронтальной плоскости, определяют их натуральную величину. Горизонтальная проекция фронтальной плоскости (см. рис. 56)  $A'B'C'$  является горизонтальной прямой и определяет принадлежность геометрических элементов данной плоскости –  $D$  ( $D'$ ,  $D''$ ), принадлежит плоскости  $ABC$ , а  $E$  ( $E'$ ,  $E''$ ) не принадлежит плоскости  $ABC$ . Фронтальную плоскость можно рассматривать как частный случай горизонтально проецирующей плоскости.

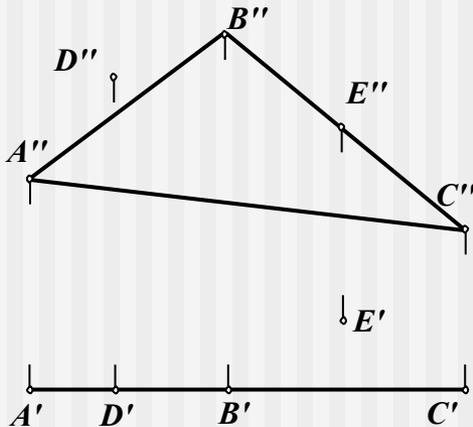


Рис. 56



назад

к вопросам

далее

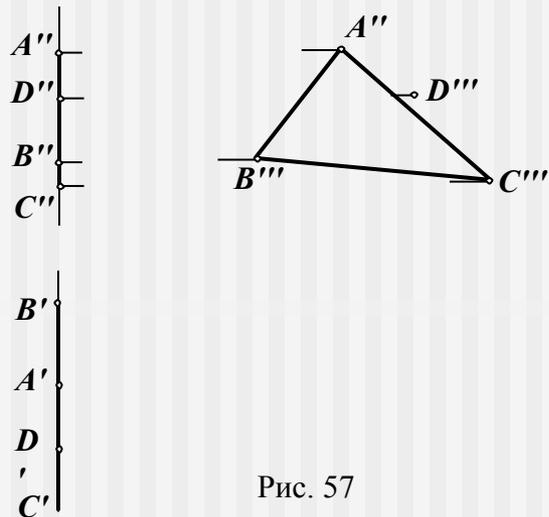


Рис. 57

Профильная плоскость – плоскость, параллельная профильной плоскости проекций  $W$ , отображается на нее всем полем точек (рис. 57).

Геометрические элементы, принадлежащие профильной плоскости, проецируются на  $W$  в натуральную величину. Горизонтальная и фронтальная проекции профильной плоскости вырождаются в прямые линии, расположенные на чертеже вертикально (см. рис. 57), и определяют принадлежность геометрических элементов данной плоскости. Точка  $D$  принадлежит плоскости  $ABC$ , так как проекции  $D''$  и  $D'$  принадлежат вырожденным проекциям плоскости – это достаточное условие принадлежности.

### Литература

1. *Гордон О. В., Семенцов-Огиевский М. А.* Курс начертательной геометрии. М., 1962. С. 56.
2. *Посвянский А. Д.* Краткий курс начертательной геометрии. М.: Высшая школа, 1965. С. 31 – 40, 70 – 72.

### Вопросы для самопроверки

1. Какими способами можно задать плоскость в пространстве?
2. Как задается плоскость на эюре?
3. Дайте определение следов плоскостей.
4. Сформулируйте принадлежность точки и прямой к плоскости.
5. Какие линии в плоскости называются главными?
6. Как провести в плоскости горизонталь?
7. Что такое линия наибольшего ската плоскости?
8. Дайте определение проецирующих плоскостей. Сформулируйте условия принадлежности точек и прямых этой плоскости.
9. Чем является горизонталь во фронтально проецирующей плоскости?



назад

далее

## Задачи и упражнения

**Задача 1.** Достроить проекцию пятиугольника (рис. 58).

**Задача 2.** Определить углы наклона плоскости треугольника  $ABC$  к горизонтальной и фронтальной плоскостям проекций (рис. 59).

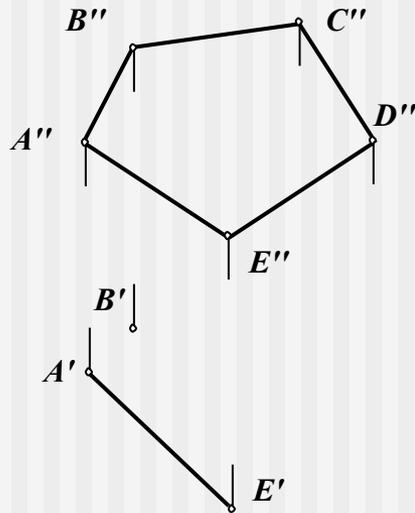


Рис. 58

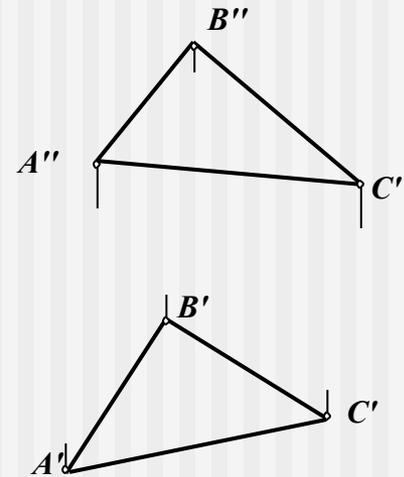


Рис. 59



назад

далее

**Задача 3.** Построить следы ( $\alpha_H$  и  $\alpha_V$ ) плоскости, заданной на чертеже треугольником  $ABC$  (рис. 60).

**Задача 4.** Определить расстояние от точки  $D$  до горизонтально проецирующей плоскости  $ABC$  (рис. 61).

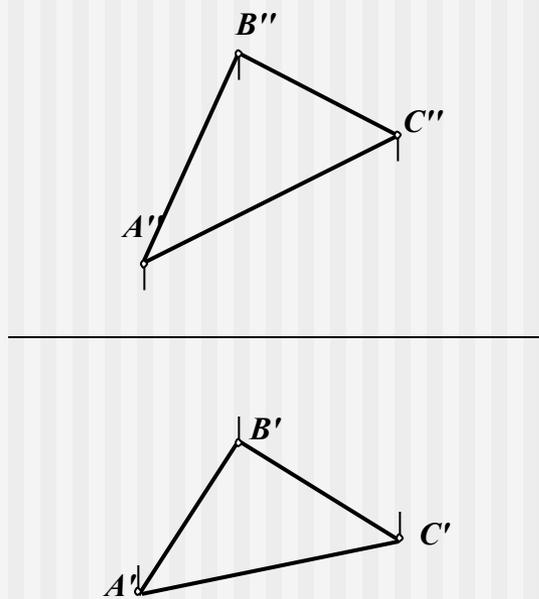


Рис. 60

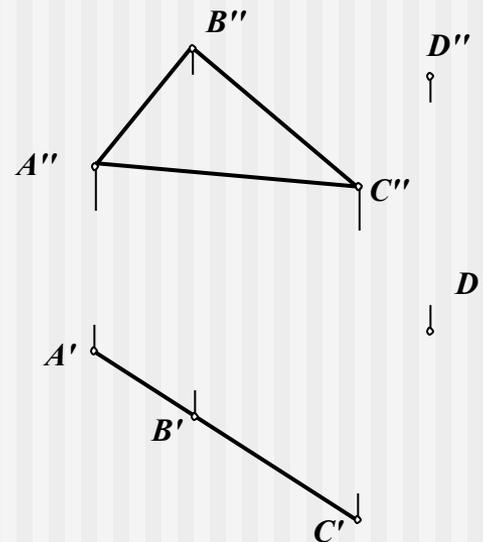


Рис. 61

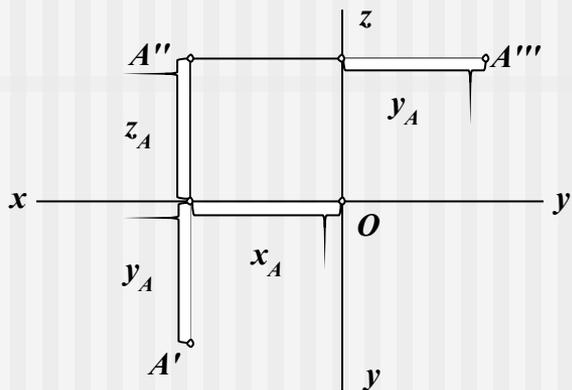


назад

далее

# Комментарии к задачам и упражнениям разделов 2 - 6

## Тема: «ТОЧКА И ПРЯМАЯ ЛИНИЯ НА ЧЕРТЕЖЕ»



**Упражнение 1** комментариев не требует, здесь реализуется алгоритм построения точки (рис. 86):

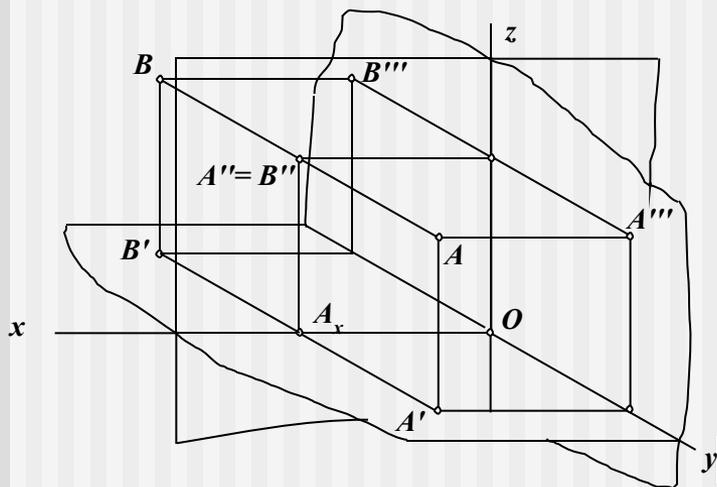
Отрицательные координаты откладываются по осям в противоположную сторону от начала координат  $O$ .

### Упражнение 2.

Точка, симметричная относительно плоскости, имеется в виду зеркальная симметрия, то есть точка  $B$  имеет координаты  $x_B = x_A$ ,  $z_B = z_A$  и  $y_B = -y_A$ , координаты  $y$  точки  $B$  отличается знаком от координаты  $y$  точки  $A$ .

Можно построить аксонометрическое изображение (рис. 87).

Этим рисунком можно воспользоваться для построения точки  $C$ . Упражнение должно быть выполнено на закрепленном эпюре.



назад

к вопросам

далее

**Упражнение 3.** В этом упражнении  $l_y$  и  $l_x$  - расстояния точки  $A$  от осей проекций  $y$  и  $x$  соответственно. Для решения можно воспользоваться аксонометрической моделью, как в предыдущем случае, но желательно эту операцию проделать мысленно (в уме), а пример решить на эюре, для этого нужно определить как изображаются на эюре величины  $l_y$  и  $l_x$ .

**Упражнение 4.** Существует еще несколько вариантов упражнений 2 и 3, нужно построить на эюре вариант, отличный от заданного. Очень полезно проанализировать все возможные варианты упражнений 2 и 3.

**Задача 5.** Строятся две проекции точек, одноименные проекции соединяются – получается чертеж прямой  $AB$ . Способом прямоугольного треугольника определятся натуральная величина отрезка  $AB$ .

**Задача 6.** Прямая линия общего положения, заданная отрезком  $AB$ , пересекается с плоскостью проекций  $H$  в точке  $M$  (отмечаются её проекции) и с плоскостью проекций  $V$  в точке  $N$  (проекция  $N$ ). На прямой  $MN$  найти точку  $K$ , которая делит отрезок  $MN$  в отношении  $4 : 3$  от точки  $M$  (см. пропорциональное деление отрезка).

**Упражнение 7.** Возможны два варианта решения упражнения.

**Упражнение 8.** По условию нужно постараться определить положение прямой линии, используя свойства проекций этой прямой.

**Задача 9.** Задача имеет несколько решений, очень полезно попытаться найти все возможные.



назад

далее

## Тема: «ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ ЛИНИЙ»

**Задача 1.** Ключом решения задачи является точка  $B$ , лежащая на оси  $OY$ , если правильно определено положение  $B''$  - фронтальной проекции точки  $B$ , то все операции дальнейшего решения задачи сводятся к свойству проекций пересекающихся прямых.

**Задача 2.** 1. Нужно вспомнить, что такое квадрат и все его свойства.

2. На основании свойств проекций прямого плоского угла и способа прямоугольного треугольника решение задачи не представляет сложности.

**Упражнение 3.** В упражнении реализуется свойство проекций прямого плоского угла. Натуральная величина расстояния определяется способом прямоугольного треугольника.

**Задача 4.** 1. Нужно знать свойства правильного треугольника.

2. Для решения задачи используется свойство проекций прямого плоского угла и способ прямоугольного треугольника.

## Тема: «ПЛОСКОСТЬ»

**Задача 1.** Нужно воспользоваться свойством принадлежности точки и прямой плоскости.

**Задача 2.** Угол наклона плоскости общего положения к плоскости проекций определяется с помощью линий наибольшего уклона плоскости (см. главные линии плоскости). Величина углов наклона определяется способом прямоугольного треугольника.

**Задача 3.** Для решения задачи нужно знать свойство прямой, лежащей в плоскости, - следы прямых, лежащих в плоскости, лежат на следах этой плоскости.

**Задача 4.** Что можно сказать о положении прямой линии, перпендикулярной горизонтально проецирующей плоскости? После решения этого вопроса решение задачи очевидно.



назад

Настоящее учебное пособие предназначено для изучения начертательной геометрии в 10 – 11-х классах средней школы в экспериментальном порядке и в колледжах, а также для студентов, обучающихся заочно.

Рецензенты:

В. Н. Бабич – канд. техн. наук, доцент кафедры «Теория искусства, архитектуры и дизайна» Уральской государственной архитектурно-художественной академии.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Уральского государственного горного университета

Компьютерная верстка: Сиразутдинова Н.Б.



назад