Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ

Факультет национальной безопасности

Раздел 3 тема № 2

«СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ»

Лекция № 3

профессор Резниченко Александр Васильевич

Москва – 2015

УЧЕБНЫЕ ВОПРОСЫ:

1. Многомерная случайная величина и закон ее распределения
2. Функция и плотность распределения двумерной случайной величины
3. Числовые характеристики двумерной случайной величины

Литература

1. Кремер Н.Ш. «Теория вероятностей и математическая статистика». Учебник для вузов. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012.
2. «Математика для экономистов от арифметики до эконометрики: базовый курс / Под ред. профессора Н.Ш. Кремера. – М.: «ИД Юрайт», 2012.
3. «Математика: Математический анализ. Дифференциальные уравнения. Теория вероятностей. Математическая статистика». Учебно-методическое пособие / Под ред. А.Н. Данчула. М.: Изд-во РАГС, 2004.

ПЕРВЫЙ ВОПРОС

Многомерная случайная величина и закон ее распределения

Определение.

Случайной *называется величина, которая в результате испытания может принять то или иное значение из некоторой совокупности своих возможных значений, причем заранее неизвестно какое именно.*

Определение.

Если результат испытания характеризуется не одной случайной величиной, а некоторой системой случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, *то ее называют* **многомерной** (*n* - мерной) **случайной величиной** или случайным вектором $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Пример.

Подбрасывают одновременно две игральные кости; случайная величина X – сумма очков, полученных в результате испытания; случайная величина Y – их произведение.

Показать, что двумерная случайная величина (X,Y) есть функция элементарных исходов (событий) ω.

Решение.

Множество элементарных исходов (пространство элементарных событий) состоит из 36 элементарных исходов, т.е.

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_{36}\} = \{1/1, 1/2, ..., 1/6, 2/1, 2/2, ..., 2/6, ..., 6/1, 6/2, ..., 6/6\},$$

где элементарный исход, например $\omega_6 = 1/6$, означает выпадение при подбрасывании ***первой игральной кости*** **1** очка и ***второй кости*** — **6** очков.

Если результатом испытания является какой-нибудь элементарный исход (событие) ω_i, то случайные величины X и Y получат определенные значения; например, при $\omega_6 = 1/6$ $X=7$, $Y=6$.

Совокупность этих значений (X,Y) представляет, таким образом, ***функцию элементарных исходов*** (событий) ω_i.

Теоретико-множественная трактовка понятия многомерной случайной величины.

Поскольку любая случайная величина X_i ($i = 1,2,...,n$) в теоретико-множественной трактовке есть функция элементарных событий ω, входящих в пространство элементарных событий Ω ($\omega \in \Omega$), то и ***многомерная случайная величина*** есть функция элементарных событий ω:

$$(X_1, X_2, ..., X_n) = f(\omega),$$

т.е. каждому элементарному событию ω ставится в соответствие несколько действительных чисел $x_1, x_2, ..., x_n$, которые приняли случайные величины $X_1, X_2, ..., X_n$ в результате испытания.

Другими словами вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ называется ***реализацией*** случайного вектора $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$.

Определение.

Если результат испытания характеризуется не одной случайной величиной, а некоторой системой случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, *то ее называют* **многомерной** *(n - мерной)* **случайной величиной** *или случайным вектором* $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Примеры многомерных случайных величин:

1. Успеваемость выпускника вуза характеризуется системой n случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — оценками по различным предметам, проставленными в приложении к диплому.

2. Погода в данном месте в определенное время суток может быть охарактеризована системой случайных величин: X_1 − температура; X_2 − влажность; X_3 − давление; X_4 − скорость ветра и т.п.

Случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$, входящие в систему, могут быть как дискретными (**пример 1**), так и непрерывными (**пример 2**).

Геометрически двумерную (***X***, ***Y***) и трехмерную (***X***, ***У***, ***Z***) случайные величины можно изобразить ***случайной точкой*** или ***случайным вектором плоскости*** O_{xy} или трехмерного пространства O_{xyz}, при этом случайные величины ***X***, ***Y*** или ***X***, ***Y***, ***Z*** являются составляющими этих векторов.

В случае ***n***-мерного пространства (***n*** > 3) также говорят о случайной точке или случайном векторе этого пространства, хотя геометрическая интерпретация в этом случае теряет свою наглядность.

Наиболее полным, исчерпывающим описанием ***многомерной случайной величины*** является ***закон ее распределения***.

При конечном множестве возможных значений многомерной случайной величины такой закон может быть задан в форме таблицы (матрицы), содержащей всевозможные сочетания значений каждой из одномерных случайных величин, входящих в систему, и соответствующие им вероятности.

Матрица распределения двумерной дискретной случайной величины

$x_i \backslash y_j$	y_1	…	y_j	…	y_m	$\sum_{j=1}^{m}$
x_1	p_{11}	…	p_{1j}	…	p_{1m}	p_1
…	…	…	…	…	…	…
x_i	p_{i1}	…	p_{ij}	…	p_{im}	p_i
…	…	…	…	…	…	…
x_n	p_{n1}	…	p_{nj}	…	p_{nm}	p_n
$\sum_{i=1}^{n}$	p_1	…	p_j	…	p_m	$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$

$$p_i = P(X = x_i) = P[(X = x_i)(Y = y_1) + (X = x_i)(Y = y_2) + \ldots + (X = x_i)(Y = y_m) =$$

$$= p_{i1} + p_{i2} + \ldots + p_{ij} + \ldots + p_{im} = \sum_{i=1}^{m} p_{ij}.$$

Таким образом, чтобы по таблице распределения найти вероятность того, что одномерная случайная величина примет определенное значение, надо просуммировать вероятности p_{ij} из соответствующей этому значению строки (столбца) данной таблицы.

Определение.

Если зафиксировать значение одного из аргументов, например, положить $Y = y_j$ то полученное распределение случайной величины X называется **условным распределением X при условии $Y = y_j$**.

Вероятности $p_j(x_i)$ или $P(x_i|y_j)$ этого распределения будут **условными вероятностями** события $X = x_i$, найденными в предположении, что событие $Y = y_j$ произошло.

Из определения условной вероятности:

$$p_j(x_i) = P(x_i \mid y_j) = \frac{P[(X = x_i)(Y = y_j)]}{P[(Y = y_j)]} = \frac{p_{ij}}{p_j}.$$

Аналогично условное распределение случайной величины Y при условии $X = x_i$ задается с помощью условных вероятностей:

$$p_i(y_j) = P(y_j \mid x_i) = \frac{P[(X = x_i)(Y = y_j)]}{P[(X = x_i)]} = \frac{p_{ij}}{p_i}.$$

Пример.

Закон распределения дискретной двумерной случайной величины (X, Y) задан в таблице:

x_i \ y_j	**-1**	**0**	**1**	**2**
1	0,10	0,25	0,30	0,15
2	0,10	0,05	0,00	0,05

Найти:

а) законы распределения одномерных случайных величин X и Y;

б) условные законы распределения случайной величины X при условии $Y=2$ и случайной величины Y при условии $X=1$;

в) вычислить $P(Y < X)$ и $P(Y \geq X)$.

Решение.

а) Случайная величина X может принимать значения:

$X = 1$ с вероятностью $p_1 = 0{,}10 + 0{,}25 + 0{,}30 + 0{,}15 = 0{,}8$;

$X = 2$ с вероятностью $p_2 = 0{,}10 + 0{,}05 + 0{,}00 + 0{,}05 = 0{,}2$.

$x_i \backslash y_j$	-1	0	1	2
1	0,10	0,25	0,30	0,15
2	0,10	0,05	0,00	0,05

Следовательно ее закон распределения

X :

x_i	1	2
p_i	0,8	0,2

Аналогично закон распределения

Y :

y_j	-1	0	1	2
p_j	0,2	0,3	0,3	0,2

б) Условный закон распределения ***X*** при условии, что ***Y*** = 2, получим, если вероятности p_{ij}, стоящие в последнем столбце исходной таблицы, разделим на их сумму, т.е. $p(Y = 2) = 0{,}2$.

Получим

x_i \ y_j	-1	0	1	2
1	0,10	0,25	0,30	0,15
2	0,10	0,05	0,00	0,05

$X_{Y=2}$:

x_i	1	2
$p_j(x_i)$	0,75	0,25

Аналогично для получения условного закона распределения ***Y*** при условии ***X*** = 1 вероятности p_{ij}, стоящие в первой строке исходной таблицы, делим на их сумму, т.е. на $p(X = 1) = 0{,}8$.

Получим

$Y_{X=1}$:

y_j	-1	0	1	2
$p_i(y_j)$	0,125	0,3125	0,375	0,1875

в) Для нахождения вероятностей $P(Y < X)$ складываем вероятности событий p_{ij}, из таблицы, для которых $y_j < x_i$:

x_i \ y_j	-1	0	1	2
1	0,10	0,25	0,30	0,15
2	0,10	0,05	0,00	0,05

Получим $P(Y < X) = 0{,}10 + 0{,}25 + 0{,}10 + 0{,}05 + 0{,}00 = 0{,}5.$

Аналогично для нахождения вероятностей $P(Y \geq X)$ складываем вероятности событий p_{ij}, из таблицы, для которых $y_j \geq x_i$

Получим $P(Y \geq X) = 0{,}30 + 0{,}15 + 0{,}05 = 0{,}5.$

ВТОРОЙ ВОПРОС

Функция и плотность распределения двумерной случайной величины

Определение.

Функцией распределения n-мерной случайной величины ($\boldsymbol{X_1}$, $\boldsymbol{X_2}$, ..., $\boldsymbol{X_n}$) называется функция $F(x_1, x_2, ..., x_n)$, выражающая вероятность совместного выполнения $\boldsymbol{n}$ неравенств*:

$$\boldsymbol{X_1} < x_1, \boldsymbol{X_2} < x_2, ..., \boldsymbol{X_n} < x_n,$$

т.е.

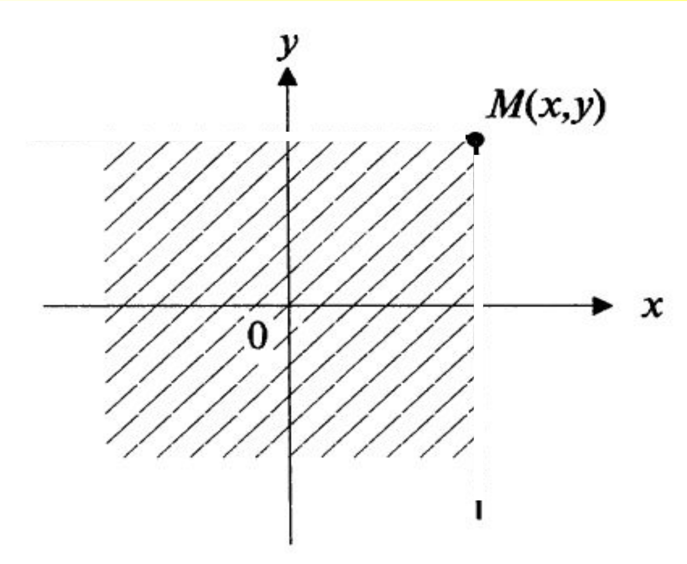
$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X_1} < x_1, \boldsymbol{X_2} < x_2, ..., \boldsymbol{X_n} < x_n).$$

В двумерном случае для случайной величины ($\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{У}$) функция распределения $F(x, y)$ определяется равенством:

$$F(x, y) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X} < x, \boldsymbol{Y} < y).$$

---

* Функцию $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ называют также ***совместной функцией распределения*** случайных величин $\boldsymbol{X_1}$, $\boldsymbol{X_2}$, ..., $\boldsymbol{X_n}$



Геометрически функция распределения $F(x,y)$ означает вероятность попадания случайной точки (X,Y) в заштрихованную область — бесконечный квадрант, лежащий левее и ниже точки $M(x,y)$.

Правая и верхняя границы области в квадрант не включаются — это означает, что функция распределения непрерывна слева по каждому из аргументов.

В случае ***дискретной двумерной случайной величины*** ее функция распределения определяется по формуле:

$$F(x,y)=\sum_{i}\sum_{j} p_{ij},$$

где суммирование вероятностей распространяется на все i, для которых $x_i < x$, и все j, для которых $y_j < y$.

Для ***дискретной случайной двумерной величины*** (X,Y) ее функция распределения представляет собой некоторую ступенчатую поверхность, ступени которой соответствуют скачкам функции $F(x, y)$.

В нашей лекции мы в основном будем вести изложение для двумерной $(n=2)$ ***случайной величины; при этом практически все понятия и утверждения, сформулированные для*** $n = 2$, ***могут быть перенесены и на случай*** $n > 2$.

Однако рассмотрение именно двумерной случайной величины позволяет сделать изложение наглядным и менее громоздким.

СВОЙСТВА ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

1. Функция распределения $F(x,y)$ есть неотрицательная функция, заключенная между нулем и единицей, т.е. $0 < F(x,y) < 1$.

2. Функция распределения $F(x,y)$ есть неубывающая функция по каждому из аргументов, т.е.

при $\boldsymbol{x_2} > \boldsymbol{x_1}$ $F(x_2,y) \geq F(x_1, y)$, при $\boldsymbol{y_2} > \boldsymbol{y_1}$ $F(x, y_2) \geq F(x, y_1)$.

3. Если хотя бы один из аргументов обращается в $-\infty$, функция распределения $F(x,y)$ равна нулю, т.е. $F(x,-\infty) = F(-\infty,y) = F(-\infty,-\infty) = 0$.

СВОЙСТВА ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

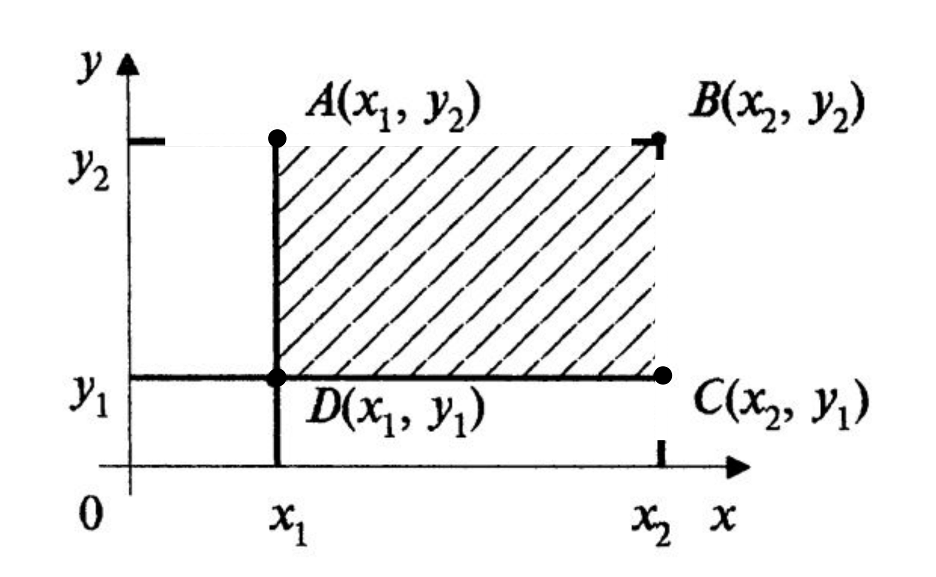
4. Если один из аргументов обращается в $+\infty$, функция распределения $F(x, y)$ становится равной функции распределения случайной величины, соответствующей другому аргументу:

$$F(x, +\infty) = F_1(x) \text{ и } F(+\infty, y) = F_2(y)$$

где $F_1(x)$ и $F_2(y)$ − функции распределения случайных величин $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$, т.е. $F_1(x) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X} < x)$, а $F_2(y) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{Y} < y)$.

5. Если оба аргумента равны $+\infty$, то функция распределения равна единице: $F(+\infty,+\infty) = 1$.

Геометрически функция распределения есть некоторая поверхность, обладающая указанными свойствами.



Зная функцию распределения $F(x,y)$, можно найти вероятность попадания случайной точки $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ в пределы прямоугольника **ABCD**, т.е.

$$P[(x_1 \le X < x_2)(y_1 \le Y < y_2)]$$

Так как эта вероятность равна вероятности попадания в бесконечный квадрант с вершиной **B**$(\boldsymbol{x_2},\boldsymbol{y_2})$ минус вероятности попадания в квадранты с вершинами соответственно в точках **A**$(\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{y_2})$ и **C**$(\boldsymbol{x_2},\boldsymbol{y_1})$ плюс вероятность попадания в квадрант с вершиной в точке **D**$(\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{y_1})$ (ибо эта вероятность вычиталась дважды), то

$$P[(x_1 \le X < x_2)(y_1 \le Y < y_2)] = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1).$$

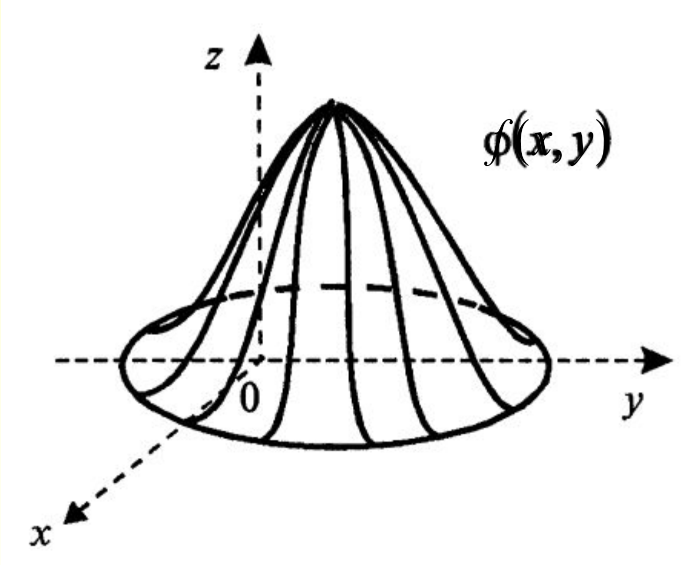
Определение.

Двумерная случайная величина (***X***,***Y***) называется ***непрерывной***, если ее функция распределения $F(x,y)$ − непрерывная функция, дифференцируемая по каждому из аргументов, и существует вторая смешанная производная $F''_{xy}(x,y)$.

Определение.

Плотностью вероятности (***плотностью распределения*** или ***совместной плотностью***) непрерывной двумерной случайной величины (***X***,***У***) называется вторая смешанная частная производная ее функции распределения, т.е.

$$f(x,y) = \frac{d^2F(x,y)}{dxdy} = F''_{xy}(x,y).$$



Геометрически плотность вероятности двумерной случайной величины (***X***,***У***) представляет собой поверхность распределения в пространстве ***Oxyz***.

СВОЙСТВА ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

1. Плотность вероятности двумерной случайной величины есть неотрицательная функция, т.е. $f(x,y) \geq 0$.

2. Вероятность попадания непрерывной двумерной величины (***X***, ***Y***) в область ***D*** равна:

$$P[(X,Y) \in D] = \iint_D f(x,y)dxdy.$$

Если вероятность попадания на отрезок [**a**,**b**] ***одномерной случайной величины*** *геометрически выражается площадью фигуры, ограниченной сверху кривой распределения* $f(x)$ *и опирающейся на отрезок* [**a**,**b**], *то вероятность попадания* ***дву-***

Функция распределения $F(x,y)$ *есть вероятность попадания в бесконечный квадрант* ***D****, который можно рассматривать как прямоугольник, ограниченный* ***абсциссами*** $-\infty$ *и* x *, а также* ***ординатами*** $-\infty$ *и* y*.*

Зная ***плотность вероятности двумерной случайной величины*** (***X***,***Y***), можно найти ***функции распределения ее одномерных составляющих*** ***X*** и ***Y***:

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t, y)dtdy, \qquad F_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{y} f(x, t)dxdt.$$

Дифференцируя функции распределения $F_1(x)$ и $F_2(y)$ соответственно по аргументам ***x*** и ***y***, получим ***плотности вероятности одномерных случайных величин*** ***X*** и ***Y***

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy, \qquad f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx.$$

т.е. *несобственный интеграл в бесконечных пределах от совместной плотности **f**(x,y) двумерной случайной величины по аргументу **x** дает плотность вероятности $f_2(y)$, а по аргументу **y** — плотность вероятности $f_1(x)$.*

Пример.

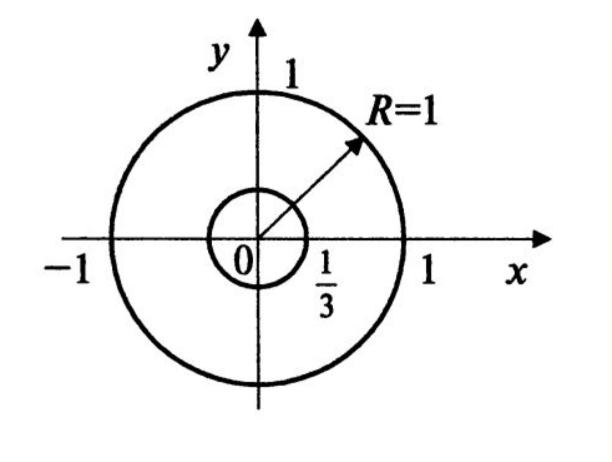
Двумерная случайная величина распределена равномерно в круге радиуса *R* = 1.

Определить:

а) выражение совместной плотности распределения двумерной случайной величины (***X***, ***Y***);

б) плотности вероятности одномерных составляющих ***X*** и ***У***;

в) вероятность того, что расстояние от точки **М**(***x***, ***y***) до начала координат будет меньше **1/3**.



Решение.

в) вероятность того, что случайная точка **М**(***x***,***y***) будет находиться в круге радиуса $R_1 = \mathbf{1/3}$ можно найти по формуле

$$P\left(\sqrt{X^2+Y^2}<\frac{1}{3}\right)=P\left(X^2+Y^2<\frac{1}{9}\right)=\int_{-1/3}^{1/3}\int_{-\sqrt{1/9-x^2}}^{\sqrt{1/9-x^2}}\frac{1}{\pi}dxdy,$$

или:

$$P\left(X^2+Y^2<\frac{1}{9}\right)=\left(\pi\cdot R_1^2\right)/\left(\pi\cdot R^2\right)=R_1^2/R^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2/1^2=\frac{1}{9}.$$

Определение.

Для дискретных случайных величин

Для непрерывных случайных величин

Условным законом распределения одной из одномерных составляющих двумерной случайной величины (X,Y) называется ее закон распределения, вычисленный при условии, что другая составляющая приняла определенное значение (или попала в какой-то интервал).

$$p_j(x_i) = \frac{P[(X = x_i)(Y = y_j)]}{P[(Y = y_j)]}, \qquad p_i(y_j) = \frac{P[(X = x_i)(Y = y_j)]}{P[(X = x_i)]}.$$

$$f_y(x) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}, \qquad f_x(y) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}.$$

т.е. *условная плотность вероятности одной из одномерных составляющих двумерной случайной величины равна отношению ее совместной плотности к плотности вероятности другой составляющей.*

Данные соотношения записанные в виде $f(x,y) = f_1(x) f_x(y) = f_2(y) f_y(x)$ называются ***теоремой умножения плотностей распределений.***

Кроме того

$$f_y(x) = \frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx}, \qquad f_x(y) = \frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy}.$$

Определение.

Случайные величины ***X*** и ***Y*** называются ***независимыми***, если их совместная функция распределения $F(x,y)$ представляется в виде произведения функций распределений $F_1(x)$ и $F_2(y)$ этих случайных величин, т.е.

$$F(x,y) = F_1(x) \cdot F_2(y)$$

В противном случае, при невыполнении этого равенства, случайные величины ***X*** и ***Y*** называются ***зависимыми***.

Определение.

Две случайные величины ***X*** и ***Y*** называются ***независимыми***, если закон распределения одной из них не меняется от того, какие возможные значения приняла другая величина.

В противном случае случайные величины ***X*** и ***Y*** называются ***зависимыми***.

т.е. для ***независимых непрерывных случайных величин X*** и ***Y*** их совместная плотность $f(x,y)$ равна произведению плотностей вероятности $f_1(x)$ и $f_2(y)$ этих случайных величин.

Таким образом (*теорема умножения плотностей распределений*), независимость двух случайных величин ***X*** и ***Y*** означает, что условные плотности вероятности каждой из них совпадают с соответствующими «безусловными» плотностями, т.е.

$$f_y(x) = f_1(x) \text{ и } f_x(y) = f_2(y).$$

ТРЕТИЙ ВОПРОС

Числовые характеристики двумерной случайной величины

При изучении двумерных случайных величин рассматриваются ***числовые характеристики одномерных составляющих*** ***X*** и ***Y*** — ***математические ожидания*** и ***дисперсии***.

Так, для непрерывной случайной величины (***X***,***Y***) они определяются по формулам:

$$a_x = M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy,$$

$$a_y = M(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)dxdy,$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x-a_x)^2 f(x,y)dxdy,$$

$$D(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (y-a_y)^2 f(x,y)dxdy.$$

Определение.

Ковариацией (или ***корреляционным моментом***) K_{xy} случайных величин ***X*** и ***Y*** называется математическое ожидание произведения отклонений этих величин от своих математических ожиданий, т.е.

$$K_{xy} = M[(X - M(X))(Y - M(Y))],$$

или

$$K_{xy} = M[(X - a_x)(Y - a_y)],$$

где $a_x = M(X)$, $a_y = M(Y)$.

Итак, если имеется двумерная случайная величина (***X***,***Y***), для которой известно ***распределение*** или ***совместная плотность*** вероятности $f(x,y)$, то мы можем найти математические ожидания $M(X) = a_x$, $M(Y) = a_y$ и дисперсии $D(X) = \sigma_x^2$ и $D(Y) = \sigma_y^2$ одномерных составляющих ***X*** и ***Y***.

Однако математические ожидания и дисперсии случайных величин ***X*** *и* ***Y*** *недостаточно полно характеризуют двумерную случайную величину* (***X***,***Y***), *так как не выражают степени зависимости ее составляющих* ***X*** *и* ***Y***.

Эту роль выполняют ***ковариация*** и ***коэффициент корреляции***.

Для непрерывных случайных величин $K_{xy} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x - a_x)(y - a_y) f(x,y)\,dx\,dy.$

---

* Ковариацию называют еще ***вторым смешанным центральным моментом*** случайных величин ***X*** и ***Y*** и обозначают *cov*(***X***,***Y***).

СВОЙСТВА КОВАРИАЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

1. Ковариация двух независимых случайных величин равна нулю.

2. Ковариация двух случайных величин равна математическому ожиданию их произведения минус произведение математических ожиданий, т. е.

$$K_{xy} = M(XY) - M(X) \cdot M(Y) \quad \text{или} \quad K_{xy} = M(XY) - a_x \cdot a_y.$$

3. Ковариация двух случайных величин по абсолютной величине не превосходит произведения их средних квадратических отклонений, т.е.

$$\left| K_{xy} \right| \le \sigma_x \sigma_y .$$

Взяв очевидное неравенство и преобразовав его, получаем:

$$M\left(\frac{X - M(X)}{\sigma_x} \pm \frac{Y - M(Y)}{\sigma_y} \right)^2 \ge 0$$

$$\frac{D(X)}{\sigma_x^2} \pm \frac{2K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} + \frac{D(Y)}{\sigma_y^2} = 2 \pm \frac{2K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \ge 0,$$

откуда следует доказываемое.

Определение.

Коэффициентом корреляции двух случайных величин называется отношение их ковариации к произведению средних квадратических отклонений этих величин:

$$\rho_{xy} = corr(X, Y) = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}.$$

Из определения следует, что $\rho_{xy} = \rho_{yx} = \rho$. Очевидно также, что коэффициент корреляции есть безразмерная величина.

СВОЙСТВА КОЭФФИЦИЕНТА КОРРЕЛЯЦИИ

1. Коэффициент корреляции принимает значения на отрезке [-1;1].

2. Если случайные величины независимы, то их коэффициент корреляции равен нулю, т.е. $\rho = 0$.

Из независимости случайных величин следует их некоррелированность ($\rho = 0$). Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

3. Если коэффициент корреляции двух случайных величин равен (по абсолютной величине) единице, то между этими случайными величинами существует линейная функциональная зависимость.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ И ДИСПЕРСИИ

1. Математическое ожидание произведения двух случайных величин равно сумме произведения их математических ожиданий и ковариации этих случайных величин:

$$M(\boldsymbol{XY}) = M(\boldsymbol{X})\cdot M(\boldsymbol{Y}) + \boldsymbol{K_{xy}},$$

Если $\boldsymbol{K_{xy}} = 0$, то

$$M(\boldsymbol{XY}) = M(\boldsymbol{X})\cdot M(\boldsymbol{Y}),$$

т.е. математическое ожидание произведения двух некоррелированных случайных величин равно произведению их математических ожиданий*.

2. Дисперсия суммы двух случайных величин равна сумме их дисперсий плюс удвоенная ковариация этих случайных величин:

$$D(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}) = D(\boldsymbol{X})+D(\boldsymbol{Y})+2\boldsymbol{K_{xy}}.$$

Для некоррелированных (и, разумеется, для независимых) случайных величин

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i).$$

Наряду с вышеуказанными рассматриваются такие числовые характеристики условных распределений, как: ***условные математические ожидания*** $M_x(Y)$ и $M_y(X)$ и ***условные дисперсии*** $D_x(Y)$ и $D_y(X)$.

Эти характеристики находятся по обычным формулам *математического ожидания* и *дисперсии*, в которых вместо вероятностей событий p_i и p_j или плотностей вероятности $f_1(x)$ и $f_2(y)$ используются условные вероятности $p_j(x_i)$ и $p_i(y_j)$ или условные плотности вероятности $f_y(x)$ и $f_x(y)$.

Например, для непрерывной случайной величины (X,Y)

$$M_x(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_x(y)dy,$$

$$D_x(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} [y - M_x(Y)]^2 f_x(y)dy.$$

Условное математическое ожидание случайной величины Y при $X = x$, т.е. $M_x(Y)$, есть функция от x, называемая ***функцией регрессии*** или просто ***регрессией*** Y по X; аналогично $M_y(X)$ называется ***функцией регрессии*** или просто ***регрессией*** X по Y.

Графики этих функций называются соответственно ***линиями регрессии*** (или ***кривыми регрессии***) Y по X и X по Y.

Благодарю за внимание, лекция окончена!