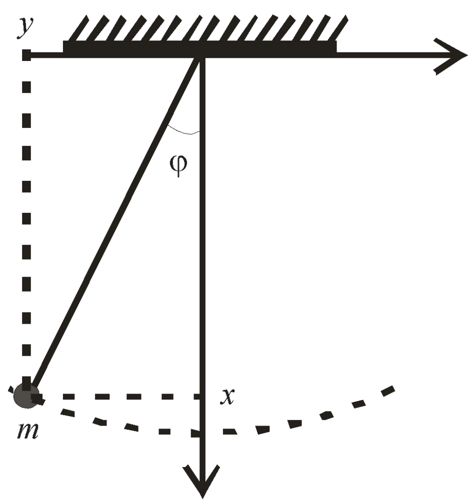
Понятие и принципы построения математической модели физических систем

- Попытаемся построить простейшую модель маятника в виде массивного груза, подвешенного на нити и совершающего периодические или периодические затухающие колебания (рис. 2).



- В первую очередь нам необходимо сформулировать физическую модель. Колебание маятника не равномерное: в какой-то момент времени груз движется быстро, а в другой момент времени медленнее. Такое ускоренное движение, согласно второму закону Ньютона, может происходить только под действием внешней силы, в противном случае груз совершал бы, согласно принципу Галилея, прямолинейное равномерное движение. Попытаемся выяснить, какие силы здесь задействованы. Груз электрически нейтрален, значит, на него не могут действовать электрические и магнитные поля. Из гравитационных полей существенный вклад вносится только со стороны Земли. Солнце и остальные планеты, как легко показать, действуют на маятник со значительно меньшими силами, и ими с высокой точностью можно пренебречь.

- Есть еще силы трения, в первую очередь, сила трения о воздух. При малых скоростях движения груза эта сила пропорциональна скорости и плотности воздуха. Коэффициент пропорциональности очень мал. Сила трения существенно меньше силы притяжения Земли и ею можно пренебречь, только если рассматриваются колебания в относительно небольшие времена. Это обусловлено специфическим характером сил трения, под действием которых из системы непрерывно уходит энергия. За большой промежуток времени маятник может потерять значительную часть своей энергии и это потеря скажется на движении маятника как заметное падение амплитуды колебания.
- К малозначительным факторам, влияющим на движение маятника, отнесем и вращение Земли. Тогда можно считать маятник совершающим движение в одной плоскости, образованной осями *Ox* и *Oy* декартовой системы координат.

- Если за F_x и F_y обозначить проекции вектора силы притяжения Земли на оси координат *x* и *y*, то согласно механике Ньютона уравнения движения маятника будут иметь вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y$$

- где *m* – масса маятника.
- Но мы воспользуемся механикой Лагранжа, так как нахождение всех компонентов сил в более сложной системе относительно трудоемкая работа.
- Для нашего маятника

$$T = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right], \qquad U = mg(l - x)$$

$$T = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right], \qquad U = mg(l - x)$$

- где *g* – ускорение свободного падения; *l* – длина нити. Отсчет потенциальной энергии ведется от нижнего положения равновесия. Символами *x* и *y* здесь обозначены координаты груза. Так как груз совершает движение по дуге окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = l^2$, то функции $x(t)$ и $y(t)$ во-первых, не являются независимыми переменными, во-вторых, удобно перейти в полярную систему координат по формулам

$$x = l\cos\varphi, \quad y = l\sin\varphi, \quad \varphi = \varphi(t)$$

- Проекции скорости на оси координат равны $$\frac{dx}{dt} = -l\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = l\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}$$

- С учетом этих выражении кинетическую и потенциальную энергию можно записать как $$T = \frac{ml^2}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2, \quad U = mgl(1-\cos\varphi)$$

- Определим функцию Лагранжа:

$$L = T - U = T = \frac{ml^2}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - mgl\left(1 - \cos\varphi\right)$$

- Функция Лагранжа зависит от двух переменных *ϕ, dϕ/dt*. При выводе уравнения Эйлера – Лагранжа в общем случае под *x* мы подразумевали координату, но не уточняли, что понимается под словом координата и о какой системе (декартовой, полярной и т.д.) идет речь. Для уравнения Эйлера – Лагранжа это не принципиально. Применительно к колебанию маятника мы это уравнение можем записать в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\, d\varphi / dt} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

- Вычисление здесь соответствующих производных приводит к уравнению колебания математического маятника:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\omega^2\sin\varphi=0,\quad \omega=\sqrt{\frac{g}{l}}(1)$$

- которое должно быть дополнено начальными условиями для угла и его скорости.
- Колебания, описываемые уравнением не затухают со временем, так как мы не учитывали явление трения.

- Если тело при взаимодействии с другими телами (или средами) увеличивает их кинетическую энергию, то тело испытывает силу сопротивления, если же уменьшает, то на тело будет действовать ускоряющая сила.
- Т.к. качающийся маятник приводит в движение воздух, что легко обнаружить, то мы сразу же заключаем, что маятник испытывает силу сопротивления, которое иначе называют еще силой трения.
- В науке о движении жидкостей – гидродинамике доказано, что сила F_c сопротивления, действующая со стороны среды на тело, зависит от его геометрических форм, относительной скорости ΔV тела и среды, ее плотности ρ и физической характеристики, называемой вязкостью ν.

- Характер силы гидродинамического сопротивления определяется одним безразмерным параметром Re, который называется числом Рейнольдса. Для тела достаточно малого размера L и скорости ΔV если $\mathrm{Re} = L\Delta V/\nu \ll 1$, то сила F_c прямо пропорциональна ΔV: $F_c \sim \Delta V$. Пусть груз маятника имеет форму шара с радиусом a. С точностью до числового множителя порядка единицы силу сопротивления можно вычислить по формуле

$$F_c = \rho \nu a \, \Delta V.$$

- Так как идет речь о простейшей модели маятника, то мы вместо ΔV подставим окружную скорость самого маятника, а влияние скорости воздуха на величину силы сопротивления и других параметров будем считать учтенным в коэффициенте пропорциональности $k = \rho v a$. Тогда в полярных координатах имеем

$$F_c = -kl\frac{d\varphi}{dt}$$

- где отрицательный знак означает, что сила F_c тормозящая. С учетом этой силы трения уравнение движения маятника будет выглядеть следующим образом:

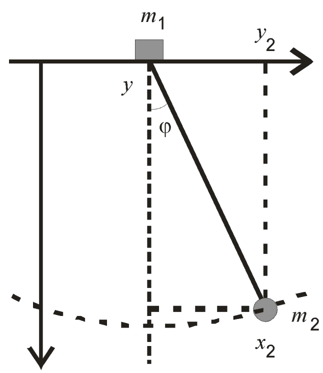
$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \gamma\frac{d\varphi}{dt} + \omega^2 \sin\varphi = 0$$

$\gamma = k/m$

Рассмотренный пример с математическим маятником не демонстрирует всех достоинств механики Лагранжа. Уравнение (1) можно легко получить и в рамках механики Ньютона. Приведем другой пример маятника с подвижной точкой подвеса, где подход Лагранжа существенно упрощает вывод уравнений движения, по сравнению с подходом Ньютона. На рисунке 3 точка подвеса маятника с массой m_1 без трения скользит по горизонтальной поверхности. Массу подвешенного груза обозначим за m_2.

- Координату тела массы m_1 обозначим за y, а координаты груза m_2 – за x_2 и y_2. По рисунку 3 определяем

$$x_2 = l\cos\varphi, \qquad y_2 = y + l\sin\varphi$$



- Учитывая, что величины x_2, y_2 и ϕ зависят от времени, определим производные:

$$\frac{dy_2}{dt} = \frac{dy}{dt} + l\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}, \qquad \frac{dx_2}{dt} = -l\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}$$

- являющиеся компонентами скорости подвешенного груза. Скорость движения подвеса равна *dy*/*dt*. Тогда полная кинетическая энергия системы *T* равна сумме кинетической энергии движения грузов с массами m_1 и m_2:

$$T = \frac{m_1}{2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{m_2}{2}\left[\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_2}{dt}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{m_1 + m_2}{2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{m_2}{2}\left[\left(l\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + 2l\cos\varphi\frac{dy}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\right]$$

- Вклад в полную потенциальную энергию *U* дает только подвешенный груз:

$$U = m_2 gl\left(1-\cos\varphi\right)$$

- Искомые уравнения движения из функции Лагранжа

$$L = T - U = \frac{m_1 + m_2}{2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{m_2}{2}\left[\left(l\,\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + 2l\cos\varphi\,\frac{dy}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\right] - m_2 gl\left(1-\cos\varphi\right),$$

- где неизвестными параметрами механической системы являются угол ϕ и смещение y подвеса, получаются из дифференциальных соотношений

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\, dy/dt}-\frac{\partial L}{\partial y}=0 \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\, d\varphi/dt}-\frac{\partial L}{\partial \varphi}=0.$$

- Вычисление производных здесь не представляет трудностей. Опуская несложные выкладки, приведем соответствующие уравнения

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{lm_2}{m_1+m_2}\left[\cos\varphi\frac{d^2\varphi}{dt^2}-\sin\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]=0$$

$$l\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\cos\varphi\frac{d^2y}{dt^2}+g\sin\varphi=0$$

- В приведенной форме эти уравнения не удобны для численного решения. Чтобы привести их в нормальную форму необходимо из первого уравнения с помощью второго исключить $d^2\phi/dt^2$. Аналогичным образом поступаем и со вторым уравнением. Простой расчет дает

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{m_2}{m'} \frac{\sin\varphi}{1 - \frac{m_2}{m'}\cos^2\varphi}\left[l\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + g\cos\varphi \right]$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{\sin 2\varphi}{2} \frac{\frac{m_2}{m'}}{1 - \frac{m_2}{m'}\cos^2\varphi}\left[l\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + g\cos\varphi \right] - g\sin\varphi$$

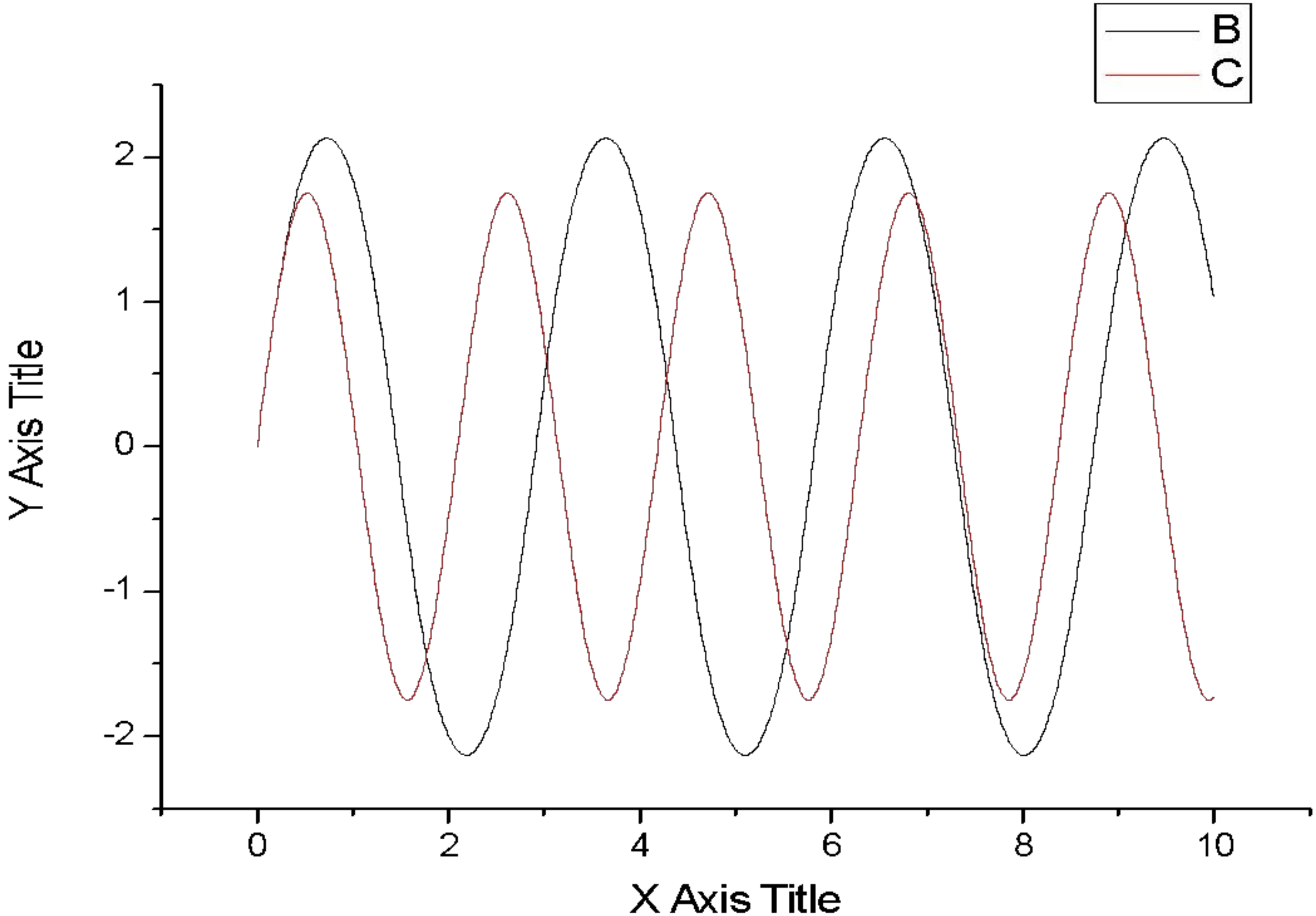
$m' = m_1 + m_2$.

```
•   #include<conio.h>
•   #include<stdio.h>
•   #include<math.h>
•   float omeg= 3;

•   float Fx(float x, float v, float t);
•   float Fv(float x, float v, float t);

•   int main()
•   {
•    FILE *f;
•    f=fopen ("D:\\Inf\\dif_2.dat", "w");
•
•    float x0, x, xp, xt, xn, h, t, tc;
•    float v0, v, vp, vn;
•    x0=0;  v0=5.25;
•    tc=10.0;
•    h=0.01;
```

```
x=x0; v=v0;  //nach uslovie
 for (t=0; t<tc; t=t+h)
 {
   xt=v0/omeg*sin(omeg*t);
   printf ("  t= %.3f,  x= %.3f  xt= %.3f  \n", t, x, xt);
   fprintf (f,"%.3f  %.3f  %.3f\n", t, x, xt);

   xn=x; vn=v;
     xp= xn +h*Fx(xn,vn, t);
      vp= vn +h*Fv(xn,vn, t);
     x= xn +0.5*h*(Fx(xn, vn, t)+Fx(xp, vp, t+h));
     v= vn +0.5*h*(Fv(xn, vn, t)+Fv(xp, vp, t+h));
  }
 getch();
}
```

- float Fx(float x, float v, float t)
- { float c;
-    c=v;
-     return c;
- }

- float Fv(float x, float v, float t)
- { float c;
-    c=-omeg*omeg*sin(x);
-     return c;
- }


B
C
2
1
0
-1
-2
Y Axis Title
0
2
4
6
8
10
X Axis Title

- Меняя шаг интеграции, добавляя силу трения, увеличивая время расчета можно изучить поведение маятника в той или иной ситуации