Лекция 6

Тензоры

4.1. Природа и свойства тензоров

Понятие тензора можно вводить по-разному. Мы будем определять тензор как величину, которая связывает между собой два вектора, причем каждый вектор характеризует определенную физическую величину. Допустим, что нам надо установить связь между электрическим полем в кристалле и плотностью тока (т. е. силой тока на единицу площади поперечного сечения, перпендикулярного току); электрическое поле описывается вектором **E**, а плотность тока — вектором **J**.

В кристалле компоненты вектора **J** но трем взаимно перпендикулярным осям (Ox1, Ox2, Ox3), которые мы обозначим J1, J2, J3, связаны с компонентами вектора **E** по тем же осям в общем случае так, что каждая из компонент J1, J2, J3, линейно зависит от всех трех компонент обозначим E1, E2, E3. Принято записывать это так:

$$\begin{aligned} J_1 &= \sigma_{11}E_1 + \sigma_{12}E_2 + \sigma_{13}E_3 \\ J_2 &= \sigma_{21}E_1 + \sigma_{22}E_2 + \sigma_{23}E_3 \qquad (4.1) \\ J_3 &= \sigma_{31}E_1 + \sigma_{32}E_2 + \sigma_{33}E_3 \end{aligned}$$

Девять величин σ11, σ12, σ13, σ21, σ22, σ23, σ31, σ32, σ33 называются компонентами тензора электропроводности. Этот тензор связывает между собой векторы J и E. Все уравнения (4.1) можно записать сокращенно как

$$J = \sigma E \qquad (4.2)$$

где σ - величина, на которую нужно умножить вектор **E**, чтобы получить вектор **J**. Если тензор связывает между собой два вектора именно таким образом, то он называется тензором второго ранга или второй валентности.

Такими же тензорами, как тензор электропроводности, выражаются многие физические свойства. Подобные тензоры называются материальными тензорами. Некоторые примеры их приведены в табл. 1.

Таблица 1

Физические свойства кристаллов, описываемые тензорами второго ранга

Тензор	Векторы, связываемые тензором	
Электропроводность	Напряженность электрического поля	Плотность тока
Теплопроводность	Градиент температуры (отрицательный)	Плотность теплового потока
Коэффициент диффузии	Градиент концентрации (отрицательный)	Поток атомов
Диэлектрическая проницаемость	Напряженность электрического поля	Электрическая индукция
Диэлектрическая восприимчивость	То же	Электрическая поляризация
Магнитная проницаемость	Напряженность магнитного поля	Магнитная индукция
Магнитная восприимчивость	То же	Интенсивность намагничивания

Кроме того, существуют полевые тензоры, причем два из них особенно важны - тензор напряжений и тензор деформаций. Тензор напряжений связывает между собой вектор силы, действующей па единицу площади, и ориентацию этой элементарной площадки в напряженном теле. Тензор деформации связывает смещение точки в деформированном теле с положением этой точки.

4.2. Преобразование компонент вектора

Если нам известны компоненты вектора, например P, по некой ортогональной системе осей координат Ox1, Ox2, Ox3), часто требуется знать, каковы компоненты того же вектора в другой, системе координат (Ox`1, Ox`2, Ox`3), тоже ортогональной и имеющей общее начало с первой системой координат (фиг. 4.1). Сначала надо определить, как связаны между собой эти две системы осей. Представим эту связь в виде таблицы косинусов углов между каждой из осей новой системы координат и каждой из трех осей старой системы:

Новые оси	Старые оси		
	x1	x2	x3
x`1	a11	a12	a13
x`2	a21	a22	a23
x`3	a31	a32	a33

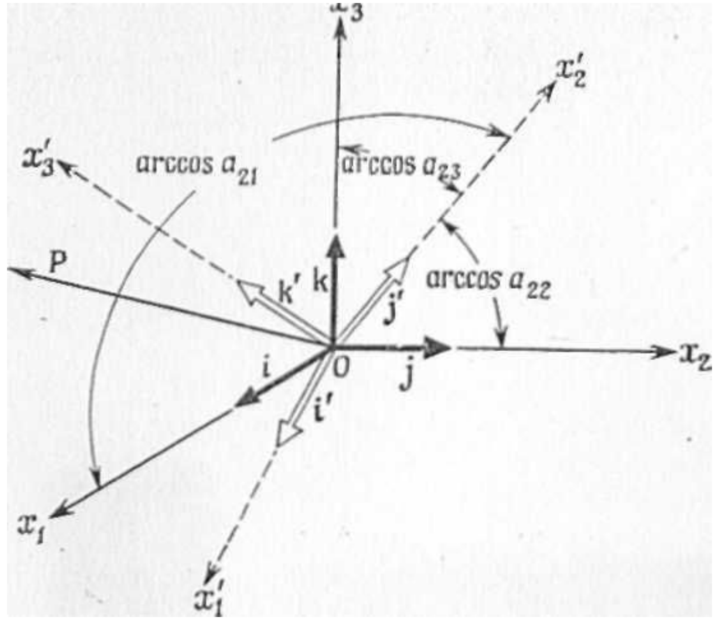
Здесь, например, a32 - это косинус угла между новой осью 3 и старой осью 2, т. е. угол x'_3Ox_2 (фиг. 4.1); аналогично a11 - это косинус угла между Ox`1 и Ox1 и т. д. В выражении типа (4.3) сумма квадратов любого ряда и любой строки равна единице, потому что обе системы осей ортогональны. Так, например,

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 = 1$$

и

$$a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 = 1$$

и т. д.



Фиг. 4.1. К преобразованию компонент вектора.

Положим теперь, что в старой системе координат компоненты вектора P равны P1, P2 и P3, так что

$$\overline{P} = P_1\bar{i} + P_2\bar{j} + P_3\bar{k} \qquad (4.4)$$

где **i, j, k** - единичные векторы по осям Ox1 Ox2, Ox3 соответственно. Тогда компоненту вектора **P** по новой оси Ox`1 можно найти, определив проекции трех компонентов в старой системе осей (т. е. P1**i**, P2**j**, P3**k**) на новую ось и сложив все эти проекции. Получим

$$P_1' = a_{11}P_1 + a_{12}P_2 + a_{13}P_3 \qquad (4.4а)$$

Аналогично найдем новые компоненты **P** по осям Ox'2, Ox'3, т. е. P'2, P'з, а именно

$$P_2' = a_{21}P_1 + a_{22}P_2 + a_{23}P_3 \qquad (4.4б)$$

и

$$P_3' = a_{31}P_1 + a_{32}P_2 + a_{33}P_3 \qquad (4.4в)$$

Величина и направление вектора **P** не зависят от выбора системы координат. Если **i`, j`, k`** - единичные векторы по осям Ox`1, Ox'2, Ox'3, тогда

$$P_1\bar{i} + P_1\bar{j} + P_1\bar{k} = P_1'\bar{i}' + P_1'\bar{j}' + P_1'\bar{k}' \qquad (4.5)$$

На основании системы (4.3) имеем

$$\begin{aligned} \bar{i}' &= a_{11}\bar{i} + a_{12}\bar{j} + a_{13}\bar{k} \\ \bar{j}' &= a_{21}\bar{i} + a_{22}\bar{j} + a_{23}\bar{k} \\ \bar{k}' &= a_{31}\bar{i} + a_{32}\bar{j} + a_{33}\bar{k} \end{aligned} \qquad (4.6а)$$

и, обратно,

$$\begin{aligned} \bar{i} &= a_{11}\bar{i}' + a_{12}\bar{j}' + a_{13}\bar{k}' \\ \bar{j} &= a_{21}\bar{i}' + a_{22}\bar{j}' + a_{23}\bar{k}' \\ \bar{k} &= a_{31}\bar{i}' + a_{32}\bar{j}' + a_{33}\bar{k}' \end{aligned} \qquad (4.6б)$$

Соотношения (4.4а)-(4.4в) можно вывести и по-другому, а именно выразить каждый из векторов **i, j, k** по (4.6б) через **i`, j`, k`** и подставить их затем в (4.4), заметив при этом, что P`1 является коэффициентом единичного вектора **i`**. Действуя таким же образом, можем получить выражения и для старых компонент вектора **P**, т. е. [P1, P2, P3], через новые компоненты, подставляя **i`, j`, k`**, выраженные через **i, j, k** [по уравнению (4.6а)], в правую часть уравнения (4.5) и последовательно приравнивая друг другу члены обеих частей этого уравнения. Поступая так, получим

$$\begin{aligned} P_1 &= a_{11}P_1' + a_{12}P_2' + a_{13}P_3' \\ P_2 &= a_{11}P_1' + a_{12}P_2' + a_{13}P_3' \\ P_3 &= a_{11}P_1' + a_{12}P_2' + a_{13}P_3' \end{aligned} \qquad (4.7)$$

Уравнения (4.7) являются обратными уравнениям (4.4а) - (4.4в). Воспользуемся теперь этими результатами для преобразования компонент векторов в уравнениях типа (4.2).

Тензор - это величина, на которую надо умножить один вектор, чтобы получить другой вектор, в общем случае не параллельный первому; абсолютные величины этих двух векторов тоже не одинаковы. Возвращаясь к нашему примеру с тензором электропроводности, мы можем теперь представить уравнения (4.1) в виде

$$\begin{aligned} J_1\bar{i} &= (\sigma_{11}E_1 + \sigma_{12}E_2 + \sigma_{13}E_3)\bar{i} \\ J_2\bar{j} &= (\sigma_{21}E_1 + \sigma_{22}E_2 + \sigma_{23}E_3)\bar{j} \\ J_3\bar{k} &= (\sigma_{31}E_1 + \sigma_{32}E_2 + \sigma_{33}E_3)\bar{k} \end{aligned} \qquad (4.8)$$

Сложим эти три уравнения и запишем правую часть в новом виде:

$$J_1\bar{i} + J_2\bar{j} + J_3\bar{k} = \left[\sigma_{11}\bar{i}\bar{i} + \sigma_{12}\bar{i}\bar{j} + \sigma_{13}\bar{i}\bar{k} + \sigma_{21}\bar{j}\bar{i} + \sigma_{22}\bar{j}\bar{j} + \sigma_{23}\bar{j}\bar{k} + \sigma_{31}\bar{k}\bar{i} + \sigma_{32}\bar{k}\bar{j} + \sigma_{33}\bar{k}\bar{k}\right]\left(E_1\bar{i} + E_2\bar{j} + E_3\bar{k}\right) \qquad (4.9)$$

Величину в квадратных скобках можно рассматривать как оператор, который действует на вектор **E**, чтобы получить из него вектор **J**. Форма, в которой здесь записан этот оператор, соответствует ортогональным осям, определяемым единичными векторами **i, j, k**. Мы будем «умножать» вектор **E**=E1**i**+E2**j**+E3i**k** на оператор, заключенный в квадратные скобки, так же, как если бы мы получали скалярное произведение путем перемножения двух векторов.

Чтобы понять систему (4.9), лучше всего выписать ее правую часть член за членом. Первый член $\sigma_{11}\bar{i}\bar{i}\cdot E_1\bar{i}=\sigma_{11}E_1\bar{i}$, потому что **i·i**=0. Следующий член $\sigma_{11}\bar{i}\bar{i}\cdot E_1\bar{j}=0$, потому что **i·i**=1, поскольку оси координат ортогональны. Точно так же и для остальных. Если выписать все члены и привести подобные, получим в конце концов уравнения (4.8), которые можно записать и как уравнения (4.1). Уравнение (4.9) представляет собой уравнение (4.2) в развернутом виде. Иначе говоря, самой компактной формой уравнения (4.9) служит уравнение (4.2).

В уравнение (4.9) входят компоненты тензора электропроводности σ11, σ12, …, σ33 по осям (Ox1, Ox2, Ox3), которые определяются единичными векторами **i, j, k**. Зная, как преобразуются компоненты вектора, мы можем преобразовать компоненты тензора. Если выберем новую систему осей координат с единичными векторами **i`, j`, k`**, то компоненты тензора электропроводности σ изменятся и мы можем определить их, подставляя вместо **i, j, k** в уравнение (4.9) величины **i`, j`, k`**, отнесенные к новым осям по уравнению (4.6а). Вместо E1, E2, E3 нам придется подставить компоненты вектора **E** по новым осям, т. е. E`1, E‘2, E'3, так что новые компоненты тензора σ`11, σ`12, σ`33 и т. д., умноженные на новые компоненты **E**, в форме уравнения (4.9) дадут компоненты вектора **J** в новой системе осей координат. Полная запись очень громоздка, поэтому сначала введем более удобную, сокращенную форму записи.

4.3. Немой индекс (индекс суммирования)

Тензор **T** связывает между собой вектор **P** [P1P2P3] и вектор

$$P_1 = T_{11}q_1 + T_{12}q_2 + T_{13}q_3$$
$$P_2 = T_{11}q_1 + T_{12}q_2 + T_{13}q_3 \qquad (4.10)$$
$$P_3 = T_{11}q_1 + T_{12}q_2 + T_{13}q_3$$

Эти уравнения можно записать как

$$P_1 = \sum_{j=1}^{j=3} T_{1j}q_j, \quad P_2 = \sum_{j=1}^{j=3} T_{2j}q_j, \quad P_3 = \sum_{j=1}^{i=3} T_{3j}q_j$$

или, еще короче, как

$$P_i = \sum_{j=1}^{j=3} T_{ij}q_j \quad (i = 1,2,3).$$

Опустим теперь знак суммы н введем правило, которое называется правилом Эйнштейна: если в одном и том же члене индекс повторяется дважды, то автоматически подразумевается суммирование по этому индексу. В дальнейшем суммирование всегда будет производиться по значениям 1, 2, 3 как для i, так и для j. Уравнения (4.10) в сокращенной форме имеют вид

$$P_i = T_{ij}q_j \qquad (4.11)$$

Здесь j называется немым индексом, потому что безразлично, какой буквой мы его обозначаем. Уравнение (4.11) можно было бы записать и как

$$P_i = T_{ik}q_k.$$

Если мы воспользуемся этим обозначением для уравнений (4.4а)-(4.4б), то вес эти три уравнения будут содержаться в выражении

$$P'_i = a_{ij}P_j. \qquad (4.12а)$$

Заметим, что немой индекс встречается на соседних местах. Воспользовавшись тем же обозначением для уравнений (4.7), получим

$$P_i = a_{ji}P'_j \qquad (4.12б)$$

т. е. когда «старые» компоненты выражаются через «новые», то немые индексы не должны стоять рядом.

Встретившись с этими обозначениями впервые, лучше начать с того, что выписать подряд все слагаемые. Так, например, раскрывается как

$$P'_1 = a_{1j}P_j$$
$$P'_2 = a_{2j}P_j$$
$$P'_2 = a_{3j}P_j$$

Эти три суммы можно теперь раскрывать дальше, не боясь ошибиться.

4.4. Преобразование компонент тензора второго ранга

Пусть два вектора **P** = [P1 P2 P3] и **q**=[q1q2q3] связаны между собой тензором Tij. Компоненты Tij связывают компоненты **q** с компонентами **P** согласно уравнению (4.10) или, в сокращенной форме, по уравнению (4.11). Но компоненты обоих этих векторов зависят от выбора осей координат, поскольку этим выбором определяются значений [P1 P2 P3]] и [q1 q2 q3]. Сами векторы **P** и **q** не зависят от выбора осей координат. Если меняются оси координат, а значит, меняются и компоненты **P** и **q**, то меняются и компоненты тензора Tij.

Положим, что **P** [P1 P2 P3] и **q** [q1 q2 q3] связаны между собой тензором **T**, так что

$$\bar{P} = \bar{T}\bar{q} \qquad (4.13)$$

и ли, что то же самое, при заданном выборе осей координат **i, j, k**

$$P_i = T_{ij} q_i \qquad (4.14)$$

Выберем теперь новые оси **i`, j`, k`** так, что

$$P'_i = T'_{ij} q'_i \qquad (4.15)$$

и будем искать соотношение между девятью компонентами T`ij и девятью компонентами Tij.

Это соотношение можно найти, непосредственно записав уравнение (4.13) в форме оператора, как в уравнении (4.9), т. е.

$$P_1\bar{i} + P_2\bar{j} + P_3\bar{k} = \left[T_{11}\bar{i}\bar{i} + T_{12}\bar{i}\bar{j} + T_{13}\bar{i}\bar{k} + T_{21}\bar{j}\bar{i} + T_{22}\bar{j}\bar{j} + T_{23}\bar{j}\bar{k} + T_{31}\bar{k}\bar{i} + T_{32}\bar{k}\bar{j} + T_{33}\bar{k}\bar{k}\right]\left(q_1\bar{i} + q_2\bar{j} + q_3\bar{k}\right) \qquad (4.16)$$

Подставим теперь в это уравнение вместо **i, j, k,** значения этих величин, выраженные через **i`, j`, k`** по уравнению (4.66). Левая часть уравнения в соответствии с (4.5) может быть представлена в виде P`1**i**+P`2**j** + P‘3**k.** Аналогично выражение в круглых скобках в правой части уравнения (4.16) принимает вид q`1**i**+q`2**j** + q‘3**k.** Так же поступаем с тензорным оператором, заключенным в квадратные скобки, и подставляем вместо **i, j, k**, к величины **i`, j`, k'** по уравнению (4.66). Всего получится 81 член. Если собрать, например, все члены, которые содержат векторы **j`, k`**, то таких членов окажется девять, а коэффициентами при **j`, k`** будут новые компоненты T‘23. Выпишем выражение для T`23:

$$T'_{23} = \left(a_{21}a_{31}T_{11} + a_{21}a_{32}T_{12} + a_{21}a_{33}T_{13} + a_{22}a_{31}T_{21} + a_{22}a_{32}T_{22} + a_{22}a_{33}T_{23} + a_{23}a_{31}T_{31} + a_{23}a_{32}T_{32} + a_{23}a_{33}T_{33}\right). \qquad (4.16а)$$

Точно так же можно найти остальные восемь компонент T'ij, собирая соответственно члены с **i`i`, i`j`, i`k`,j`j`, j`i`, j`k`, k`i`,`k`j`,`k`k`**.

Полную схему преобразования компонент Tij легче всего записать и запомнить, если воспользоваться немым индексом. В старой системе осей **i, j, k** мы имели дело со старыми компонентами вектора **P**, т. е. [P1 P2 P3]. Они связаны со старыми компонентами **q**, т. е. [q1 q2 q3], уравнением (4.14). Выберем теперь новые оси **i`, j`, k`** связанные со старыми осями таблицей косинусов (4.3). Чтобы найти новые компоненты тензора Tij, связывающие

[P`1 P`2 P`3] с [q`1 q'2 q'3], нужно выполнить следующие операции: а) записать **P'** через **P**; б) записать **P** через **q**; в) записать **q** через **q'**. Операция а) осуществляется с помощью формулы (4.12а), а в этом уравнении j является немым индексом, так что мы можем записать (4.12а) как

$$P_i' = a_{ik} P_k$$

Далее воспользуемся уравнением (4.14), чтобы выполнить операцию б), и получим Pк = Tklq.

Операция в) выполняется, если воспользоваться для qi уравнением типа (4.126). В итоге, если провести все эти три операции, получим

$$P_i' = a_{ik} P_k = a_{ik} T_{kl} q_l = a_{ik} T_{kl} a_{jl} q_j'$$

или

$$P_i' = a_{ik} T_{kl} a_{jl} q_j'$$

Это уравнение типа (4.15). Сравнивая эти два уравнения, получаем важную формулу

$$T_{ij}' = a_{ik} T_{kl} a_{jl} \qquad (4.17)$$

Это формула преобразования компонент тензора второго ранга при перемене осей координат.

Уравнение (4.17) очень важно, и его надо хорошо понимать. Принятая форма записи с помощью немых индексов такова, что порядок сомножителей в произведении не играет роли, и поэтому правую часть (4.17) можно записать как **T**kl**a**il**a**ik или как **T**kl**a**jl**a**jk. Уравнение (4.17) легче всего запомнить как

$$T_{ij}' = a_{ik} a_{jl} T_{kl} \qquad (4.18)$$

Уравнение (4.18), если выписать его в полном виде, содержит 81 член, по 9 для каждого из значений i и j. Для каждого из значений i и j нужно проводить суммирование по k и по l. Полезно выписать суммирование по каждому из них отдельно в развернутой форме. Например,

$$T_{23}' = a_{2k} a_{3l} T_{kl}.$$

Суммируем по k:

$$T_{23}' = a_{21} a_{3l} T_{1l} + a_{22} a_{3l} T_{2l} + a_{23} a_{3l} T_{3l}.$$

Суммируя далее по l, получаем

$$T_{23}' = \left(a_{21}a_{31}T_{11} + a_{21}a_{32}T_{12} + a_{21}a_{33}T_{13} + a_{22}a_{31}T_{21} + a_{22}a_{32}T_{22} + a_{22}a_{33}T_{23} + a_{23}a_{31}T_{31} + a_{23}a_{32}T_{32} + a_{23}a_{33}T_{33}\right). \qquad (4.19)$$

т. е. точно то же, что в (4.16).

Преобразование, обратное соотношению (4.18), дающее компоненты тензора Tij через новые компоненты тензора T'ij, можно выполнить совершенно аналогично. Оно приведет к уравнению

$$T_{ij} = a_{ki} a_{lj} T_{kl}' \qquad (4.20)$$

Полезно проделать это в качестве упражнения.

4.5. Определение тензора

Если оператор **T** связывает друг с другом два вектора **P** и **q**, так что **T** можно записать в виде оператора, описываемого уравнением (4.16), то **T** представляет собой тензор второго ранга (второй валентности), или диаду. Иначе говоря, мы можем определить тензор второго ранга как физическую величину, имеющую девять компонент по осям *xi*, которые преобразуются по уравнению (4.18), при перемене системы координат. Тензор Tij называют симметричным, если Tij = Tji, и антисимметричным или асимметричным (кососимметричным), если Tij = -Tji. Например, тензор с компонентами

$$\begin{bmatrix} 9 & -4 & 1 \\ -4 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

является симметричным. У антисимметричного тензора все диагональные члены Tij должны равняться нулю. Например, тензор

$$\begin{bmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

антисимметричен.

Симметричность или антисимметричность тензора не зависит от выбора системы координат. Два тензора равны друг другу, если каждая компонента одного из них равна соответственной компоненте другого.

Любой тензор второго ранга можно представить как сумму симметричного и антисимметричного тензоров, потому что любую компоненту Tij всегда можно записать, как

$$T_{ij} = \frac{1}{2}\left(T_{ij} + T_{ji}\right) + \frac{1}{2}\left(T_{ij} - T_{ji}\right).$$

Первый из этих членов содержит компоненты симметричного тензора, а второй - компоненты антисимметричного тензора.

Любой симметричный тензор Sij при надлежащем выборе системы координат можно преобразовать так. что он принимает простой вид

$$S_1 ii + S_2 jj + S_3 ll \quad (4.22)$$

т. е. все Sij=0, за исключением i=j. Если тензор выражен в таком виде, то говорят, что он отнесен к своим главным осям. Компоненты S11, S22, S33, отнесенные к главным осям, называются главными компонентами и их часто записывают просто как S1, S2, S3. Соответственно тензор второго ранга записывается как

(4.23)

Все эти утверждения мы не будем доказывать.

4.6. Тензор, отнесенный к главным осям

Если симметричный тензор (Sij), связывающий между собой векторы **P** и **q**, отнесен к своим главным осям, то у него только диагональные компоненты S11, S22 и S33 отличны от нуля.

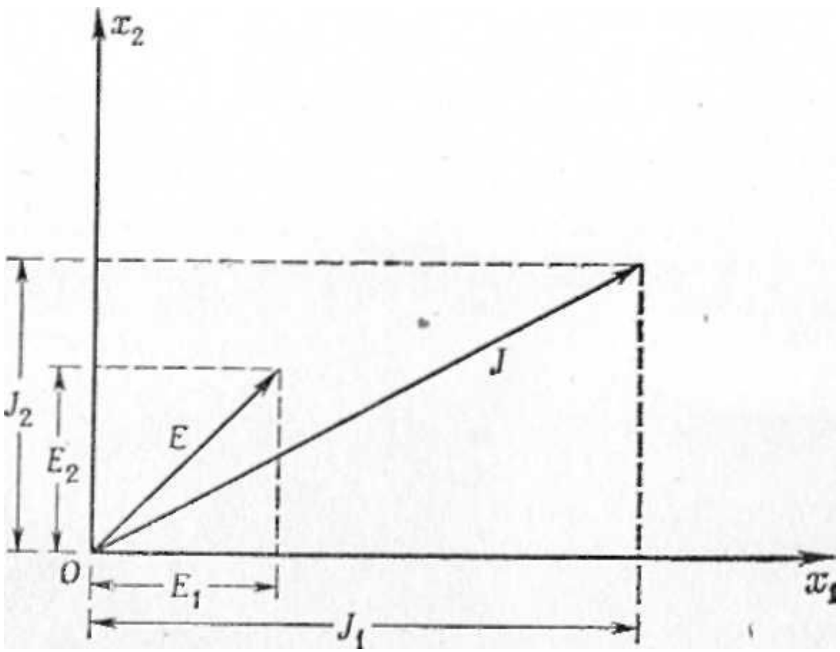
Тогда уравнения $P_i = S_{ij} q_j$ принимают простой вид

$$P_1 = S_{11} q_1, \quad P_2 = S_{22} q_2, \quad P_3 = S_{33} q_3.$$

Вернемся теперь к простому примеру электропроводности. Тензор электропроводности оц симметричен, и если отнести его к главным осям, то все σij=0, кроме σ11, σ22, σ33. Будем считать, что действует электрическое поле **E** с компонентами [E1 E2 0] по этим главным осям. Тогда

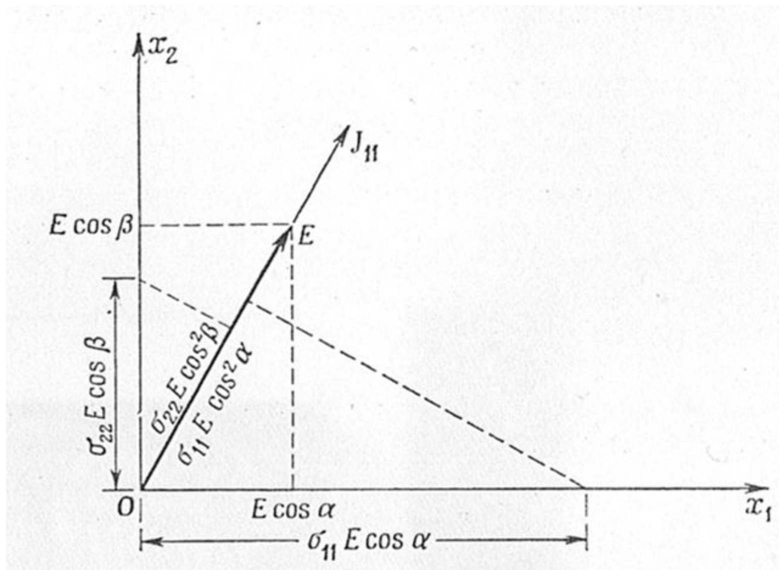
$$J_1 = \sigma_{11} E_1 + \sigma_{12} E_2 + \sigma_{13} E_3 = \sigma_{11} E_1$$

потому что и σ12, σ13 равны нулю.



Фиг. 4.2. К выводу соотношения между векторами напряженности электрического поля **E** и плотности тока **J** в кристалле.

Точно так же J2 = σ22E0 и J3 = σ33E3 но мы приняли, что E3 = 0, поэтому J3 = 0. Это можно показать на схеме фиг. 4.2. Чтобы построить эту схему, надо отложить **E** и найти E1 и E2; умножая затем E1 на σ11, получим J1, а умножая E2 на σ22 получим J2. Затем можно построить **J**, зная его компоненты по осям координат, т. е. J1 и J2. Нужно особо подчеркнуть, что **E** и **J** не параллельны. Если бы вектор **E** был направлен вдоль Ox, мы получили бы J1 = σ11E1, потому что тогда J2 и J3 были бы равны нулю. Значит, если вектор **E** направлен по одной из главных осей, то вектор **J** параллелен **E**. В общем случае электропроводность по трем главным осям не одинакова, поскольку не одинаковы значения σ11, σ22, σ33.



Фиг. 4.3. К выводу величины электропроводности в заданном направлении.

Если говорят об электропроводности в каком-то заданном направлении, то при этом подразумевается, что поле **E** приложено в этом направлении и плотность тока **J** измерена в том же направлении, т. е. измерена ее компонента **J**||, так что электропроводность в этом направлении равна компоненте **J**||, деленной на абсолютную величину **E**, т. е. **J**||/|**E**|. Найдем выражение для компоненты **J**, параллельной **E**. Пусть поле **E** действует в направлении, косинусы углов которого с главными осями тензора электропроводности обозначим cosα, cosβ и cosγ. Тогда получаем

$$J_1 = \sigma_{11}E_1 = \sigma_{11}E\cos\alpha$$
$$J_2 = \sigma_{22}E_2 = \sigma_{22}E\cos\beta$$
$$J_3 = \sigma_{33}E_3 = \sigma_{33}E\cos\gamma$$

где **E** - абсолютная величина **E** (т. е. |**E**|). Отсюда имеем

$$J_{\parallel} = J_1 \cos\alpha + J_2 \cos\beta + J_3 \cos\gamma = E\left(\sigma_{11} \cos^2 \alpha + \sigma_{22} \cos^2 \beta + \sigma_{33} \cos^2 \gamma\right)$$

и, таким образом, проводимость в данном направлении оказывается равной

$$\sigma = J_{\parallel} / E = \sigma_{11} \cos^2 \alpha + \sigma_{22} \cos^2 \beta + \sigma_{33} \cos^2 \gamma \qquad (4.24)$$

Последовательные этапы вывода уравнения (4.24) схематически показаны на фиг. 4.3 для частного случая, когда вектор E нормален к главной оси Ox3 тензора электропроводности, так что cosγ = 0.

Результат, описываемый уравнением (4.24), полезно вывести еще одним способом. Допустим, что нам надо отыскать значение компоненты σ`11 тензора электропроводности независимо от того, отнесен ли он к главным осям или нет. Компонента σ`11 связывает напряженность электрического поля вдоль оси Ox`1 с компонентой плотности тока вдоль той же оси Ox`1. Поэтому если надо найти значение электропроводности в заданном направлении, зная компоненты тензора электропроводности, отнесенные к главным осям, то будем поступать следующим образом. Выберем новую систему осей координат так, чтобы ось Ox`1 была параллельна интересующему нас направлению. Тогда компонента ox`1 тензора электропроводности, отнесенного к этой новой системе координат, даст нам искомое значение электропроводности в заданном направлении. Нас интересует только компонента ox`1, поэтому, чтобы написать совокупность величин aij для этого преобразования, достаточно знать только значения косинусов углов между Ox`1 и главными осями тензора электропроводности Ox1, Ox2 и Ox3. Согласно уравнениям (4.3), достаточно знать только a11, a12 и a13; эти величины представляют собой соответственно cosα, cosβ и cosγ. Воспользовавшись формулой преобразования (4.18), получим

$$\sigma'_{ij} = a_{ik} a_{jl} \sigma_{kl}$$

и отсюда

$$\sigma'_{11} = a_{1k} a_{1l} \sigma_{kl} \qquad (4.25)$$

Поскольку σij отнесены к своим главным осям, все члены в (4.25) равны нулю, кроме тех, в которых k=l, так что

$$\sigma'_{11} = a_{11} a_{11} \sigma_{11} + a_{12} a_{12} \sigma_{22} + a_{13} a_{13} \sigma_{33}$$

Подставляя выражения для a11, a1 2, a13, получаем

$$\sigma'_{11} = \sigma_{11} \cos^2 \alpha + \sigma_{22} \cos^2 \beta + \sigma_{33} \cos^2 \gamma$$

т. е. приходим к уравнению

(4.24).

Совершенно очевидно, что точно тем же путем мы могли бы найти электропроводность в заданном направлении, даже если бы нам были заданы значения компонент тензора электропроводности σij, отнесенные не к главным осям. В общем случае в уравнении (4.25) в развернутом виде было бы тогда девять членов. В выводе формул (4.25) не содержится предположения, что компоненты σij отнесены к главным осям. Теперь можно сформулировать, как находить свойство кристалла в заданном направлении.

Допустим, что заданы компоненты описывающего это свойство тензора Tij в осях (Ox1, Ox2, Ox3). Выберем одну из осей вдоль интересующего нас направления. Пусть направляющие косинусы этого направления по отношению к осям (Ox1, Ox2, Ox3) будут соответственно a1, a2, a3. Тогда значение свойства, характеризуемого тензором T в заданном направлении, будет

.

$$\overline{T} = a_i a_j T_{ij} \quad (4.26)$$

Это выражение пригодно для всех тензоров второго ранга независимо от того, симметричны они или нет.

4.7. Ограничения, полагаемые симметрией кристалла

Допустим, что две векторные величины **P** и **q** связаны между собой в кристалле тензором Tij, так что этот тензор описывает физическое свойство кристалла. Тогда сам кристалл определяет соотношения между компонентами **P** и компонентами **q**, и мы представляем эти соотношения с помощью тензора Tij. Запишем компоненты тензора Tij в какой-нибудь системе координат. Если теперь выбрать другую систему осей координат в кристалле, то компоненты **P** и **q** в этой новой системе в общем случае окажутся другими, а значит, изменится и соотношение между компонентами **P** и **q**.

Если же новую систему координат в кристалле выбрать так, чтобы она была связана со старой некими операциями симметрии, то значения компонент **P** и **q** в этой новой системе координат будут отличаться от их значений в старой системе, но соотношение между компонентами **P** и **q** останется неизменным, т. е.

$$T'_{ij} = T_{ij}$$

Так получится потому, что свойство кристалла не меняется при перемене осей координат. Это должно быть верно для любых преобразований симметрии. На компоненты тензора Tij, описывающего физическое свойство кристалла, накладываются поэтому определенные ограничения. Такие же рассуждения приведут к ограничениям, налагаемым на тензоры третьего и более высоких порядков.

Физические свойства, характеризуемые тензором второго ранга, обязательно центросимметричны. Это подразумевается в линейных соотношениях

$$P_i = T_{ij} q_i$$

потому что если мы заменим Pi на -Pi, а qi на -qi (т. е. если поменяем направления векторов **P** и **q** на обратные), то эти соотношения будут сохраняться при тех же значениях Tij.

Мы сможем легче понять дальнейшее, если посмотрим на предыдущее рассуждение с другой точки зрения. Допустим, что для какой-то системы осей координат (*Ox1, Ox2 и Ox3*) соотношение между Pi и qj задано тензором Tij. Если теперь мы поменяем направления осей координат, оставив неизменными векторы **P** и **q**, это равносильно тому, что мы выберем новую систему осей координат так, чтобы этим осям отвечала совокупность величин aij, имеющая вид

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix}$$

Воспользуемся теперь формулой преобразования (4.18):

$$T'_{ij} = a_{ik} a_{jl} T_{kl}$$

Все aij равны нулю, кроме тех, для которых i=j. Поэтому

$$T'_{ij} = a_{ij} a_{jj} T_{ij} = T_{ij}$$

поскольку

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = -1$$

Такой, же результат мы получили бы, если бы поменяли направление векторов **P** и **q** на обратные.

Допустим теперь, что в кристалле есть ось симметрии второго порядка; Если мы измерим какое-то свойство кристалла вдоль какого-то направления, а затем повернем кристалл на 180° вокруг этой осп и снова измерим это свойство в том же направлении, должно получиться значение такое же, как и раньше. Это налагает определенные условия на значения компонент симметричного тензора второго ранга Sij, описывающего это свойство. Чтобы посмотреть, каковы эти ограничения, выберем оси (*Ox1 Ox2, Ox3*) и допустим, что ось симметрии второго порядка совпадает с осью *Ox2*. Сначала предположим, что тензор Sij симметричен, а значит, что у него шесть независимых компонент. Если теперь выберем новые оси, связанные со старыми поворотом на 180° вокруг оси *Ox2*, то физическое свойство от этого не должно измениться. Эти новые осп связаны со старыми осями следующей совокупностью величин aij:

	Ox1	*Ox2*	*Ox3*
0x`1	*- 1*	*0*	*0*
Ox`2	*0*	*1*	*0*
0x`3	*0*	*0*	*-1*

Компоненты тензора Sij по отношению к новой системе осей выражаются через компоненты в старой системе осей как

$$S'_{ij} = a_{ik} a_{ji} S_{ki}$$

и для всех i и j должно быть справедливо равенство S`ij=Sij. Выписывая компоненты S`ij подряд одну за другой, получим

$$S'_{11} = a_{11} a_{11} S_{11} = S_{11}; \quad S'_{22} = a_{22} a_{22} S_{22} = S_{22};$$

$$S'_{33} = a_{33} a_{33} S_{33} = S_{33}; \quad S'_{13} = a_{11} a_{33} S_{13} = S_{13};$$

но

$$S'_{23} = a_{22}a_{33}S_{23} = -S_{23}$$

и

$$S'_{12} = a_{11}a_{22}S_{12} = -S_{12}$$

Таблица 4.2

Число независимых компонент тензора "второго ранга, описывающего физическое свойство кристалла

<table>
<tr><th>Кристаллографическая система</th><th>Ориентировка осей тензора по отношению и кристалографическим осям</th><th>Вид тензора</th><th>Число независимых компонентов</th><th>Характеристическая поверхность</th></tr>
<tr><td>Кубическая</td><td>Ориентировка осей произвольная</td><td>$\begin{bmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & S \end{bmatrix}$</td><td>1</td><td>Сфера</td></tr>
<tr><td>Тетрагональная
Гексагональная</td><td>Ось x3 параллельна осям 4, 6, 3 или 3</td><td>$\begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & S_3 \end{bmatrix}$</td><td>2</td><td>Эллипсоид вращения</td></tr>
<tr><td>Ромбичсскан</td><td>Оси x1, x2, x3 параллельны осям 2, совпадающим с осями x, y, z</td><td>$\begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & S_3 \end{bmatrix}$</td><td>3</td><td rowspan="3">Трехосный эллипсоид</td></tr>
<tr><td>Моноклинная</td><td>Ось x2 параллельна оси 2, совпадающей с осью y</td><td>$\begin{bmatrix} S_{11} & 0 & S_{13} \\ 0 & S_{22} & 0 \\ S_{13} & 0 & S_{33} \end{bmatrix}$</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Триклинная</td><td>Положение относительно кристаллографических осей не фиксировано</td><td>$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix}$</td><td>6</td></tr>
</table>

Воспользуемся теперь формулой преобразования (4.18):

$$T'_{ij} = a_{ik}a_{jl}T_{kl}$$

Все aij равны нулю, кроме тех, для которых i=j. Поэтому

$$T'_{ij} = a_{ij}a_{jj}T_{ij} = T_{ij}$$

поскольку

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = -1$$

Такой, же результат мы получили бы, если бы поменяли направление векторов **P** и **q** на обратные.

Допустим теперь, что в кристалле есть ось симметрии второго порядка; Если мы измерим какое-то свойство кристалла вдоль какого-то направления, а затем повернем кристалл на 180° вокруг этой осп и снова измерим это свойство в том же направлении, должно получиться значение такое же, как и раньше. Это налагает определенные условия на значения компонент симметричного тензора второго ранга Sij, описывающего это свойство. Чтобы посмотреть, каковы эти ограничения, выберем оси (*Ox1 Ox2, Ox3*) и допустим, что ось симметрии второго порядка совпадает с осью *Ox2*. Сначала предположим, что тензор Sij симметричен, а значит, что у него шесть независимых компонент. Если теперь выберем новые оси, связанные со старыми поворотом на 180° вокруг оси *Ox2*, то физическое свойство от этого не должно измениться. Эти новые осп связаны со старыми осями следующей совокупностью величин aij:

	Ox1	*Ox2*	*Ox3*
0x`1	*- 1*	*0*	*0*
Ox`2	*0*	*1*	*0*
0x`3	*0*	*0*	*-1*

Компоненты тензора Sij по отношению к новой системе осей выражаются через компоненты в старой системе осей как

$$S'_{ij} = a_{ik}a_{ji}S_{ki}$$

и для всех i и j должно быть справедливо равенство S`ij=Sij. Выписывая компоненты S`ij подряд одну за другой, получим

$$S'_{11} = a_{11}a_{11}S_{11} = S_{11}; \quad S'_{22} = a_{22}a_{22}S_{22} = S_{22};$$

$$S'_{33} = a_{33}a_{33}S_{33} = S_{33}; \quad S'_{13} = a_{11}a_{33}S_{13} = S_{13};$$

Однако мы считаем, что $S'_{23} = S_{23}$, а поэтому, если свойство, описываемое тензором S_{ij}, не должно меняться при таком преобразований, значит, S_{23} должно равняться нулю. Очевидно, и S_{12} тоже должно равняться нулю. Таким образом, у тензора второго ранга S_{ij}, описывающего физическое свойство кристалла, обладающего осью симметрии второго порядка, компоненты S_{23} и S_{12} должны равняться нулю, если этот тензор отнесен к такой системе осей, в которой ось Ox_2 совпадает с осью симметрии второго порядка.

В табл. 4.2 представлена сводка ограничений, налагаемых на компоненты симметричного тензора второго ранга, описывающего физическое свойство кристалла для каждой из кристаллографических систем. В кубической, тетрагональной, гексагональной и тригональной системах главные оси тензора совпадают с кристаллографическими осями, а в моноклинной системе с кристаллографической осью совпадает только одна из главных осей. Данные этой таблицы очень просто вывести, воспользовавшись методом, который представлен ниже. Но часть этих данных можно было бы получить, применяя к каждому из элементов симметрии заданного класса симметрии тот способ, который мы только что использовали. Табл. 4.2 применима к любому из физических свойств кристаллов, перечисленных в табл. 4.1

4.8. Характеристическая поверхность

Было показано, что измеряемое значение свойства, описываемого тензором второго ранга, зависит от направления, в котором оно измеряется, и что эту зависимость можно найти по способу, описанному в том же разделе и приводящему к уравнению (4.26), т. е.

$$\overline{T} = a_i a_j T_{ij} \qquad (4.26)$$

Раскрывая это уравнение, получаем

$$\overline{T} = a_i\left(a_1 T_{i1} + a_2 T_{i2} + a_3 T_{i3}\right) = a_1^2 T_{11} + a_1 a_2 T_{12} + a_1 a_3 T_{13} + a_2 a_1 T_{21} + a_2^2 T_{22} + a_2 a_3 T_{23} + a_3 a_1 T_{31} + a_3 a_2 T_{32} + a_3^2 T_{33} \qquad (4.27)$$

Здесь *a1, a2, a3* — направляющие косинусы данного направления по отношению к тем же осям координат, в которых описывается тензор Tij. Ограничимся пока рассмотрением симметричных тензоров второго ранга, так что Tij=Tji. Если физические свойства описываются тензорами второго ранга, то почти всегда можно показать, что данный тензор симметричен (доказательство всегда основывается на термодинамических рассуждениях).

Тензоры второго ранга, описывающие напряжения и малые деформации, всегда симметричны. Если тензор симметричен, то такие члены, как *a1a2T12* и *a2a2T21*, равны друг другу. Обозначим симметричный тензор через Sij (буква S должна напоминать, что тензор симметричен). На основании (4.27) имеем

$$\overline{S} = a_1^2 S_{11} + a_2^2 S_{22} + a_3^2 S_{33} + 2a_1 a_2 S_{12} + 2a_1 a_3 S_{13} + 2a_2 a_3 S_{23} \qquad (4.28)$$

Если же Sij не только симметричен, но и отнесен к главным осям, то равенство (4.27) упростится, и мы получим

$$\overline{S} = a_1^2 S_1 + a_2^2 S_2 + a_3^2 S_3 \qquad (4.29)$$

потому что S12=S13=S23=0. Уравнение (4.28) имеет такой же вид, как общее уравнение поверхности второго порядка (квадрики) 2), записанное в полярных координатах, начало которых совпадает с началом выбранной нами системы координат. Общее уравнение поверхности второго порядка имеет вид

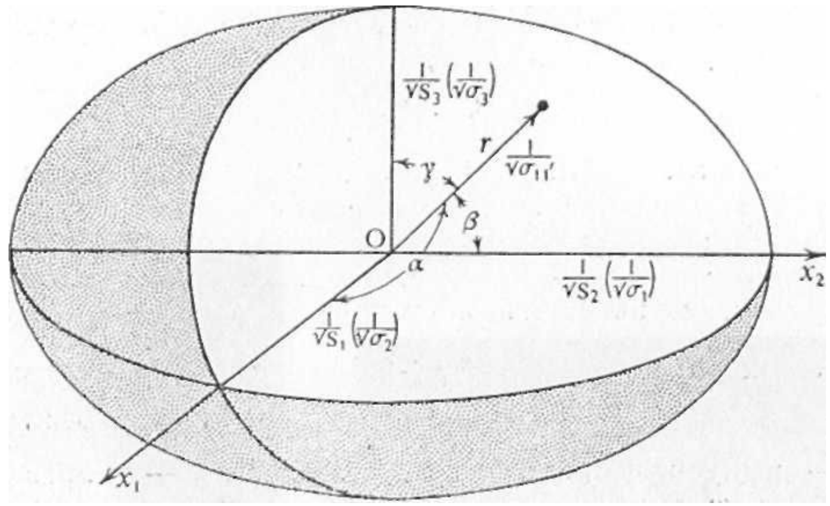
$$\frac{1}{r^2} = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma + 2D\cos\alpha\cos\beta + 2E\cos\alpha\cos\gamma + 2F\cos\beta\cos\alpha \qquad (4.30)$$

где r — радиус-вектор, а cosα, cosβ, cosγ - направляющие косинусы r по отношению к системе ортогональных осей. Если общая поверхность второго порядка отнесена к своим главным осям, то это уравнение принимает вид

$$\frac{1}{r^2} = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma \qquad (4.31)$$

т. е. выглядит так же, как уравнение (4.29). При перемене осей координат, к которым отнесена общая поверхность второго порядка, коэффициенты в уравнении (4.30) преобразуются совершенно так же, как компоненты симметричного тензора второго ранга. Поэтому зависимость данного физического свойства кристалла от направления, заданную уравнениями (4.28) и (4.29), можно изобразить в трехмерном пространстве поверхностью, характеризующей изменение свойства S в зависимости от направления.

Общая поверхность второго порядка может быть эллипсоидом, однополостным гиперболоидом или двуполостным гиперболоидом. Чтобы пояснить, как именно можно изобразить зависимость свойства S от направления в кристалле, ограничимся случаем, когда значения S1, S2 и S3 уравнении (4.29) или A, B и C в уравнении (4.30) положительны). В этом случае поверхность второго порядка, которую мы будем называть характеристической поверхностью, представляет собой эллипсоид).



Фиг. 4.4. Характеристический эллипсоид.

Обратившись к уравнениям (4.29) и (4.31), видим, что если построить эллипсоид, у которого величины главных полуосей равны , и , как на фиг. 4.4, то обратная величина длины r любого радиуса-вектора этого эллипсоида (характеристической поверхности) будет равна корню квадратному из величины свойства S в том же направлении. Обратимся к нашему примеру с электропроводностью. Если известны значения σ1, σ2, σ3 компонент электропроводности по главным осям, то можно построить характеристическую поверхность электропроводности: если все σij положительны, то это будет эллипсоид. Таким образом, если поле E действует в каком-то направлении, то величину .электропроводности в этом направлении найдем, проведя радиус-вектор r в направлении E, измерив величину г и взяв обратную величину корня квадратного из r.

Нетрудно теперь установить ограничения, налагаемые симметрией кристалла на любое физическое свойство кристалла, описываемое симметричным тензором второго ранга. Симметрия физических свойств кристалла подчиняется принципу Неймана, который гласит: «Элементы симметрии физического свойства кристалла должны включать в себя элементы симметрии точечной группы кристалла». Характеристическая поверхность показывает, как меняется данное свойство в зависимости от направления, а симметрия характеристической поверхности является симметрией физического свойства. Число независимых коэффициентов в уравнении характеристической поверхности [уравнение (4.30)) равно числу независимых компонент тензора, описывающего данное физическое свойство, — уравнение (4.28). Рассмотрим симметрию характеристической поверхности, описывающей свойство кристалла, принадлежащего какой-либо из групп Лауэ). Оказывается, что симметрия характеристической поверхности для симметричного тензора второго ранга определяется только симметрией кристаллографической системы. Все эти результаты сведены в табл. 4.2.

Кубический кристалл должен иметь четыре оси симметрии третьего порядка. Характеристическая поверхность будет сферой, а значит, выбор осей координат для симметричных тензоров второго ранга, описывающих любое из свойств, перечисленных в табл. 4.1, не играет никакой роли. В отношении этих свойств кристалл является изотропным. У гексагональных, тригональных и тетрагональных кристаллов имеются по две независимые компоненты для свойств, приведенных в табл. 4.1, поэтому характеристическая поверхность должна быть поверхностью вращения вокруг оси симметрии соответственно шестого, четвертого или третьего порядков. В общем случае у характеристической поверхности есть три взаимно перпендикулярные оси второго порядка.

В ромбической системе оси характеристической поверхности должны совпадать с тремя взаимно перпендикулярными осями симметрии второго порядка кристалла. В этом случае и для описания физического свойства необходимо знать три независимые компоненты тензора. В моноклинной системе одна из осей второго порядка характеристической поверхности должна быть параллельна одной из кристаллографических осей второго порядка. Имеется четыре независимые компоненты симметричного тензора второго ранга, описывающего физическое свойство. Три из них — это длины полуосей характеристической поверхности, а четвертая - угол между кристаллографической осью и главной осью характеристической поверхности в плоскости, нормальной к кристаллографической осп симметрии второго порядка. В триклинной системе, поскольку симметричный тензор второго ранга центро-симметричен, а голосимметричный класс этой системы обладает как раз центром симметрии, имеется шесть независимых компонент для любого свойства, которое можно описать симметричным тензором второго ранга.

Задачи

4.1 Определите понятие тензора второго ранга. Запишите два физических свойства кристалла, которые можно описать симметричным тензором второго ранга, и для каждого из них установите те две физические величины, которые связаны этими тензорами. Для одного из наших примеров выпишите полностью уравнения соотношений между компонентами этих двух физических величин и объясните все обозначения. Объясните физический смысл компоненты D12 в тензоре коэффициента диффузии D**.**

4.2 Представляет ли совокупность aij в уравнении (4.3) компоненты тензора второго ранга?

4.3 Представьте в виде симметричного и антисимметричного тензоров -следующий тензор:

$$\begin{pmatrix} 12 & 6 & 0 \\ 4 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

4.4. Если σ - симметричный тензор второго ранга, а n и b — векторы, то покажите, что

$$(\sigma\cdot n)\cdot b = (\sigma\cdot b)\cdot n.$$

4.5 Кристалл обладает единственной осью симметрии четвертого порядка, параллельной оси z**.** Найдите необходимые соотношения между компонентами тензора второго порядка, описывающего физическое свойство этого кристалла, если тензор отнесен к осям, параллельным кристаллическим осям. Как вы согласуете ваш результат с характеристиками тетрагональных кристаллов в табл. 4.2?

Докажите, что как симметричный, так и антисимметричный тензор не зависят от выбора осей.

а) Тензор электропроводности кристалла имеет компоненты

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 18{,}25 & -\sqrt{3\cdot 2{,}25} & 0 \\ -\sqrt{3\cdot 2{,}25} & 22{,}75 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}\cdot 10^{6}$$

Ом-1см-1

Выберите новые оси, повернутые на 60° вокруг x_3 по часовой стрелке, если смотреть с отрицательного конца x_3, и составьте таблицу направляющих косинусов между новыми и старыми осями. Проверьте, что сумма квадратов a_{ij} равна 1 в каждом ряду и в каждом столбце.

б) Выпишите компоненты тензора электропроводности по новым осям координат. Проверьте, что σ_{ij} *не* изменился. Теперь тензор отнесен к главным осям.

в) Начертите сечение характеристической поверхности (т. е. в данном случае эллипсоида электропроводности) плоскостью x'_3=0. Начертите радиусы-векторы получившегося эллипса под углами 30 и 60° к x_1 и найдите но ним значения электропроводности и этих направлениях.

г) Проверьте прямыми вычислениями результаты, полученные в п. в).

д) Допустим, что электрическое поле **E** напряженностью 1 В/см действует в направлении ОЕ под углом 60° к x_1 в плоскости $x`_3$=0. Выпишите компоненты этого электрического поля по $x`_1$ по $x`_2$, и найдите по ним плотности электрического тока в тех же направлениях. Наконец, найдите компоненты результирующей плотности тока в направлении **E** и по ним электропроводность в том же направлении.

е) Найдите направление результирующего вектора плотности тока **J** в п. д).

ж) Найдите направление результирующего вектора плотности тока па вашем чертеже [п. в)]. Вы увидите, что направление **J** совпадает с нормалью к характеристической поверхности, восстановленной в той точке, где ОЕ пересекает эту поверхность.

Этот результат является общим и называется *свойством радиуса-вектора и нормали характеристической поверхности*. Его можно сформулировать так. Если S_{ij} - компоненты симметричного тензора второго ранга, связывающего между собой векторы **p** и **q**, так что $p_i=S_{ij}q_j$, тогда направление **p** для заданного **q** можно найти, проведя параллельный вектору **q** радиус-вектор OQ характеристической поверхности и восстановив нормаль к этой поверхности в точке О.