

***Московский инженерно-физический институт
(государственный университет)
Физико-технический факультет***

Лекция 14

Прямой метод решения уравнений в матричной форме.

Организация итерационного процесса.

Проблема сходимости численных схем.

Улучшенные итерационные методы.

Внутренние и внешние итерации.

Прямой метод решения уравнений в матричной форме

Рассмотрим уравнение в матричной форме в виде:

$$= \overset{\square}{A} \overset{\square}{\Phi} \overset{\square}{Q}$$

Диагональные компоненты матрицы $\overset{\square}{A}$ положительны, в то время как недиагональные члены - отрицательны или равны нулю. Сумма недиагональных элементов в любом данном ряду меньше, чем диагональный элемент. Таким образом, матрица $\overset{\square}{A}$ является неприводимой диагонально преобладающей. Следовательно, для матрицы $\overset{\square}{A}$ существует обратная матрица $\overset{\square}{A}^{-1}$, и решение уравнения можно записать в виде:

$$= \overset{\square}{\Phi} \overset{\square}{A}^{-1} \overset{\square}{Q}$$

Организация итерационного процесса

Запишем матрицу $\overset{\Delta}{A}$ в виде суммы трех матриц:

$$\overset{\Delta}{A} = \overset{\Delta}{A} - \overset{\Delta}{D} - \overset{\Delta}{U} - \overset{\Delta}{V}$$

где $\overset{\Delta}{D}$ – диагональная матрица (отличные от нуля элементы находятся только на основной диагонали), $\overset{\Delta}{U}$ – верхняя треугольная матрица (отличные от нуля элементы находятся только выше основной диагонали) и $\overset{\Delta}{V}$ – нижняя треугольная матрица (отличные от нуля элементы находятся ниже основной диагонали).

$$= (\overset{\Delta}{D} \overset{\Delta}{\Phi} + \overset{\Delta}{U} \overset{\Delta}{V} \overset{\Delta}{\Phi} \overset{\Delta}{Q})$$

Итерационный процесс можно определить следующим образом:

$$= \overset{\Delta}{\Phi}^{(i+1)} + \overset{\Delta}{D}^{-1} \overset{\Delta}{U} \overset{\Delta}{V} \overset{\Delta}{\Phi}^{(i)} \overset{\Delta}{D}^{-1} \overset{\Delta}{Q}$$

Проблема сходимости численных схем

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока разность между потоками $\Phi_{\Delta}^{(i)}$ и $\Phi_{\Delta}^{(i+1)}$ на двух последующих итерациях не будет меньше заданного критерия. В зависимости от физических особенностей решаемой задачи и организованной итерационной схемы может возникнуть проблема сходимости или скорости сходимости итерационного процесса.

Улучшенные итерационные методы

При расчете любой компоненты $\bar{\Phi}^{(i+1)}$ в правой части уравнения будут использоваться только значения потока из последней итерации, т. е. $\bar{\Phi}^{(i)}$. Может оказаться, что после того, как рассчитана новая компонента $\bar{\Phi}^{(i+1)}$, более предпочтительно использовать именно ее, а не $\bar{\Phi}^{(i)}$ для определения последующих компонент $\bar{\Phi}^{(i+1)}$:

$$(\bar{D} - \bar{V}) \bar{\Phi} = \bar{U} \bar{\Phi} + \bar{Q}$$

Так как матрица $(\bar{D} - \bar{V})$ треугольная, включая основную диагональ, то можно легко найти обратную ей или решить уравнение относительно $\bar{\Phi}^{(i+1)}$.

Внутренние и внешние итерации

Организация итерационного процесса, включающая внутренние и внешние итерации, основана на идее вычисления компонент $\Phi^{(i+1)}$ на базе только вычисленных компонент $\Phi^{(i)}$ и $\Phi^{(i+1)}$ в внутренних итерациях. На внешних итерациях производится пересчет источника с учетом всех вычисленных $\Phi^{(i+1)}$. Часто на внутренних итерациях решается уравнение с фиксированным источником деления, а полученное решение в итерациях по рассеянию используется для пересчета источника деления.