

«Показательная
функция»

Цель:

- Рассмотрение основных свойств показательной функции.
- Построение графика.
- Решение показательных уравнений.
- Решение показательных неравенств.

Определение

Показательная функция – это

функция вида $y = a^x$,

где x – переменная,

a – заданное число, $a > 0$, $a \neq 1$.

Примеры: $y = 3^x$; $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $y = 0,4^x$

Свойства показательной функции $y = a^x$

1. Область определения:

все действительные числа

$$D(y) = \mathbb{R};$$

2. Множество значений:

все положительные числа

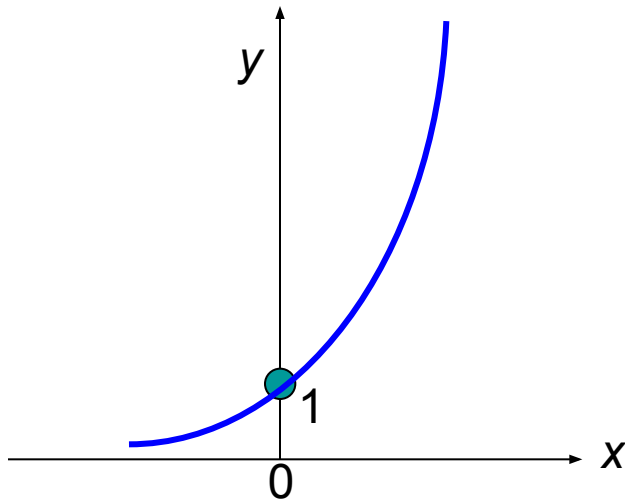
$$E(y) = (0; +\infty);$$

3. При $a > 1$ функция возрастающая;
при $0 < a < 1$ функция убывающая.

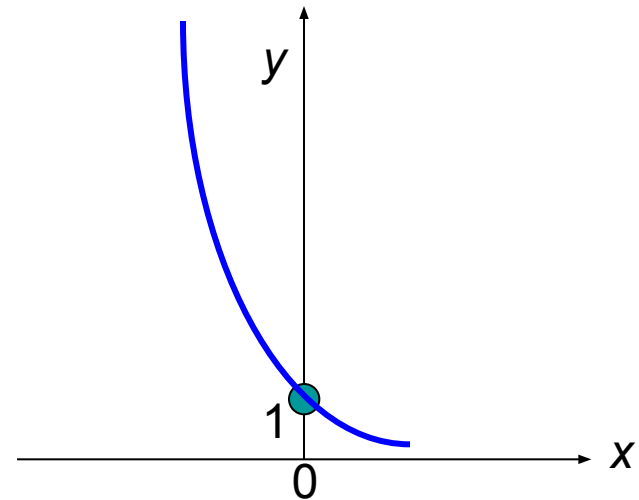
График показательной функции

Т.к. $a^0 = 1$, то график любой показательной функции проходит через точку $(0; 1)$

$$a > 1$$



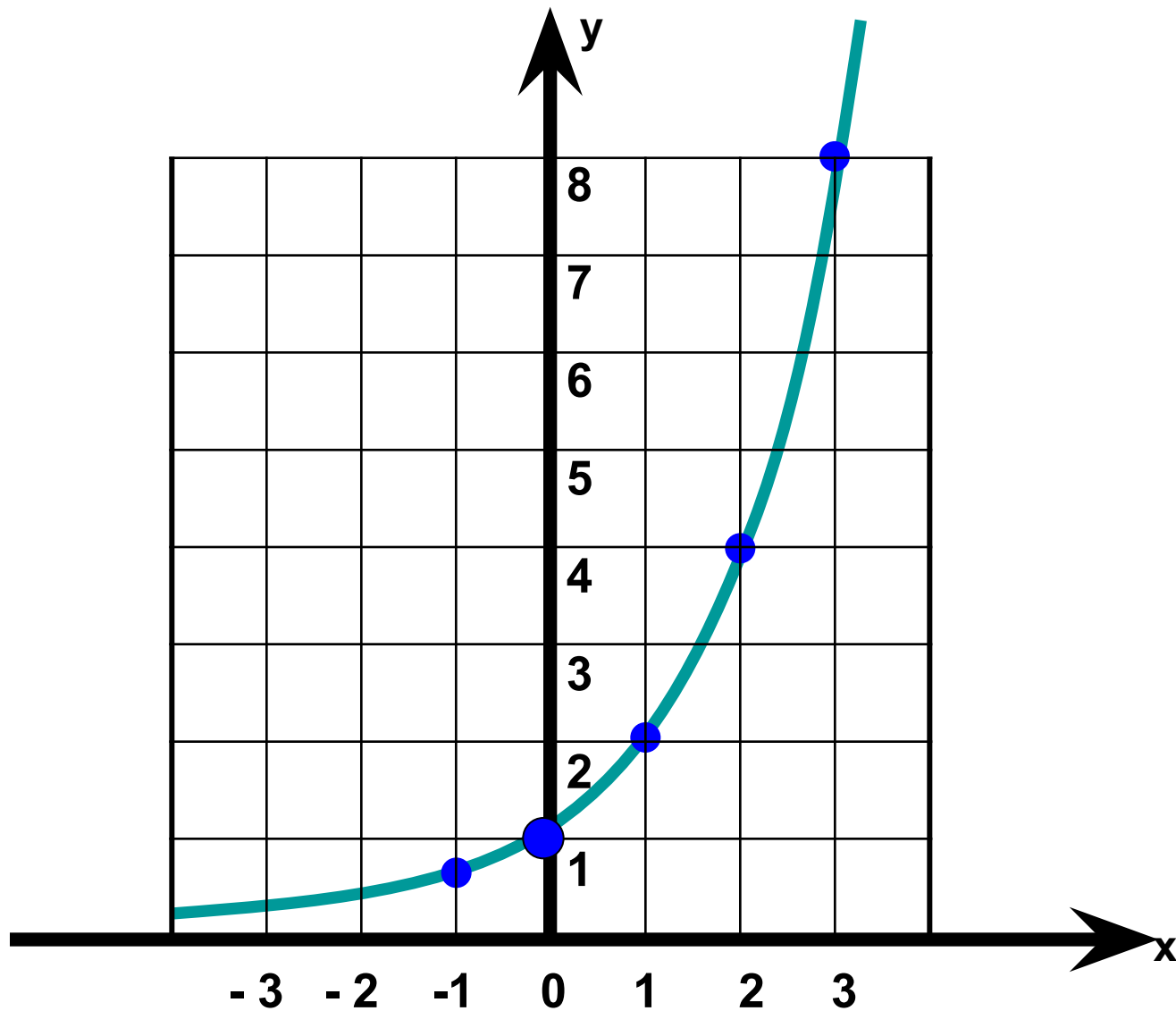
$$0 < a < 1$$



Задача 1

Построить график функции $y = 2^x$

x	y
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8



Задача 3

Сравнить число 3^{-5} с 1.

Решение

$$\begin{array}{l} 1 = 3^0 \\ -5 < 0 \\ 3 > 1 \end{array} \left| \begin{array}{l} \longrightarrow 3^{-5} < 3^0 \\ \longrightarrow 3^{-5} < 1 \end{array} \right.$$

Ответ: $3^{-5} < 1$

Задача 2

Сравнить числа $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$ и $\left(\frac{1}{3}\right)^{1,4}$

Решение

$$\begin{array}{l} \sqrt{2} = 1,41\dots > 1,4 \\ 0 < \frac{1}{3} < 1 \end{array} \quad \left| \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{1,4}$$

Ответ: $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{1,4}$

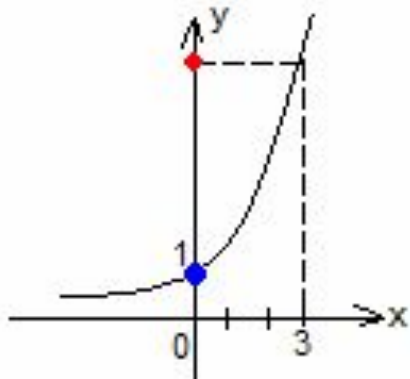
Задача 4

Сравнить число p с 1

$$p = 2^3$$

$2 > 1$, то

функция $y = 2^t$ –
возрастающая.

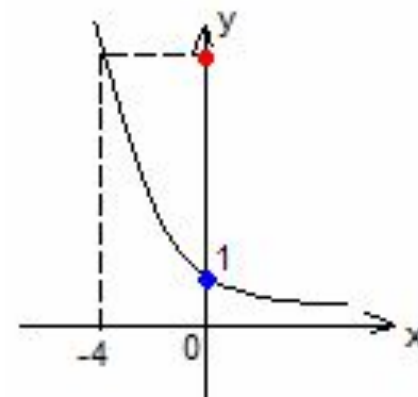


Ответ: $2^3 > 1$.

$$p = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$$

$0 < \frac{1}{2} < 1$, то
функция $y = \left(\frac{1}{2}\right)^t$

– убывающая



Ответ: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} > 1$

Показательные уравнения

```
graph TD; A[Показательные уравнения] --> B[Определение]; A --> C[Способы решения сложных уравнений]; A --> D[Простейшие уравнения];
```

Определение

Способы решения
сложных уравнений

Простейшие
уравнения

Определение

Уравнение, в котором
переменная содержится в
показателе степени, называется
показательным.

Примеры: $2^x = 8$; $9^x - 5 \cdot 3^x + 6 = 0$

Простейшее показательное уравнение – это уравнение вида

$$a^x = a^b, \text{ где } a > 0, a \neq 1.$$

Простейшее показательное уравнение решается с использованием свойств степени.

$$a^x = a^b \Leftrightarrow x = b$$

Простейшие показательные уравнения

$$1). 2^{3x+4} = 2^{x-7} \Leftrightarrow 3x+4 = x-7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x - x = -7 - 4 \Leftrightarrow 2x = -11 \Leftrightarrow x = -5,5.$$

Ответ: - 5,5.

$$2). 5^{x^2-3x} = 1 \Leftrightarrow 5^{x^2-3x} = 5^0 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = 3. \end{cases}$$

Ответ: 0; 3.

Способы решения сложных показательных уравнений.

```
graph TD; A[Способы решения сложных показательных уравнений.] --> B[Замена переменной]; A --> C[Деление на показательную функцию]; A --> D[Вынесение за скобки степени с меньшим показателем];
```

Замена
переменной

Деление на
показательную
функцию

Вынесение
за скобки
степени с
меньшим
показателем

Вынесение за скобки степени с меньшим показателем

Данный способ используется, если соблюдаются два условия:

- 1) основания степеней одинаковы;
- 2) коэффициенты перед переменной одинаковы

Например: $2^{x+1} - 4 \cdot 2^{x-2} = 32$

Вынесение за скобки степени с меньшим показателем

$$2^{x+1} - 4 \cdot 2^{x-2} = 32$$

$$2^{x-2} (2^3 - 4 \cdot 1) = 32$$

$$2^{x-2} (8 - 4) = 32$$

$$2^{x-2} \cdot 4 = 32 | :4$$

$$2^{x-2} = 8$$

$$2^{x-2} = 2^3$$

$$x - 2 = 3$$

$$x = 5$$

Ответ: 5

$$x + 1 - (x - 2) =$$

$$= x + 1 - x + 2 = 3$$

Замена переменной

При данном способе показательное уравнение сводится к квадратному.

Способ замены переменной используют, если

а) основания степеней одинаковы;

б) показатель одной из степеней в 2 раза больше, чем у другой.

Например:

$$3^{2x} - 4 \cdot 3^x - 45 = 0$$

коэффициенты перед переменной противоположны.

Например:

$$2^{2-x} - 2^{x-1} = 1$$

Замена переменной (1)

основания степеней одинаковы, показатель одной из степеней в 2 раза больше, чем у другой .

$$3^{2x} - 4 \cdot 3^x - 45 = 0$$

$$t = 3^x (t > 0)$$

$$t^2 - 4t - 45 = 0$$

$$\text{По т. Виета: } t_1 \cdot t_2 = -45; t_1 + t_2 = 4$$

$$t_1 = 9; t_2 = -5 \text{ — не удовлетворяет условию}$$

$$3^x = 9; 3^x = 3^2; x = 2.$$

Ответ: 2

Замена переменной (2)

Основания степеней одинаковы,
коэффициенты перед переменной противоположны.

$$2^{2-x} - 2^{x-1} = 1$$

$$2^2 \cdot 2^{-x} - 2^x \cdot 2^{-1} = 1$$

$$t = 2^x \quad (t > 0)$$

$$\frac{4}{t} - \frac{t}{2} = 1$$

$$8 - t^2 = 2t$$

$$t^2 + 2t - 8 = 0$$

По т. Виета:

$$t_1 \cdot t_2 = -8, \quad t_1 + t_2 = -2$$

$$t_1 = -4 \quad \text{- Не удовлетворяет условию}$$

$$t_2 = 2$$

$$2^x = 2$$

$$x = 1$$

Ответ: 1

Деление на показательную функцию

Данный способ используется, если основания степеней разные.

а) в уравнении вида $a^x = b^x$ делим на b^x

Например: $2^x = 5^x \mid : 5^x$

б) в уравнении $A a^{2x} + B (ab)^x + C b^{2x} = 0$ делим на b^{2x} .

Например:

$$3 \cdot 25^x - 8 \cdot 15^x + 5 \cdot 9^x = 0 \mid : 9^x$$

Деление на показательную функцию

$$a) 2^x = 5^x \quad | : 5^x$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x = 1$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{2}{5}\right)^0$$

$$x = 0$$

Ответ: 0

Деление на показательную функцию

$$3 \cdot 25^x - 8 \cdot 15^x + 5 \cdot 9^x = 0 \quad | :9^x$$

$$\frac{3 \cdot 5^{2x}}{3^{2x}} - \frac{8 \cdot 5^x \cdot 3^x}{3^{2x}} + 5 = 0$$

$$3 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{2x} - 8 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^x + 5 = 0$$

$$t = \left(\frac{5}{3}\right)^x \quad (t > 0)$$

$$3t^2 - 8t + 5 = 0$$

$$3t^2 - 8t + 5 = 0$$

$$D = 64 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = 4 = 2^2$$

$$t_1 = \frac{8+2}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}; \quad t_2 = \frac{8-2}{6} = 1.$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^x = \frac{5}{3}$$

$$x = 1$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^x = 1$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^x = \left(\frac{5}{3}\right)^0$$

$$x = 0$$

Ответ: 0; 1.

Показательные неравенства

```
graph TD; A[Показательные неравенства] --> B[Определение]; A --> C[Простейшие неравенства]; C --> D[Решение неравенств]
```

Определение

Простейшие
неравенства

Решение неравенств

Определение

Показательные неравенства –

это неравенства, в которых

неизвестное содержится в

показателе степени.

Примеры: $3^x \leq 9$; $2^x + 5 \cdot 2^{x+1} > 11$

Простейшие показательные неравенства – это неравенства вида:

$$a^x > a^b$$

$$a^x \geq a^b$$

$$a^x < a^b$$

$$a^x \leq a^b$$

где $a > 0$, $a \neq 1$, b – любое число.

При решении **простейших** неравенств используют свойства возрастания или убывания показательной функции.

$$\left. \begin{array}{l} a^x \textcircled{>} a^b \\ a > 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x \textcircled{>} b \quad \left| \quad \left. \begin{array}{l} a^x \textcircled{>} a^b \\ 0 < a < 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x \textcircled{<} b$$

Для решения более **сложных** показательных неравенств используются те же способы, что и при решении показательных уравнений.

Решение показательных неравенств

- Простейшие показательные неравенства
- Двойные неравенства
- Неравенства, решаемые вынесением за скобки степени с меньшим показателем
- Неравенства, решаемые заменой переменной

Простейшие показательные неравенства

$$1). \quad 3^x > 9 \Leftrightarrow 3^x \textcircled{>} 3^2 \Leftrightarrow x \textcircled{>} 2$$

Ответ : $x > 2$.

$$2). \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x \textcircled{>} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x \textcircled{<} 2$$

Ответ : $x < 2$.

Двойные неравенства

$$\frac{1}{3} < 3^{3+x} < 9$$

$$3^{-1} < 3^{3+x} < 3^2$$

$$3 > 1, \text{ то } -1 < 3 + x < 2$$

$$-1 - 3 < x < 2 - 3$$

$$-4 < x < -1$$

Ответ: $(-4; -1)$.

Решение показательных неравенств

Метод: Вынесение за скобки степени с меньшим показателем

$$3^{x-3} + \frac{1}{3} \cdot 3^x > 10$$

$$3^{x-3} \left(1 + \frac{1}{3} \cdot 3^3\right) > 10$$

$$3^{x-3} (1 + 9) > 10$$

$$3^{x-3} \cdot 10 > 10 \quad | : 10$$

$$3^{x-3} > 1$$

$$3^{x-3} > 3^0$$

Т.к.
 $3 > 1$, то знак неравенства
остается прежним

$$x - 3 > 0$$

$$x > 3.$$

Ответ: $x > 3$

Решение показательных неравенств

Метод: Замена переменной

$$3 \cdot 9^x + 11 \cdot 3^x < 4$$

$$3 \cdot 3^{2x} + 11 \cdot 3^x - 4 < 0$$

$$3^x = t \quad (t > 0)$$

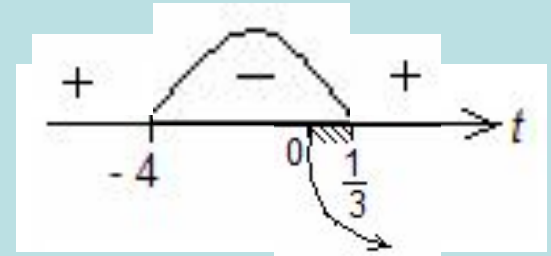
$$3t^2 + 11t - 4 < 0$$

$$D = 11^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4) = 121 + 48 = 169 = 13^2$$

$$t_1 = \frac{-11 + 13}{2 \cdot 3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$t_2 = \frac{-11 - 13}{6} = \frac{-24}{6} = -4$$

$$3(t + 4) \left(t - \frac{1}{3} \right) < 0$$



$$0 < t < \frac{1}{3}; 0 < 3^x < \frac{1}{3}$$

$$3^x < 3^{-1};$$

$3 > 1$, то $x < -1$.

ОТВЕТ: $x < -1$.

Используемая литература.

- А.Г.Мордкович: Алгебра и начала математического анализа(профильный уровень), 10класс,2011г.
- А.Н. Колмогоров: Алгебра и начала математического анализа,2008г.
- Интернет