

# Матрицы

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел .

Если матрица содержит  $m$  строк и  $n$  столбцов, то говорят, что матрица имеет размерность  $m \times n$  .

$m$  - порядок матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Обозначение матриц

$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

Матрица размера  $n \times n$  называется ***квадратной***.

Матрица , имеющая только одну строку называется ***матрицей-строкой***.

Матрица, имеющая только один столбец называется ***матрицей-столбцом*** .

Две матрицы считаются *равными*, если равны их размеры и равны элементы, стоящие на одинаковых местах.

Квадратная матрица называется *невырожденной* (неособенной), если её определитель отличен от нуля, и *вырожденной* (особенной), если определитель её равен нулю.



Квадратная матрица вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

наз. единичной и обозначается  $E$

- Матрица, все элементы которой равны нулю, наз. нулевой.
- Определитель, составленный из элементов квадратной матрицы, наз. определителем матрицы.

Очевидно  $|E| = 1$

- Матрица

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

наз. транспонированной по отношению к матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

# Действия над матрицами.

**Суммой** двух матриц одинаковой размерности  $A$  и  $B$  называется матрица  $C$  той же размерности, элементы которой равны суммам элементов матриц  $A$  и  $B$  с одинаковыми индексами.

Произведением матрицы на число  $\alpha$  называется матрица, получающаяся из матрицы  $A$  умножением всех её элементов на  $\alpha$ .

Разностью двух матриц  $A$  и  $B$  одинаковой размерности называется матрица  $C=A+(-B)$ .

Произведением матрицы  $A = (a_{ij})$  размера  $m \times n$  на матрицу  $B = (b_{ij})$  размера  $n \times k$  называется матрица  $C = (c_{ij})$  размера  $m \times k$ , элемент  $c_{ij}$  которой, стоящий в  $i$ -ой строке и  $j$ -ом столбце, равен сумме произведений элементов  $i$ -ой строки матрицы  $A$  и соответствующих элементов  $j$ -го столбца матрицы  $B$ .



# Свойства операций над матрицами

$$1. A+B=B+A$$

$$2. (A+B)+C=A+(B+C)$$

$$3. k(A+B)=kA+kB$$

$$4. AB \neq BA$$

$$5. (AB)C=A(BC)$$

$$6. A(B+C)=AB+AC$$

$$7. A+O=A$$

$$8. AE=EA=A$$

- Если  $A$  и  $B$  две квадратные матрицы одного порядка, то

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

# Обратная матрица

Пусть  $A$  - квадратная матрица.  
Обратной для неё матрицей наз.  
квадратная матрица того же порядка,  
обозначаемая  $A^{-1}$  и  
удовлетворяющая условию

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

- Для того, чтобы квадратная матрица  $A$  имела обратную матрицу, необходимо и достаточно, чтобы матрица  $A$  была невырожденной.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{31}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \frac{A_{32}}{\Delta} \\ \frac{A_{13}}{\Delta} & \frac{A_{23}}{\Delta} & \frac{A_{33}}{\Delta} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

# Ранг матрицы

Рангом матрицы называется наивысший из порядков отличных от нуля миноров матрицы.

Ранг матрицы  $A$  обозначается:

$$r(A) \quad \text{или} \quad \textit{rang}(A) .$$

# Теорема о ранге матрицы

Ранг матрицы равен  
максимальному числу линейно –  
независимых строк матрицы.

# Элементарные преобразования матрицы.

1. Умножение всех элементов строк на одно и то же число не равное 0.
2. Перестановка строк местами.
3. Прибавление к элементам одной строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на одно и тоже число.

4.Отбрасывание одной из двух  
одинаковых строк.

5.Отбрасывание нулевой строки

**Теорема:** Элементарные преобразования не меняют ранг матрицы.

Матрицы, полученные с помощью элементарных преобразований наз. эквивалентными ( $\sim$ ).

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-2) & (-1) \\ + & \\ + & \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 5 & 1 \\ 0 & 7 & -5 & -1 \end{pmatrix} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 5 & 1 \\ 0 & 7 & -5 & -1 \end{pmatrix}} \right\} +$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$r(A) = 2$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & -1 & -3 \\ 5 & 6 & -1 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} 3 & 5 \\ (-2) \\ (-2) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \\ 0 & 3 & 27 & -23 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (-3) \\ + \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$r(A) = 3$$