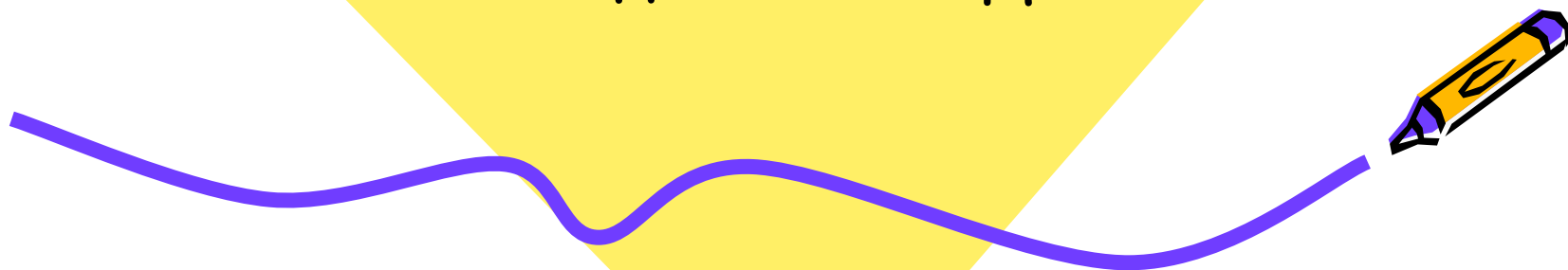




Элементы комбинаторики

Ахмеджанова Т.Д.



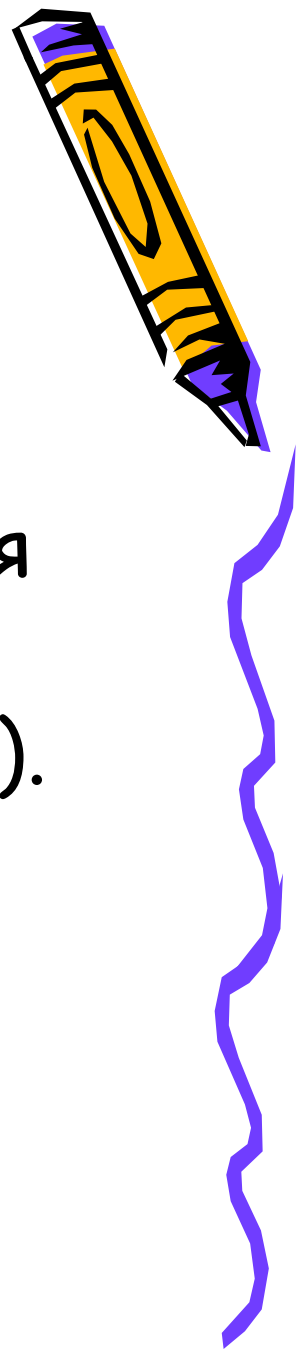
Комбинаторика

- раздел математики, посвященный решению задач выбора и расположения элементов некоторого, как правило, конечного множества в соответствии с заданными правилами.



Множество

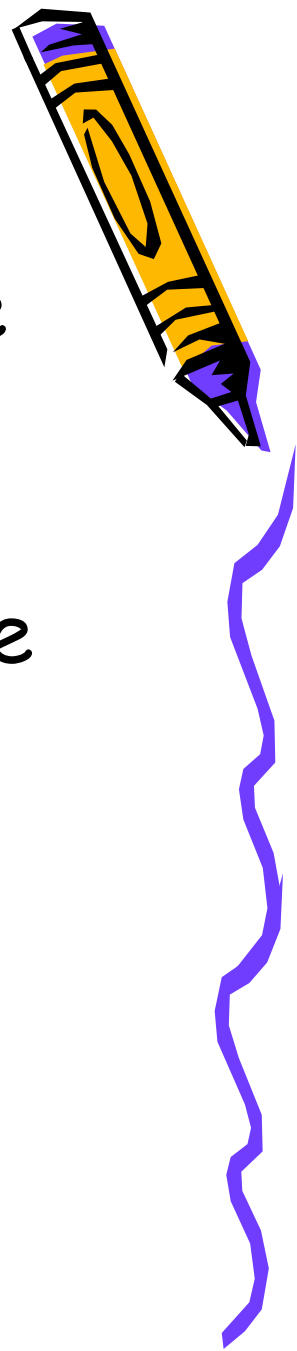
- Всякая совокупность элементов произвольного рода, обладающая некоторым общим свойством, образует **множество** (соединение).



Примеры множеств:

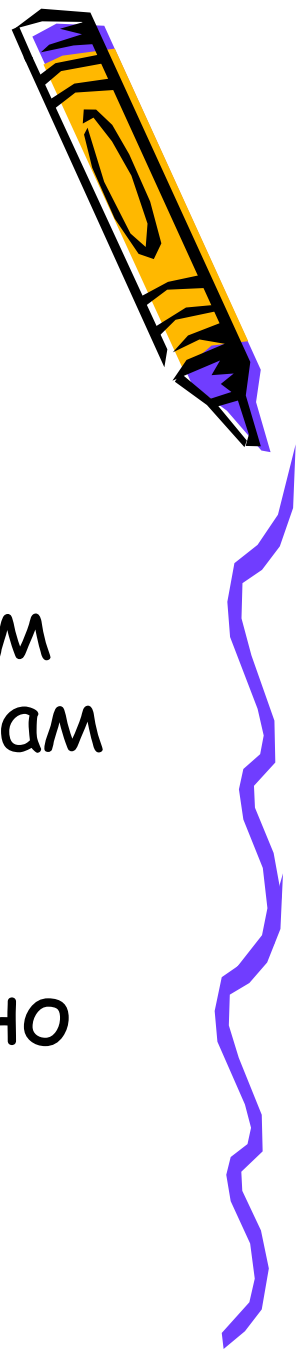
- множество всех действительных чисел,
- множество натуральных чисел,
- множество всех студентов данного университета,
- множество парт в данном классе.





- Множество считается определенным, если указаны все его элементы или указано их общее свойство.
- Множества, содержащие конечное число элементов, называются **конечными**. Характеристикой конечного множества является число его элементов.





- Множество, состоящее из n элементов, называется **упорядоченным**, если каждому элементу этого множества поставлено в соответствие натуральное число от 1 до n таким образом, что различным элементам соответствуют различные натуральные числа.
- Всякое конечное множество можно упорядочить.



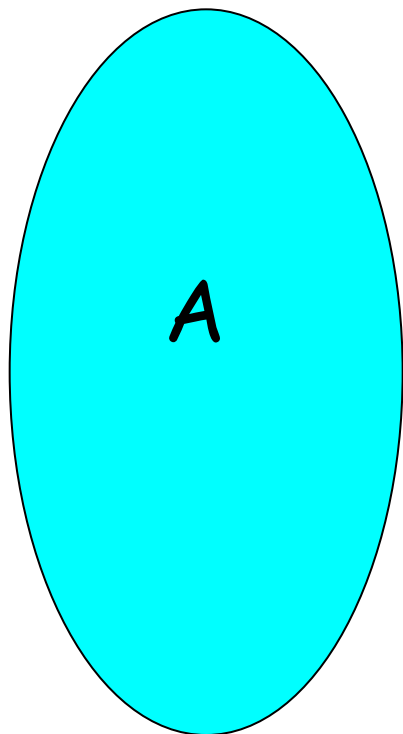
Правило суммы



- Пусть некоторый предмет A может быть выбран m способами, а другой предмет B может быть выбран n способами. Тогда имеется $m + n$ возможностей выбрать либо предмет A , либо предмет B .



Правило суммы

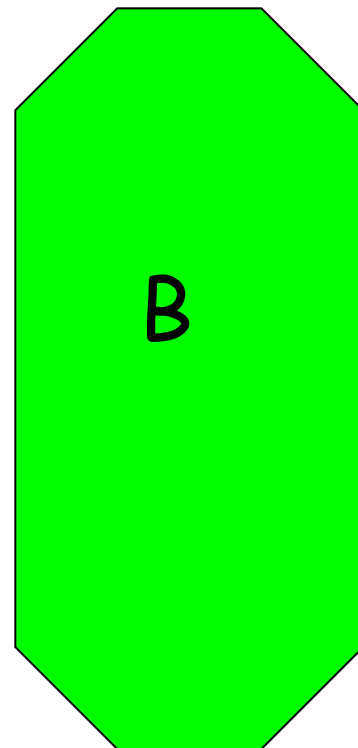


A или B

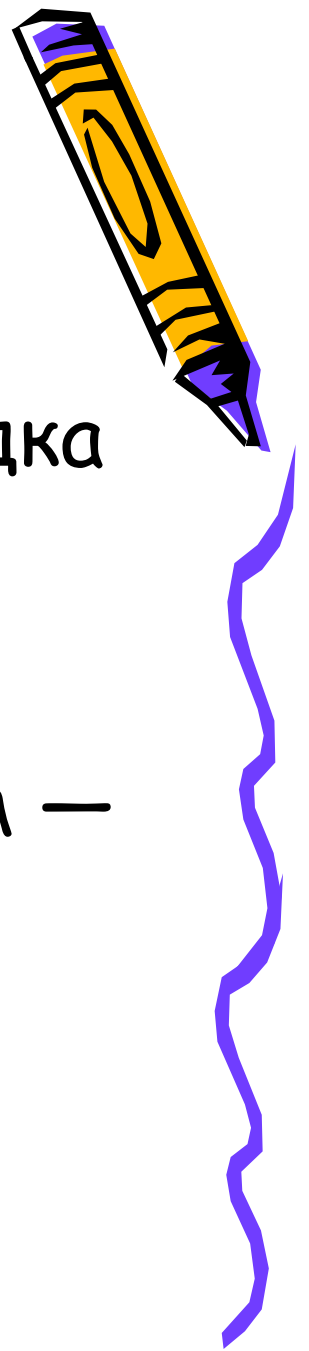
$A \vee B$

$A \cup B$

$A + B$



Задача 1



- От сквера Кирова до академгородка можно проехать через Ангарский мост, плотину и новый мост. В первом случае количество дорог равно 2, во втором — 2, в третьем — 3. Сколькими способами можно добраться от сквера Кирова до академгородка ?



Решение

академгородок

сквер

$$2+2+3=7$$

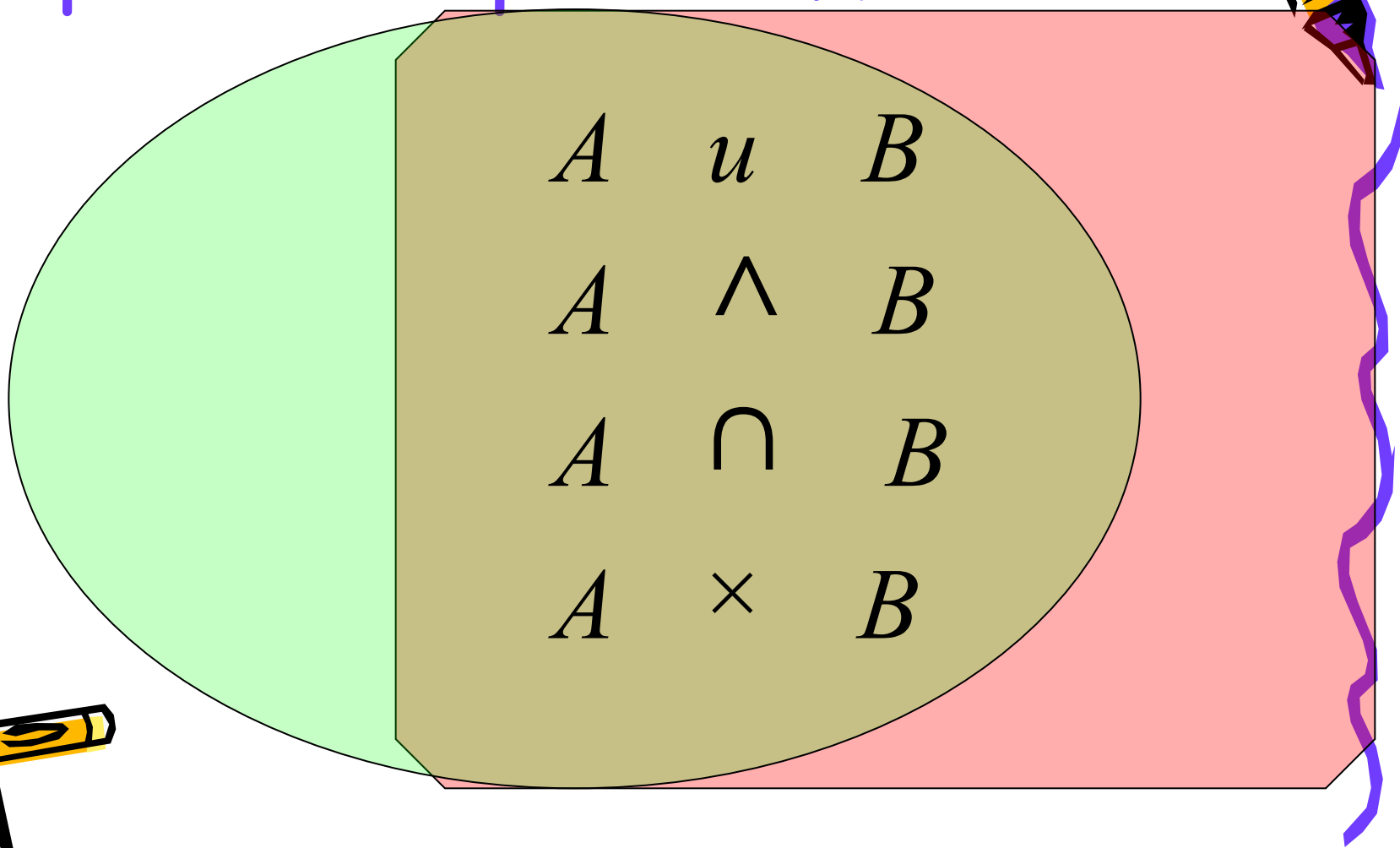


Правило произведения

Пусть некоторый предмет A может быть выбран m способами, а другой предмет B может быть выбран n способами. Тогда имеется mn возможностей выбрать предмет A и предмет B .

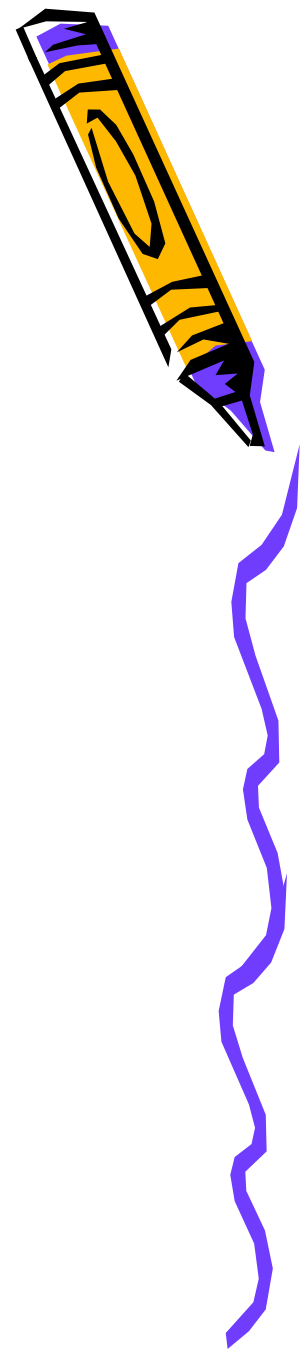


Правило произведения



Задача 2

- В киоске продают 5 видов конвертов и 4 вида открыток. Сколькими способами можно купить конверт и открытку?



Решение

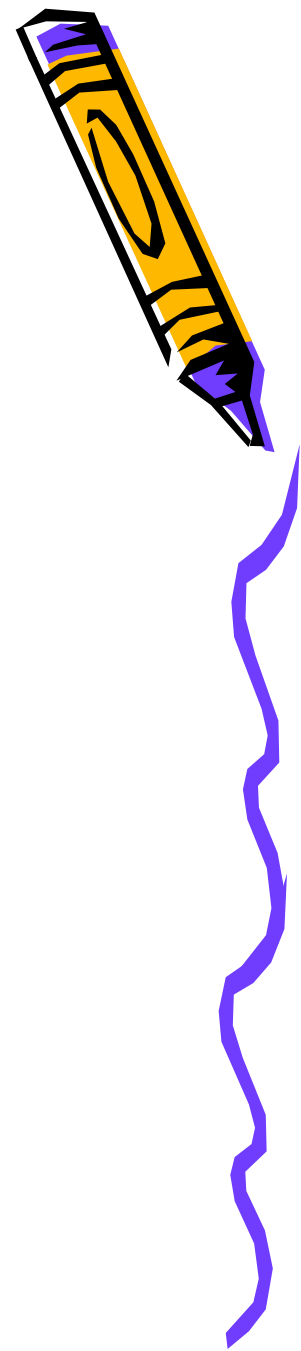


$$5 \cdot 4 = 20$$

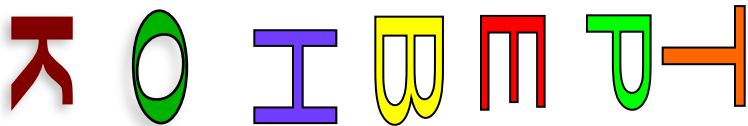


Задача 3

- Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова КОНВЕРТ?



Решение

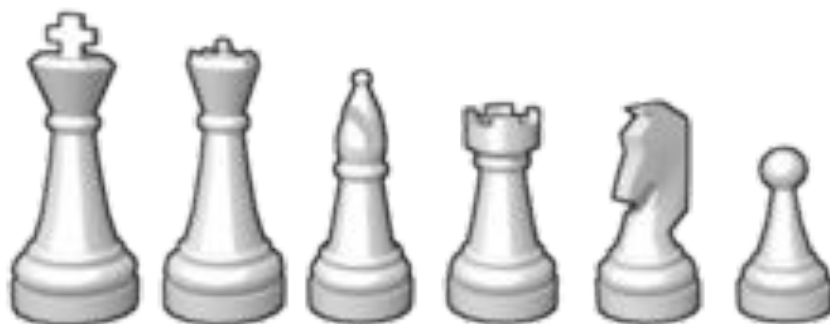


- Гласную можно выбрать двумя способами.
- Согласную — пятью способами.
- Ответ. $2 \cdot 5 = 10$.

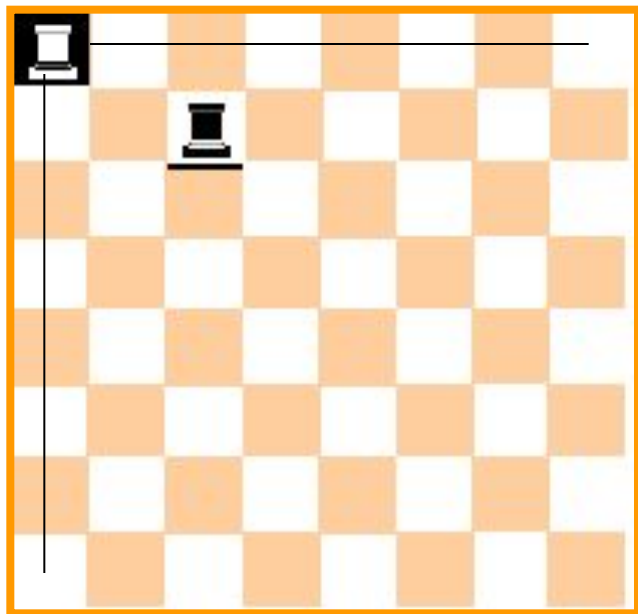


Задача 4

- Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белую и чёрную ладьи так, чтобы они не били друг друга?



Решение



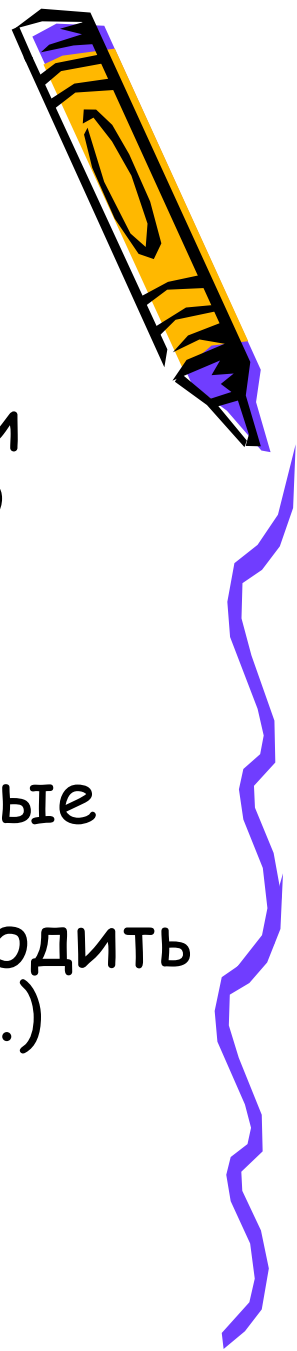
$$64 \cdot 49 = 3136$$



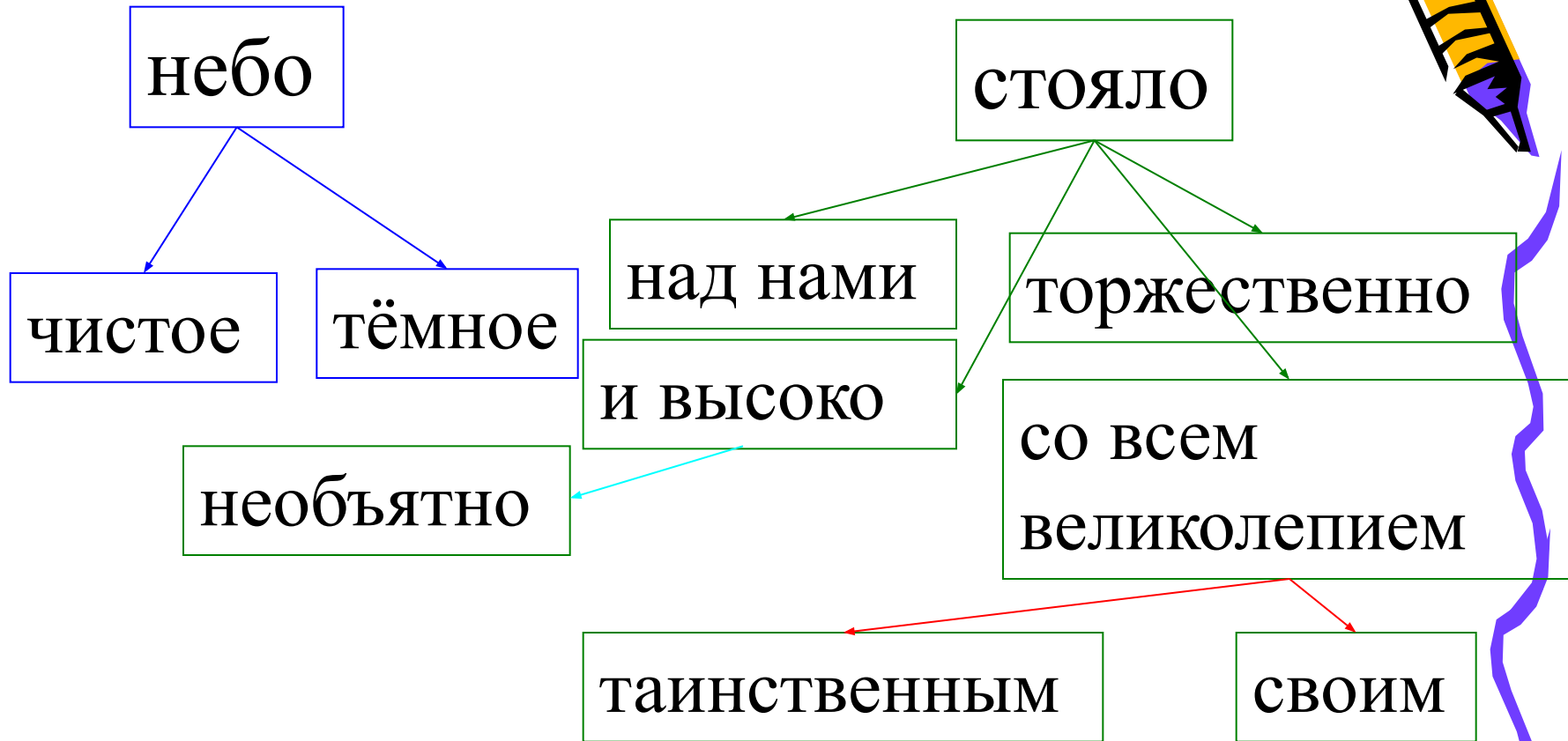
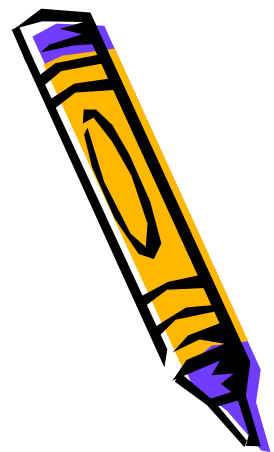
Задача 5

«Тёмное , чистое небо торжественно и необъятно высоко стояло над нами со всем своим таинственным великолепием».

Сколько осмысленных предложений можно составить, вычёркивая некоторые слова этого предложения? (Во все предложения обязательно должны входить подлежащее небо и сказуемое стояло.)



Решение

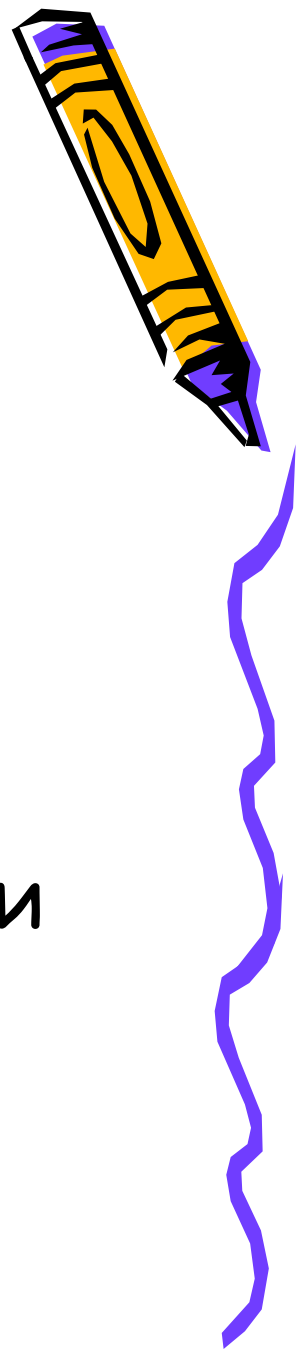


$$2^9 = 512$$

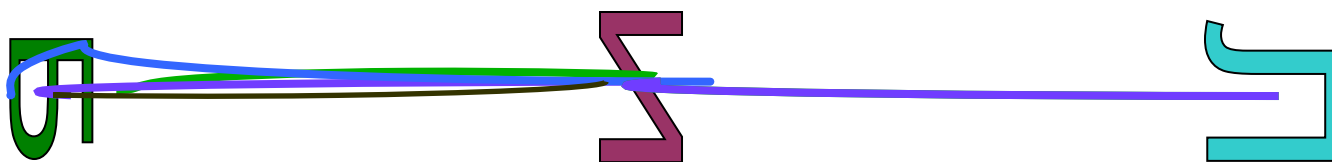


Задача 6

От Братска до Иркутска можно добраться поездом, самолётом, автобусом, теплоходом. Из Иркутска до Листвянки можно доехать на автобусе, либо на теплоходе. Сколькими способами можно проехать от Братска до Листвянки?



Решение



$$4 \cdot 2 = 8$$



Задача 7

У двух начинающих коллекционеров по 20 марок и по 10 значков.

Честным обменом называется обмен одной марки на одну марку или одного значка на один значок.

Сколькими способами коллекционеры могут осуществить честный обмен?



Решение



$$20 \cdot 20 + 10 \cdot 10 = 500$$

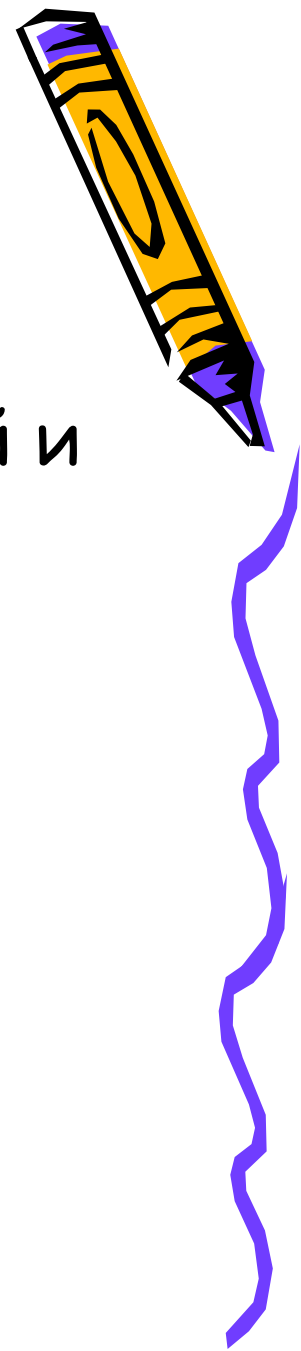


Задача 8

- На глобусе проведены 17 параллелей и 24 меридиана. На сколько частей разделена поверхность глобуса?

Меридиан — это дуга, соединяющая Северный полюс с Южным.

Параллель — это окружность, параллельная экватору (экватор тоже является параллелью).



Решение

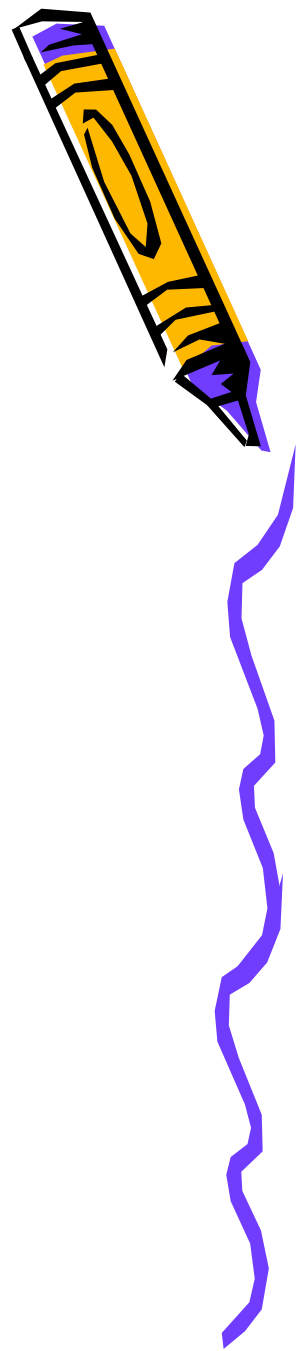
Меридианы делят
глобус на 24
части, а
параллели делят
каждую часть ещё
на $17 + 1 = 18$
частей.

$$18 \times 24 = 432$$



Задача 9

Сколько способами из колоды (36 карт) можно выбрать 4 карты разных мастей и достоинств?

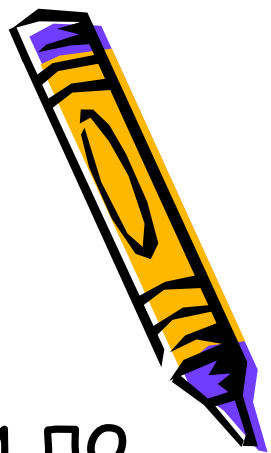


Решение



$$9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$$

- В каждой масти по 9 карт.
- Из каждой масти выбираем по 1 карте, учитывая достоинство уже выбранной ранее карты.



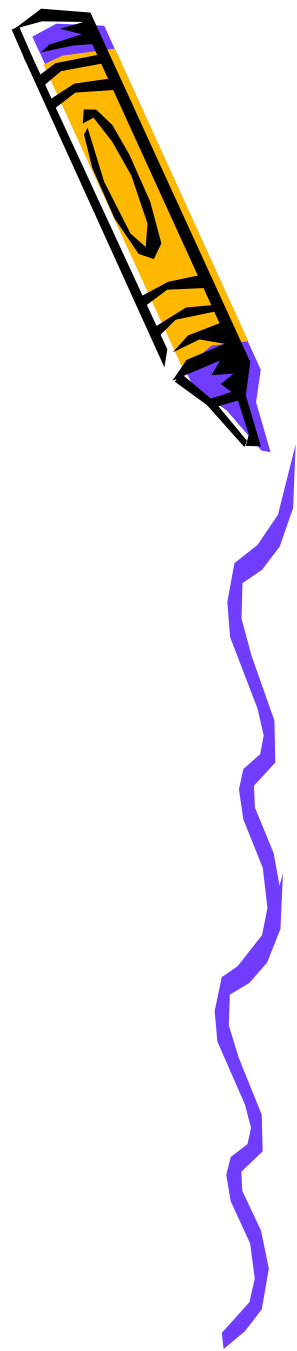
Факториал

$n!$

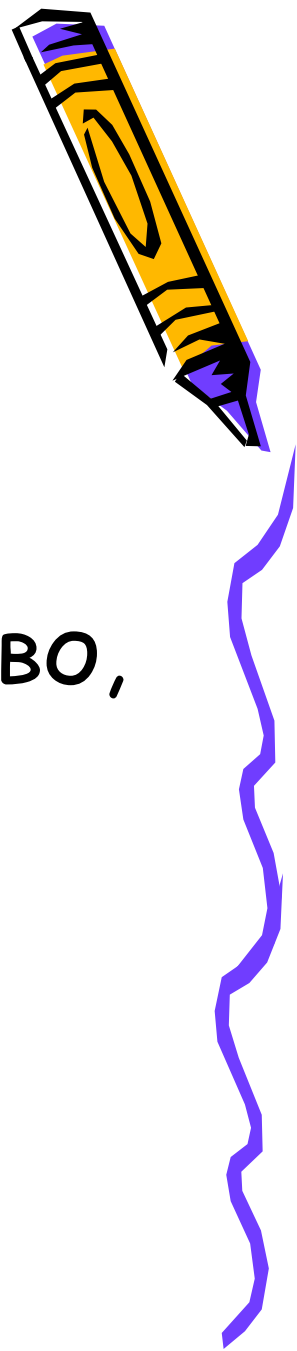
- произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно (читается n -факториал).

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

- Замечание: $0! = 1! = 1$.



Перестановки



- Число различных способов, которыми может быть упорядочено данное множество, состоящее из n элементов, называется **числом перестановок** множества и обозначается P_n .



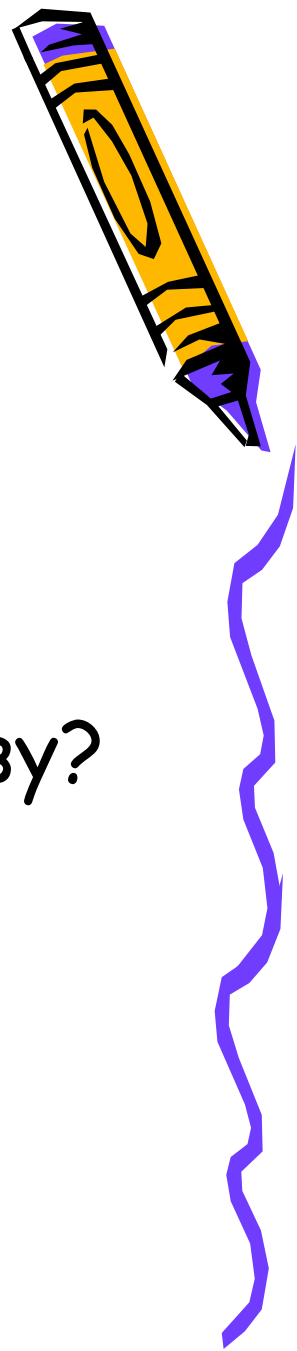
Перестановки без повторений

$$P_n = n!$$

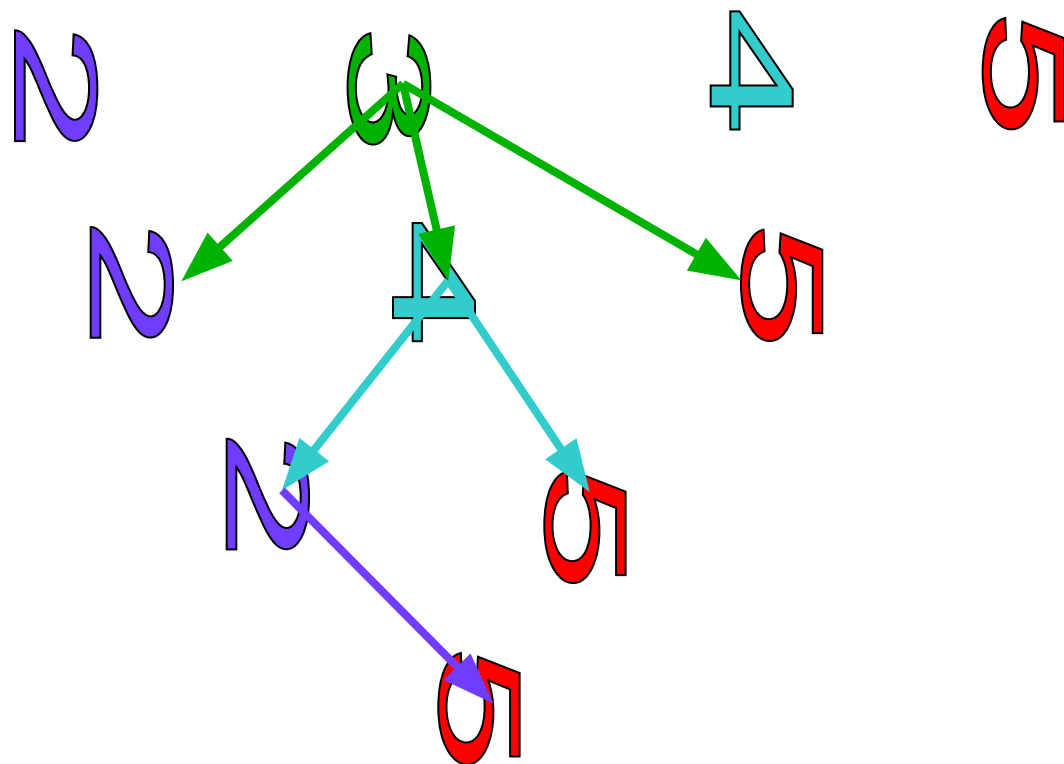


Задача 10

Сколько существует
четырехзначных чисел, в записи
которых цифры 2, 3, 4, 5
встречаются ровно по одному разу?



Решение

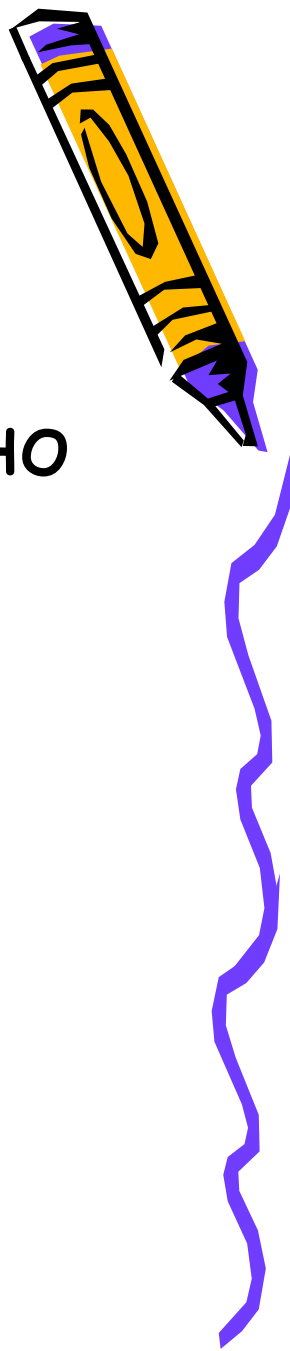


$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 24$$

$$4 \times 3 \times 2 \times 1$$

Задача 11

Сколько трёхзначных чисел можно получить из цифр 1,2,3, если цифры в числе не повторяются?



Решение

Сотни	1		2		3	
Десятки	2	3	1	3	1	2
Единицы	3	2	3	1	2	1

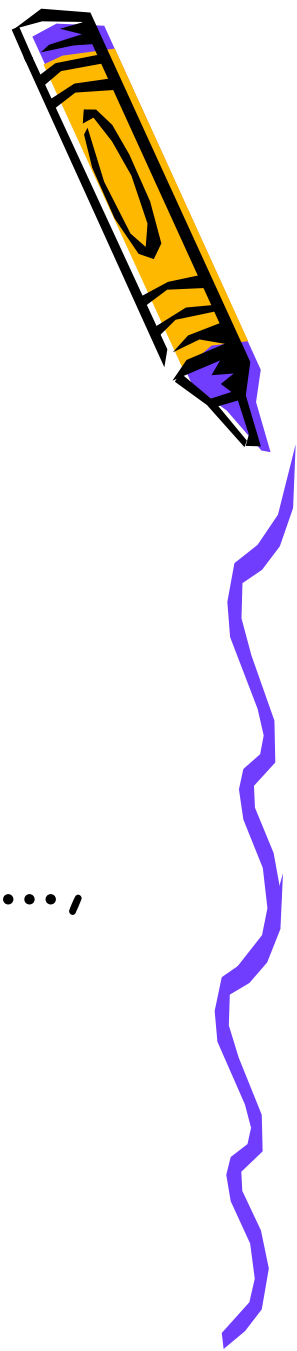
$$P = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$$



Перестановки с повторениями

Пусть имеются предметы k различных типов.

Сколько перестановок можно сделать из n_1 элементов первого типа, n_2 элементов второго типа, ..., n_k элементов k -го типа?



Перестановки с повторениями

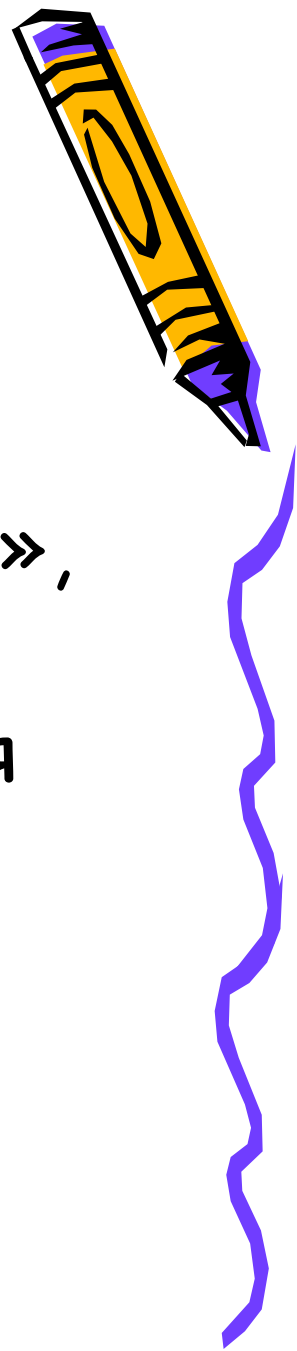
$$P_{n_1; \dots n_k} = \frac{n!}{n_1! \dots n_k!},$$

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$$



Задача 12

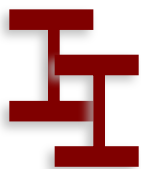
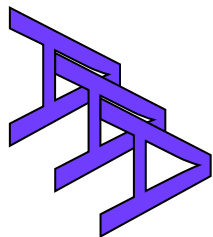
Сколько способами можно переставить буквы слова «ананас», так, чтобы получались разные «слова»? Смысл «слов» значения не имеет.



Решение

«Ананас» - 6:

а - 3; н - 2; с - 1.

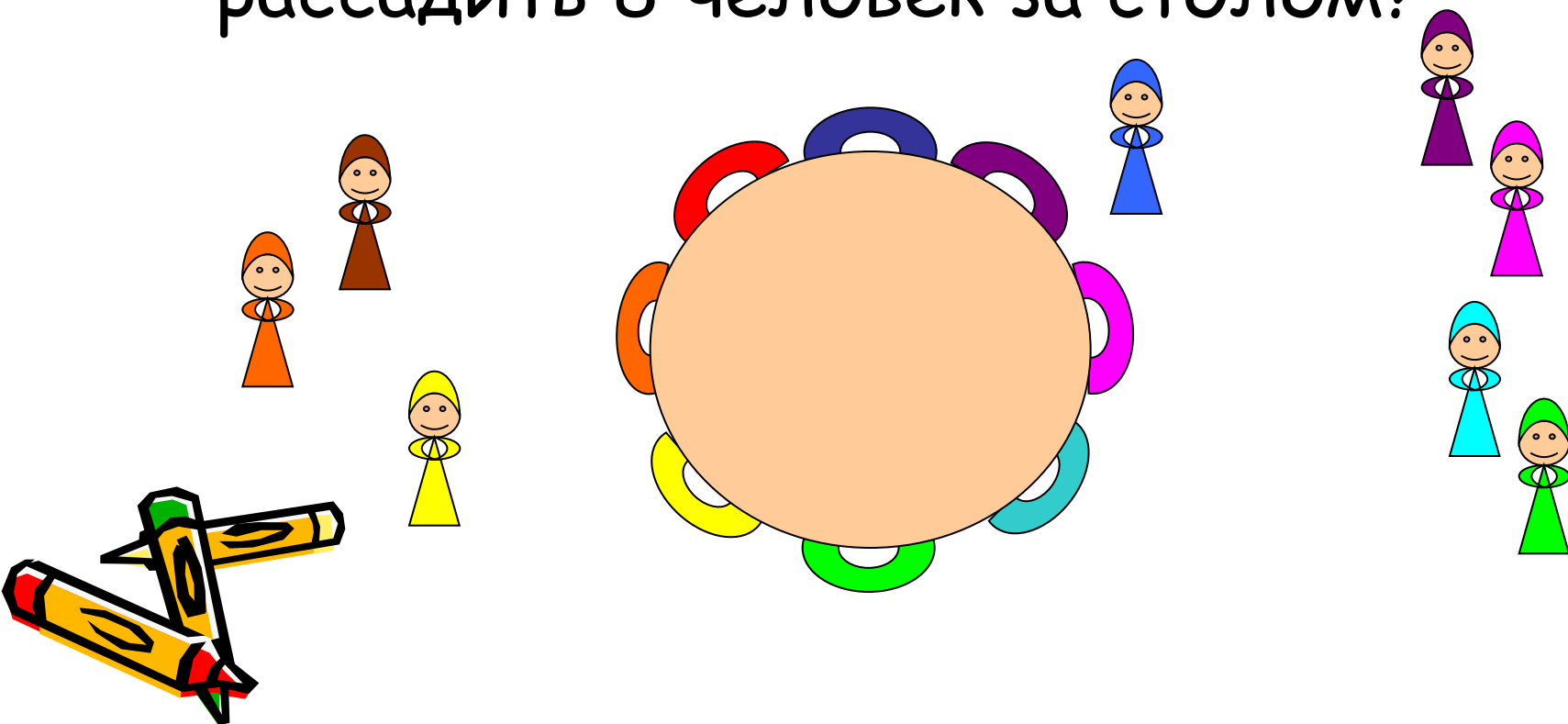


$$P_{3;2;1} = \frac{6!}{3!2!1!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 60$$

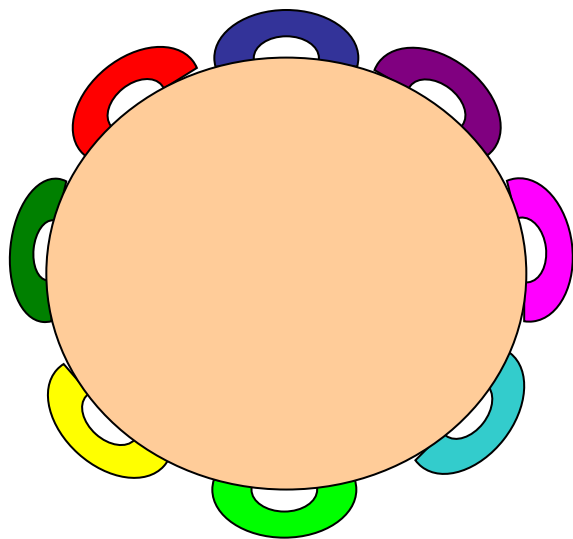


Задача 13

К Маше пришли 7 подружек.
Сколькими способами можно
рассадить 8 человек за столом?



Решение

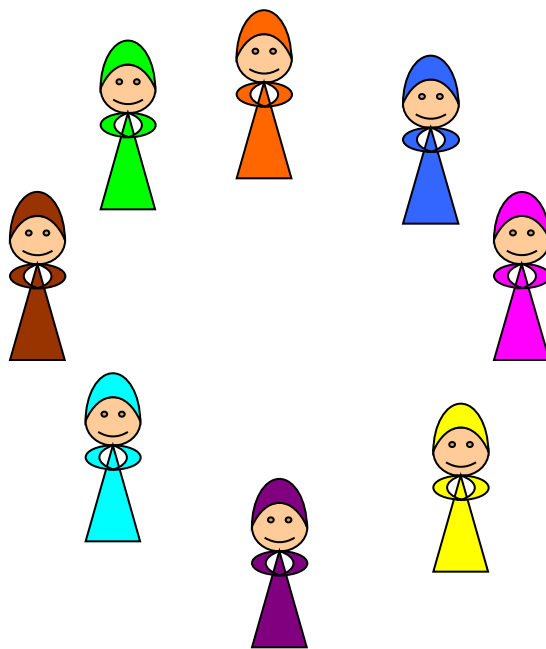


$$\begin{aligned}P_8 &= 8! = \\&= 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \\&= 40320\end{aligned}$$

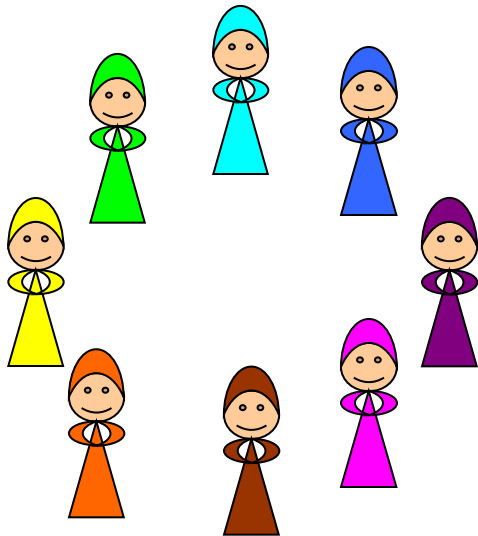


Задача 14

8 девушек водят хоровод.
Сколькими способами они могут
встать в круг?



Решение



Девушки могут
перемещаться по
кругу.

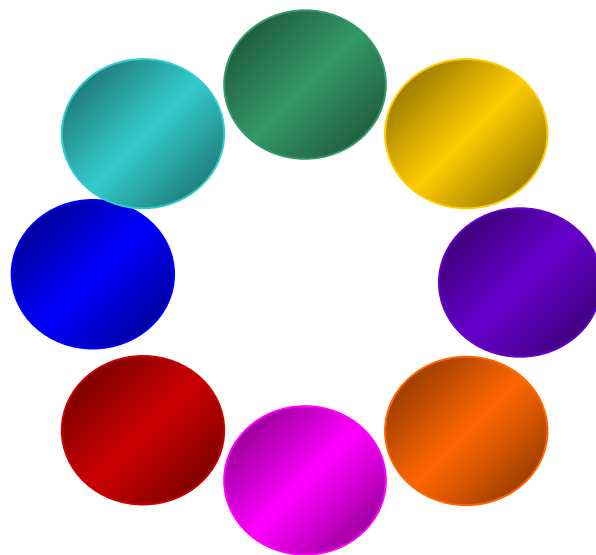
Число
перестановок
уменьшается в 8
раз.

Ответ: 7!

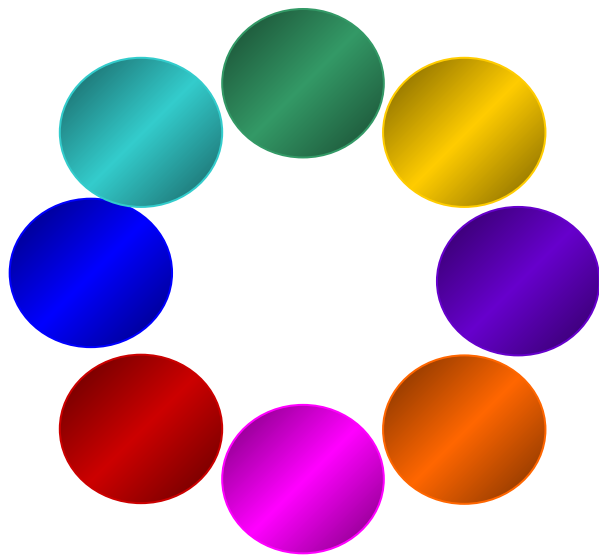


Задача 15

Сколько ожерелий можно составить из 8 различных бусин?



Решение



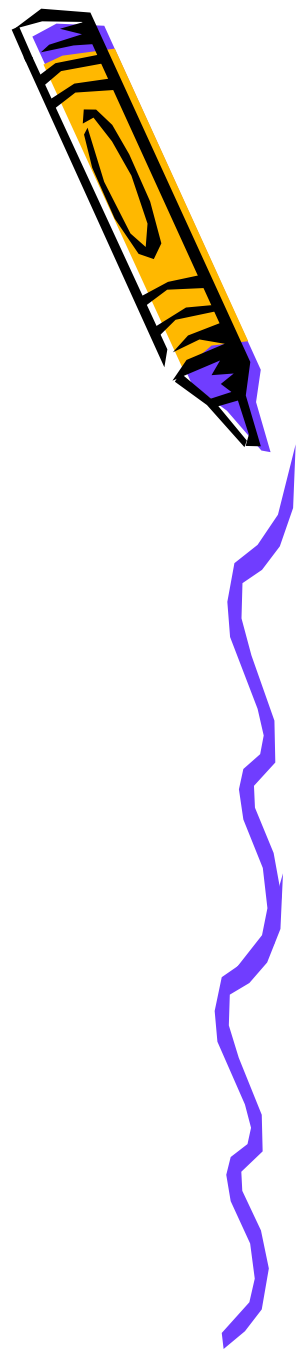
- Ожерелье можно вращать.
- Его можно и перевернуть.
- Число перестановок уменьшается ещё вдвое.

Ответ: $7!/2$



Размещения

- Число упорядоченных k элементных подмножеств множества из n элементов называется **числом размещений** из n элементов по k и обозначается A_n^k



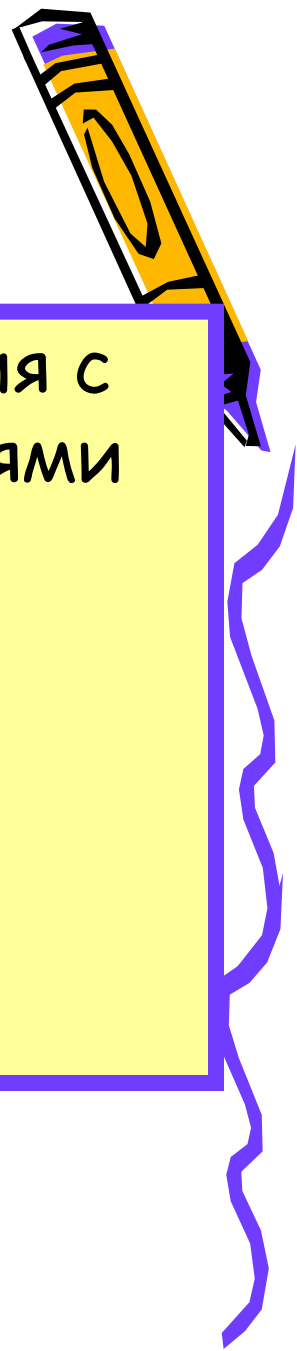
Размещения

Размещения без повторений

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} =$$
$$= n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)$$

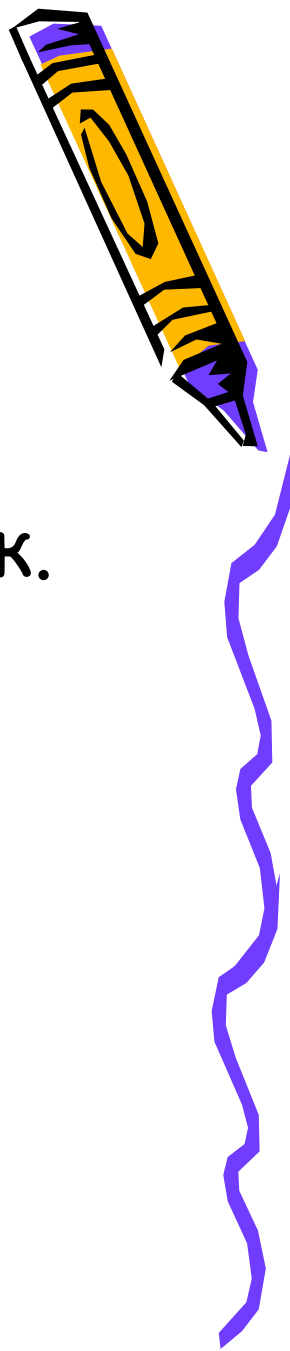
Размещения с повторениями

$$\overline{A}_n^m = n^m$$



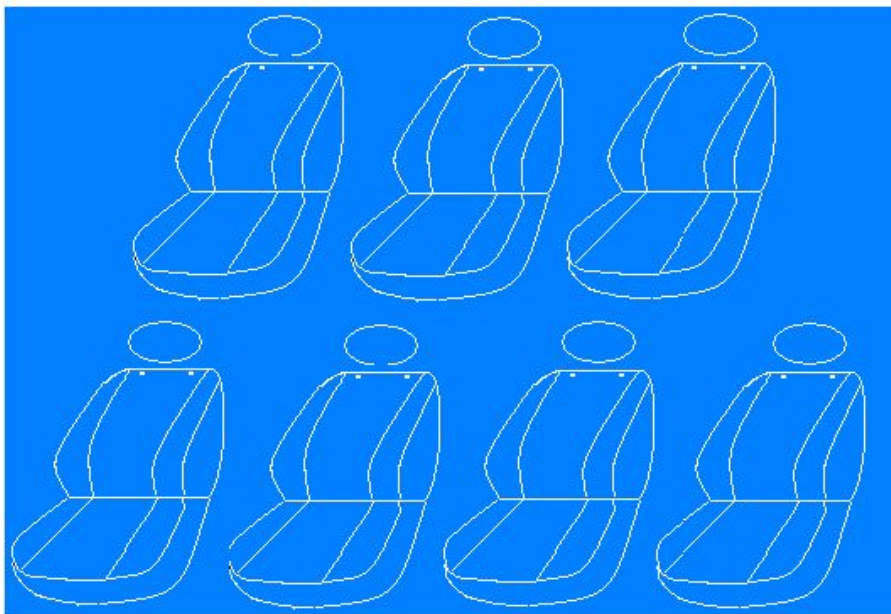
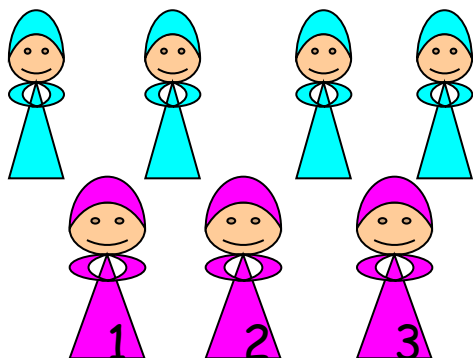
Задача

В машине 7 мест, включая
водительское. Поедут 7 человек.
Сколько существует способов
распределения пассажиров по
местам, если права есть лишь у
троих?



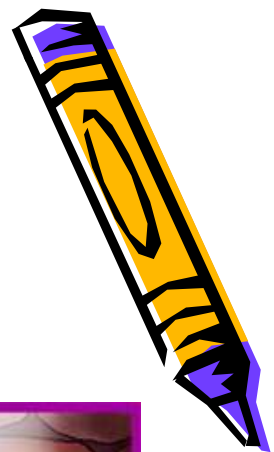
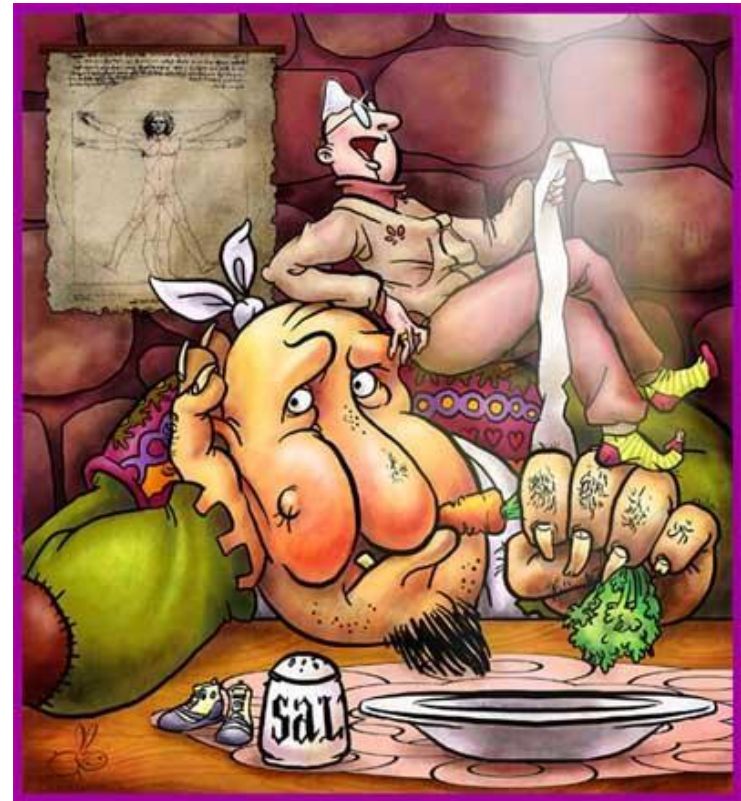
Решение

$$(3 \cdot 6! = 2160)$$



Задача

У людоеда в подвале
томятся 25 пленников.
Сколькими способами
он может выбрать трех
из них себе на завтрак,
обед и ужин?



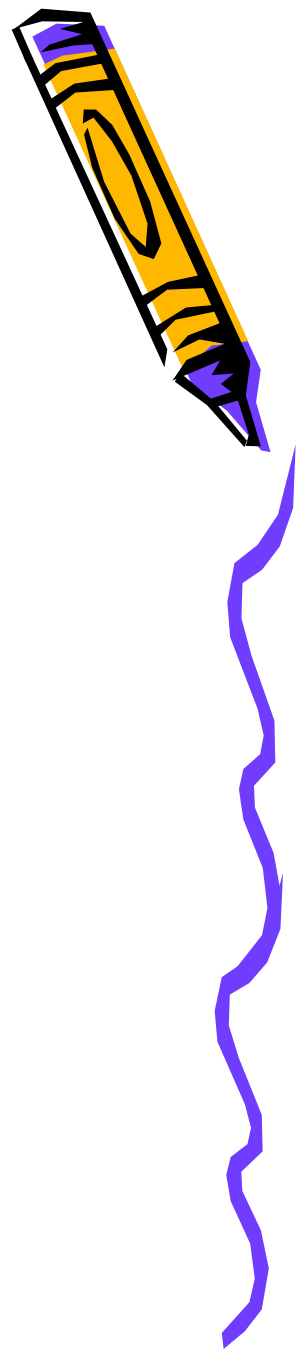
Решение

$$A_{25}^3 = \frac{25!}{22!} = 25 \times 24 \times 23 = 13800$$



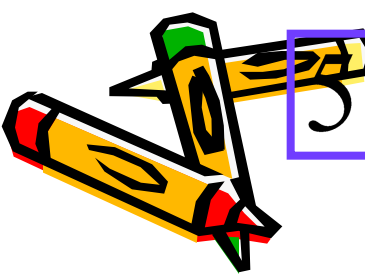
Задача

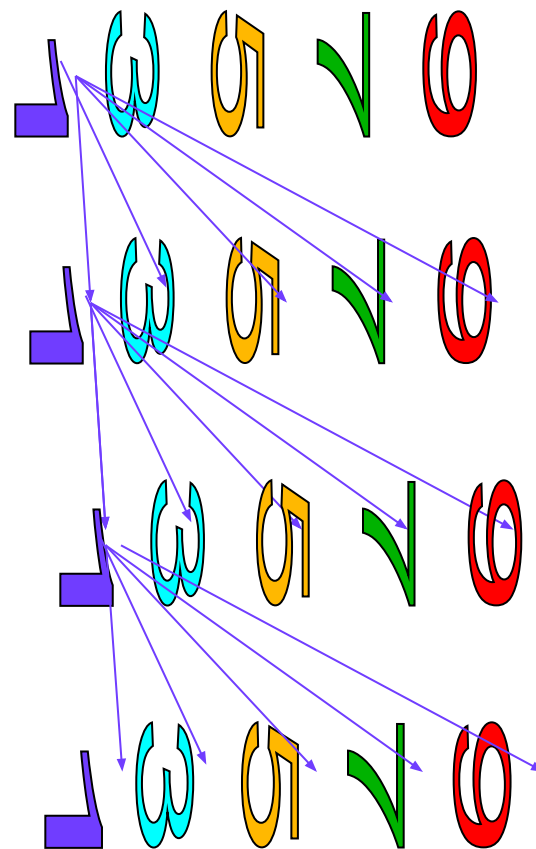
Сколько существует 4-значных чисел, в записи которых встречаются только нечетные цифры?



Решение

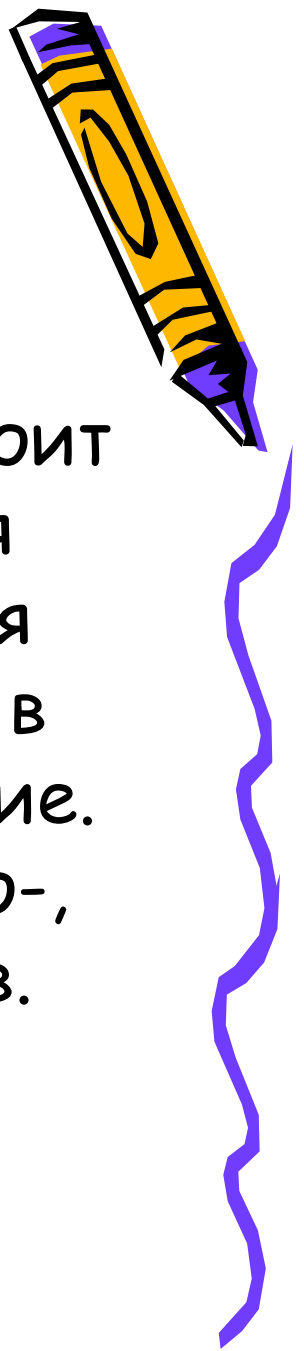
- Однозначных нечётных чисел ровно 5.
- К каждому однозначному нечётному числу вторая нечетная цифра может быть дописана 5 различными способами.
- Далее - по аналогии:


$$5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$$



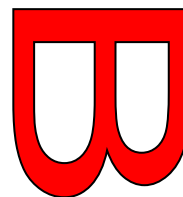
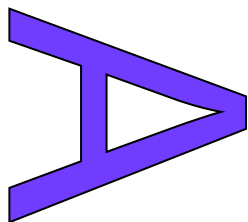
Задача

Алфавит племени Мумбо-Юмбо состоит из трех букв А, Б и В. Словом является любая последовательность, состоящая не более, чем из 4 букв. Сколько слов в языке племени Мумбо-Юмбо? Указание. Сосчитайте отдельно количества одно-, двух-, трех- и четырехбуквенных слов.



Решение

$$3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 120$$



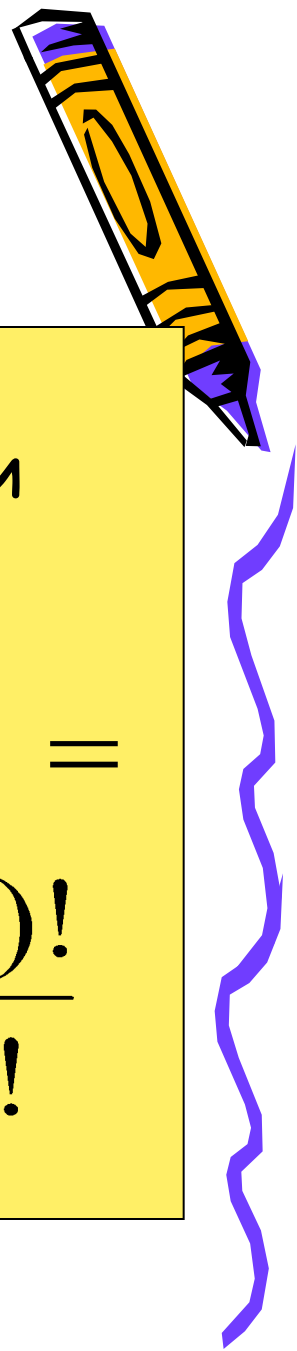
Сочетания



- Если из n элементов составлять группы по m элементов в каждой, не обращая внимания на порядок элементов в группе, то получившиеся при этом комбинации называются **сочетаниями** без повторений из n элементов по m .



Сочетания

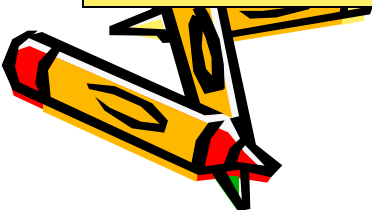


Сочетания без повторений

$$\begin{aligned} C_n^m &= \frac{A_n^m}{P_m} = \\ &= \frac{n!}{m!(n-m)!} \end{aligned}$$

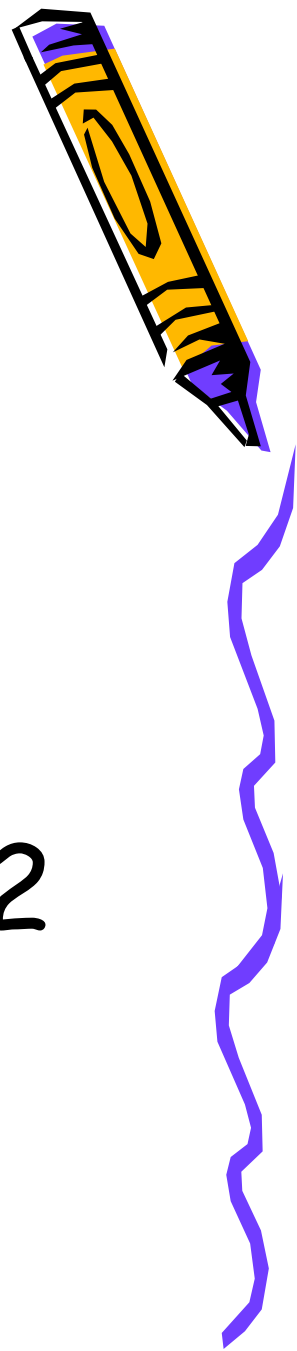
Сочетания с повторениями

$$\begin{aligned} \overline{C}_n^m &= C_{n+m-1}^m = \\ &= \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!} \end{aligned}$$



Задача.

В городе проводится
первенство по футболу.
Сколько в нем состоится
матчей, если участвуют 12
команд?



Решение.

$$C_{12}^2 = \frac{12!}{2!(12-2)!} = \frac{11 \cdot 12}{2} = 66$$



Задача.



- В группе 10 стрелков, из них 6 снайперов. Для выполнения боевой задачи нужно отобрать 5 стрелков, причем снайперов должно быть не меньше 4. Сколькими способами это можно сделать?



Решение

Не меньше 4 – это значит, что снайперов должно быть либо 4, либо 5. 4 снайпера из 6 можно выбрать C_6^4 способами, остальных стрелков выбираем из оставшихся 4 стрелков $(10-6)$ C_4^1 способами. Проводим аналогичные рассуждения, когда в группе снайперов 5.

$$C_6^4 \cdot C_4^1 + C_6^5 \cdot C_4^0 = 15 \cdot 4 + 6 \cdot 1 = 66$$

Задача.

В классе 24 ученика, из них 8 отличников. Нужно выбрать 12 человек так, чтобы среди них было хотя бы 5 отличников. Сколькими способами можно это сделать?

Ответ: 901628

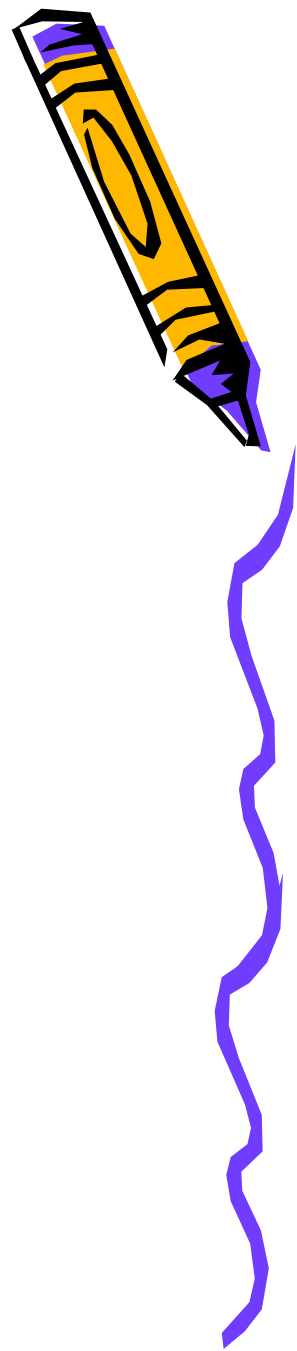


СВОЙСТВА СОЧЕТАНИЙ

$$C_n^n = C_n^0 = 1$$

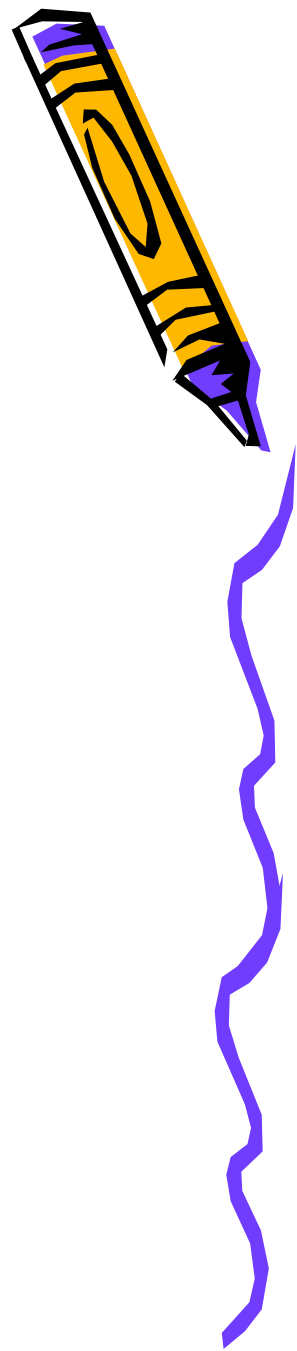
$$C_n^1 = C_n^{n-1} = n$$

$$C_n^m = C_n^{n-m}$$



Решить систему
уравнений:

$$\begin{cases} C_x^y = C_x^{y+2}, \\ C_x^2 = 153 \end{cases}$$

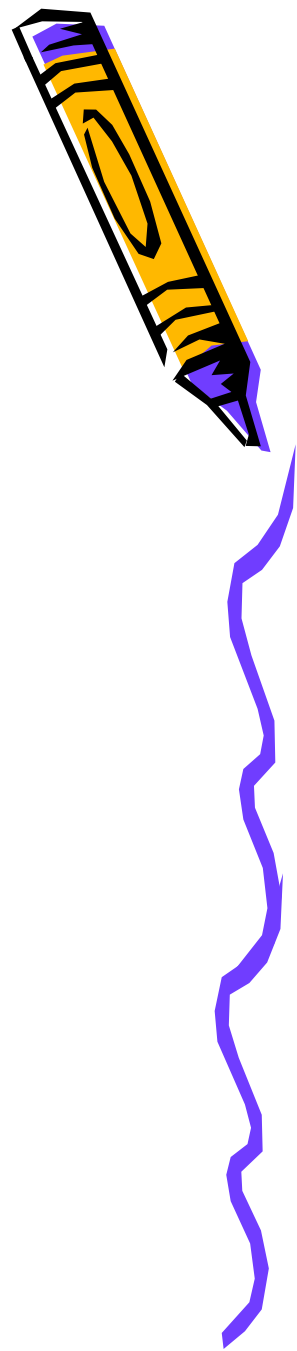


Решение

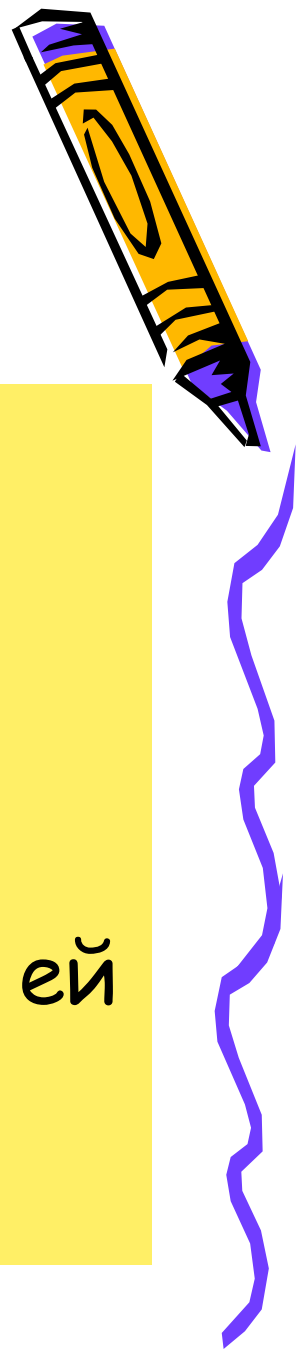
$$C_x^2 = \frac{x!}{2(x-2)!} = \frac{x^2 - x}{2}$$

$$\begin{cases} C_x^y = C_x^{y+2} \\ \frac{x^2 - x}{2} = 153 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 18, \\ y = 8. \end{cases}$$



Треугольник Паскаля



- Треугольник Паскаля является одной из наиболее известных и изящных числовых схем во всей математике.
- Блез Паскаль, французский математик и философ, посвятил ей специальный "Трактат об арифметическом треугольнике".

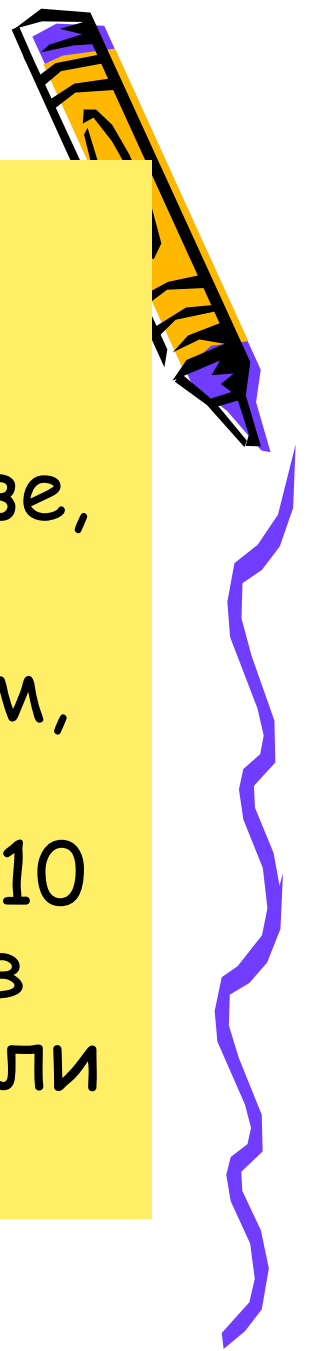


Треугольник Паскаля



- Эта треугольная таблица была известна задолго до 1665 года - даты выхода в свет трактата.
- В 1529 году треугольник Паскаля был воспроизведен на титульном листе учебника арифметики, написанного астрономом Петром Апианом.





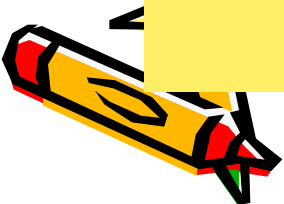
- Изображен треугольник на иллюстрации книги "Яшмовое зеркало четырех элементов" китайского математика Чжу Шицзе, выпущенной в 1303 году.
- Омар Хайям, бывший философом, поэтом, математиком, знал о существовании треугольника в 1110 году, в свою очередь заимствовав его из более ранних китайских или индийских источников.



Построение треугольника Паскаля

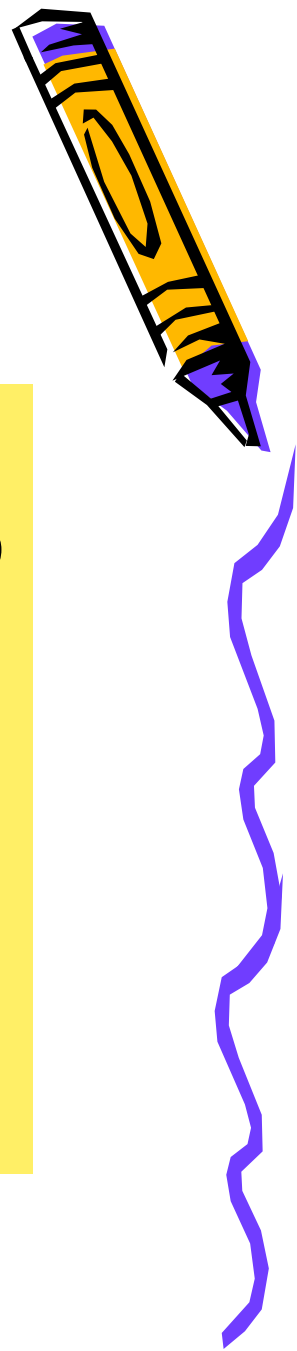


- Треугольник Паскаля - это бесконечная числовая таблица "треугольной формы", в которой на вершине и по боковым сторонам стоят единицы, каждое из остальных чисел равно сумме двух чисел, стоящих над ним слева и справа в предшествующей строке.
- Таблица обладает симметрией относительно оси, проходящей через его вершину.



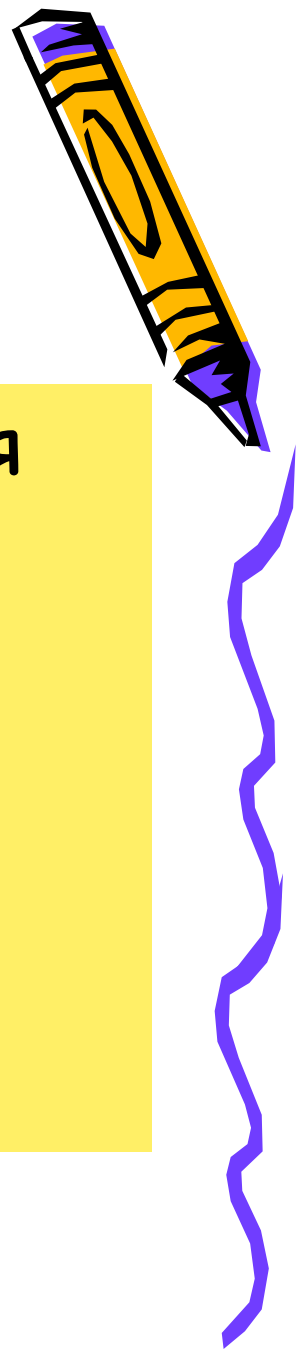
Свойства строк

Сумма чисел n -й строки Паскаля равна 2^n (потому что при переходе от каждой строки к следующей сумма членов удваивается, а для нулевой строки она равна 2^0)



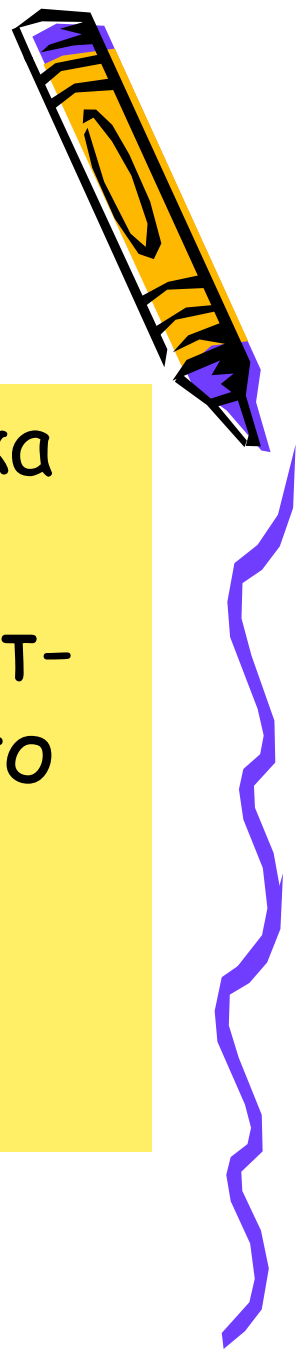
Свойства строк

Все строки треугольника Паскаля симметричны (потому что при переходе от каждой строки к следующей свойство симметричности сохраняется, а нулевая строка симметрична).



Свойства строк

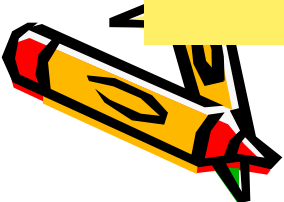
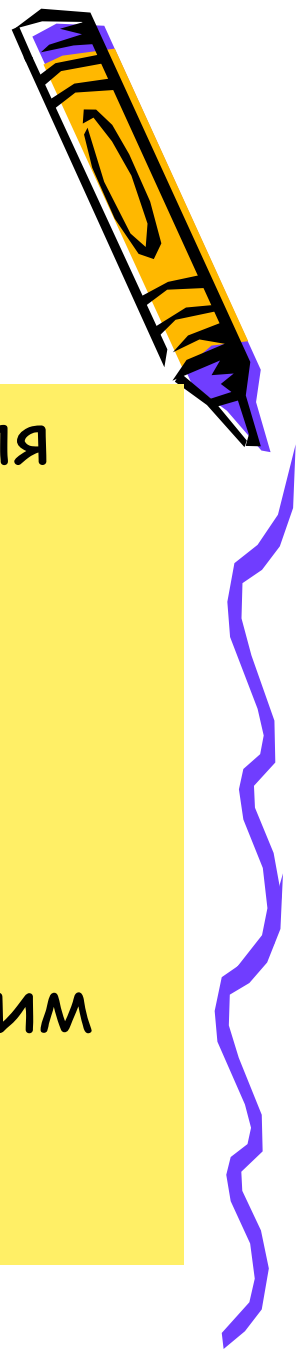
Каждый член строки треугольника Паскаля с номером n тогда и только тогда делится на t , когда t - простое число, а n - степень этого простого числа



Нахождение элемента треугольника

Каждое число в треугольнике Паскаля можно определить тремя способами:

- C_n^k где n - номер строки, k - номер элемента в строке;
- оно равно сумме чисел предыдущей диагонали, начиная со стороны треугольника и кончая числом, стоящим над данным.





- Каждое число треугольника Паскаля, уменьшенное на единицу, равно сумме всех чисел, заполняющих параллелограмм, ограниченный теми правой и левой диагоналями, на пересечении которых стоит данное число, причем сами эти диагонали в рассматриваемый параллелограмм не включаются.

