

Розділ 1. Основи цифрової техніки

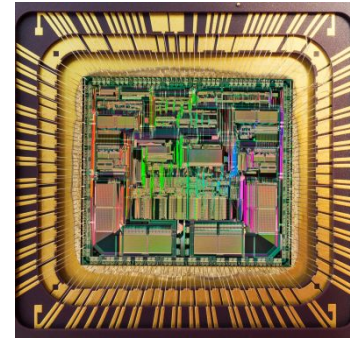


Тема 1.1. Логічні основи цифрових пристроїв

Лекція №2

Логічні основи цифрових пристроїв

Визначення поняття цифрової схеми.
Класифікація та типи



Елементи математичної логіки
Булева алгебра (алгебра логіки)
Основні аксіоми та закон



Цифрові схеми

Цифрова схема є повністю цифровою якщо вхідні та вихідні сигнали відображаються тільки «лог 1» або «лог 0», тобто одним з двох можливих рівнів напруги.

В залежності від розв'язування задачі будь-якому заданому набору вхідних сигналів повинен відповідати цілком визначений набір вихідних сигналів. Залежність між вхідними і вихідними сигналами може бути визначатися також і станом цифрового пристрою, в якому він знаходився в попередній момент часу

Логічна схема - сукупність логічних елементів, призначених для перетворення двійкових змінних

Логічні схеми

поділяються:

Комбінаційні схеми



Без пам'яті

Послідовнісні схеми
(цифрові автомати)

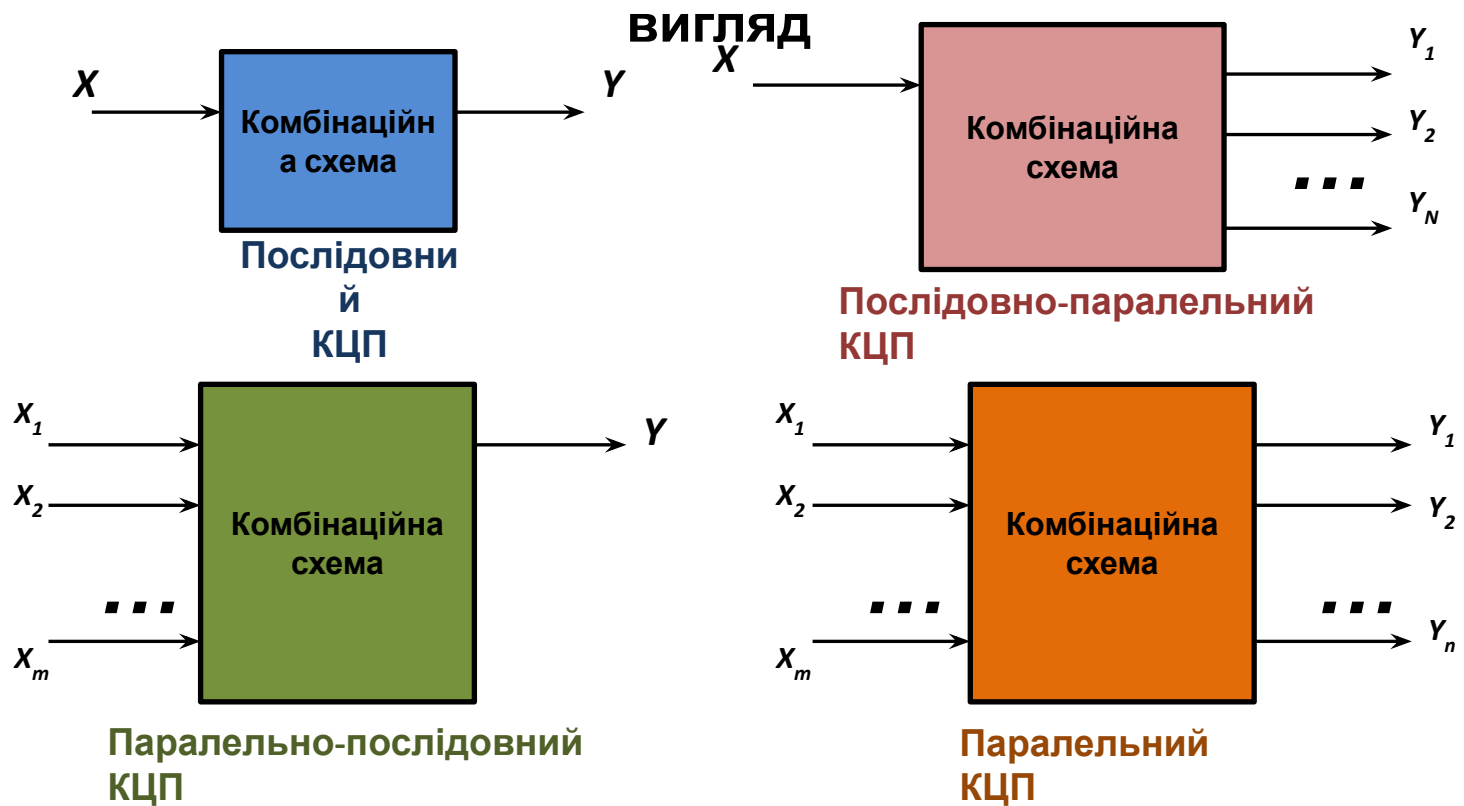


З пам'яттю

Комбінаційні логічні схеми

Комбінаційною називають схему з x входами і y виходами, у якої сукупність вихідних сигналів у даний момент часу повністю визначається сукупністю вхідних сигналів, що діють в даний момент часу, і не залежить від вхідних сигналів, що діють в попередні моменти часу.

Структурна схема таких пристроїв (КЦП) має



Послідовнісні логічні

схеми

Послідовнісні логічні схеми (ПЛС) можуть бути розбиті на 2 частини:

- комбінаційна логічна схема (КЛС);
- пам'ять (запам'ятовуючий пристрій).

ПЛС – має пам'ять і тому значення вихідного сигналу $f_1 \dots f_n$, цього пристрою залежить не тільки від визначених кодів (значень) вхідних сигналів $x_1 \dots x_m$ у поточний момент часу, а і від стану елементів пам'яті $z_1 \dots z_k$, в якому вони були на попередніх тактах

Структурна схема ПЛС



Синхронізація та тактові сигнали

В усіх комп'ютерах використовують генератор тактових імпульсів (ГТІ), що виробляє періодичну послідовність прямокутних імпульсів, які називаються тактовими.

На початок кожного імпульсу C відбувається зміна інформації на входах елементів і вузлів цифрових пристроїв. Принцип подачі інформації на входи елементів і вузлів у тактові моменти називається дискретизацією сигналів у часі (або синхронізацією)

Тактовий сигнал – це є серія імпульсів фіксованої ширини зі фіксованою частотою повторення.

Тактові імпульси або синхроімпульси



Основні визначення алгебри логіки

Алгебра логіки – це розділ математичної логіки, що вивчає будову (форму) складних логічних висловлювань і способи встановлення їх істинності за допомогою алгебраїчних методів.

Висловлювання – це оповідне твердження, в якому щось стверджується або заперечується і відносно якого можна сказати істинне воно або помилкове.

Висловлювання (твердження)

Істинні (правдиві)
True, 1

Помилкові (хибні)
False, 0

A = “Київ – столиця України”

B = “Одеса – столиця Європи”

C = “ $3+5=8$ ” (C=1)

D = “Всі риби вміють літати” (D=0)

Проаналізуємо вислови
(A=true)
(B=false)

Основні визначення алгебри логіки

Вхідний набір – це певна комбінація значень двійкових змінних в логічній функції. Максимальне число вхідних наборів визначається виразом $m=2^n$, де n – число змінних.

Наприклад: максимальне число вхідних наборів для функції складає:

від двох змінних $2^2=4$

від п'яти змінних $2^5=32$

Робочі набори – це вхідні набори, для яких логічна функція повністю визначена.

Байдужі набори – це вхідні набори, для яких логічна функція не визначена. Частково визначену функцію можна зробити повністю визначеною (довизначити), приписавши байдужим наборам які-небудь значення функції (0 або 1).

Основні визначення алгебри логіки

Таблиця істинності – це представлення логічної функції у вигляді таблиці, в лівій частині якої записуються вхідні набори, а в правій – відповідні їм значення функції.

Таблиця істинності від 2-х змінних

X2	X1	F (X2, X1)
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

x1	0	1
x2		
0	1	0
1	1	1

Таблиця істинності від 3-х змінних

X3	X2	X1	F (X3, X2, X1)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Основні визначення алгебри логіки

Повністю визначена функція – це логічна функція, що має визначені значення 0 або 1 на всіх вхідних наборах.

Наприклад функція 2-х змінних

$$2^2=4$$

X2	X1	F (X2, X1)
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Всі набори визначені (4 з 4-х)

Не повністю визначена функція – це логічна функція, значення якої визначені не на всіх вхідних наборах.

Наприклад

функція 3-х змінних

$$2^3=8$$

X3	X2	X1	F (X3, X2, X1)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0

Не всі набори визначені тільки (6 з 8-ми)

Основні визначення алгебри логіки

Логічні функції однієї змінної

Назва функції	Логічний вираз
Нульова функція (константа «0»)	
Одинична функція (константа «1»)	
Функція повторення	
Функція заперечення (інверсія)	

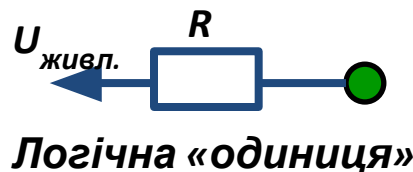
Таблиці істинності

0	0	1
1	0	1

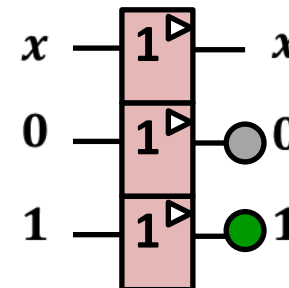
0	0	1
1	1	0

Позначення на схемах

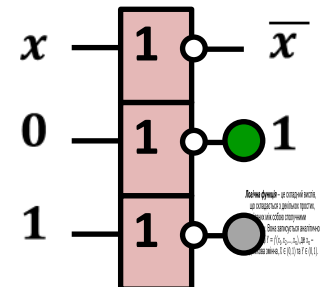
Константи



Логічні елементи



Повторювачі



Інвертори

Аксиоми булевої алгебри (алгебри логіки)

$$\begin{cases} x = 0, \text{ якщо } x \neq 1 \\ x = 1, \text{ якщо } x \neq 0 \end{cases}$$

В алгебрі логіки розглядаються
тільки двійкові змінні

$$\begin{cases} \overline{0} = 1 \\ \overline{1} = 0 \end{cases}$$

Визначається операція **заперечення**

$$\begin{cases} 0 \cdot x = 0 \\ 1 \cdot x = x \\ x \cdot x = x \\ x \cdot \overline{x} = 0 \end{cases}$$

Визначається операція
кон'юнкції

$$\begin{cases} 0 \vee x = x \\ 1 \vee x = 1 \\ x \vee x = x \\ x \vee \overline{x} = 1 \end{cases}$$

Визначається операція
диз'юнкції

Приклад 1. Аксиоми булевої алгебри

Знайдіть значення виразів

Завдання 1. $(1 \vee 1) \vee (1 \cdot 0) =$

Завдання 2. $((1 \vee 0) \cdot 1) \vee 1 =$

Завдання 3. $(1 \cdot 0 \vee 1) \cdot 0 =$

Завдання 4. $(A \vee 1) \vee (B \vee 0) =$

Завдання 5. $(Z \vee 0) \cdot 1 =$

Завдання 6. $((A \vee 0) \vee (B \cdot 1)) \cdot (0 \vee 1) =$

Приклад 1. Аксиоми булевої алгебри

Знайдіть значення виразів

(Правильний розв'язок)

1. $(1 \vee 1) \vee (1 \cdot 0) = 1 \vee 0 = 1$

2. $((0 \vee 0) \cdot 1) \vee 0 = (0 \vee 1) \vee 0 = 1 \vee 0 = 1$

3. $(1 \cdot 0 \vee 1) \cdot 0 = (0 \vee 1) \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0$

4. $(A \vee 1) \vee (B \vee 0) = 1 \vee B = 1$

5. $(Z \vee 0) \cdot 1 = Z \cdot 1 = Z$

6. $((A \vee 0) \vee (B \cdot 1)) \cdot (0 \vee 1) =$



Закони булевої алгебри

1. Закон перестановки (комутативний)

$$x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1 \quad x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1$$

2. Закон перестановки (комутативний)

$$(x_1 \vee x_2) \vee x_3 = x_1 \vee (x_2 \vee x_3)$$

$$(x_1 \cdot x_2) \cdot x_3 = x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3)$$

3. Закон розподілу (дистрибутивний)

$$x_1 \vee x_2 \cdot x_3 = (x_1 \vee x_2) \cdot (x_1 \vee x_3)$$

$$x_1(x_2 \vee x_3) = x_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot x_3$$

Приклад 2. Закон розподілу

*Перетворіть вирази
використовуючи закон розподілу*

Завдання 1. $(A \vee B) \cdot (A \vee \overline{C}) =$

Завдання 2. $(A \cdot \overline{B}) \vee C =$

Завдання 3. $(A \vee BD) \cdot (A \vee \overline{C}) =$

Завдання 4. $AD(B \vee C) =$

Завдання 5. $\overline{A}C(B \vee C \vee \overline{D}) =$

Завдання 6. $\overline{D} \vee BC =$

Приклад 2. Закон розподілу

**Перетворіть вирази
використовуючи**

закон розподілу (Правильний розв'язок)

Завдання 1. $(A \vee B) \cdot (A \vee C) = A \vee B$

Завдання 2. $(A \cdot \bar{B}) \vee C = (A \vee C) \cdot (\bar{B} \vee C)$

Завдання 3. $(A \vee BD) \cdot (A \vee \bar{C}) = A \vee B\bar{C}D$

Завдання 4. $AD(B \vee C) = (AD \vee B) \cdot (AD \vee C)$

Завдання 5. $\bar{A}C(B \vee C \vee \bar{D}) =$

Завдання 6. $\bar{D} \vee BC = (\bar{D} \vee B) \cdot (\bar{D} \vee C)$



Закони булевої алгебри

4. Закон повторення (ідемпотентності)

$$x_1 \vee x_1 \vee \cdots \vee x_1 \vee x_1 = x_1$$

$$x_2 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_2 \cdot x_2 = x_2$$

5. Закон подвійного заперечення

$$\overline{\overline{x_1}} = x_1 \quad \overline{\overline{f_3(x_1 x_2 x_3)}} = f_3(x_1 x_2 x_3)$$

$$\overline{\overline{x_1 \cdot x_2}} = x_1 \cdot x_2 \quad x_2 \vee \overline{\overline{x_3}} = x_2 \vee x_3$$

6. Закон де Моргана

Для 2-х змінних

$$\overline{x_1 \cdot x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \quad \overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$$

Для n змінних

$$\overline{x_1 \cdot \cdots \cdot x_n} = \overline{x_1} \vee \cdots \vee \overline{x_n}$$

$$\overline{x_1 \vee \cdots \vee x_n} = \overline{x_1} \cdot \cdots \cdot \overline{x_n}$$

Приклад 3. Закон де Моргана

*Перетворіть вирази
використовуючи
закон де Моргана*

Завдання 1. $\overline{A \vee \overline{B}C} =$

Завдання 2. $\overline{(A \vee BC)(D \vee EF)} =$

Завдання 3. $\overline{(\overline{A} \vee C)(B \vee \overline{D})} =$

Приклад 3. Закон де Моргана

*Перетворіть вирази
використовуючи закон де
Моргана*

(Правильний розв'язок)

Завдання 1. $A \vee \overline{B}C = \overline{A} \cdot \overline{B}C = \overline{A} \cdot (\overline{B} \vee \overline{C}) = \overline{A} \cdot (B \vee C)$

Завдання 2. $\overline{(A \vee BC)(D \vee EF)} = \overline{A \vee BC} \vee \overline{D \vee EF} =$

Завдання 3. $\overline{(\overline{A} \vee C)(B \vee \overline{D})} = \overline{\overline{A} \vee C} \vee \overline{B \vee \overline{D}} =$



Закони булевої алгебри

7. Правило склеювання

$$(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_2 \vee x_3) = x_1 \vee x_2$$

$$x_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot \bar{x}_2 = x_1$$

8. Правило поглинання

$$x_1 \vee x_1 \cdot \bar{x}_2 = x_1$$

$$x_1 \vee \bar{x}_1 \cdot x_2 = x_1 \vee x_2$$

$$x_1 \cdot (\bar{x}_1 \vee x_2) = x_1 \cdot x_2$$

Приклад 4. Правило склеювання

*Спростіть вирази використовуючи
правило склеювання*

Завдання 1. $A \bar{B} D \vee A \bar{B} \bar{D} =$

Завдання 2. $\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C \cdot \bar{D} \vee \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{D} =$

Завдання 3. $(\bar{A} \vee B)(A \vee B) =$

Приклад 4. Правило склеювання

*Спростіть вирази використовуючи
правило склеювання
(Правильний розв'язок)*

Завдання 1. $A \bar{B} D \vee A \bar{B} \bar{D} = A \bar{B}$

Завдання 2. $\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C \cdot \bar{D} \vee \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{D} = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{D}$

Завдання 3. $(\bar{A} \vee B)(A \vee B) = B$



Приклад 5. Правило поглинання

*Спростіть вирази використовуючи
правило поглинання*

Завдання 1. $\overline{A}\overline{C} \vee AB\overline{C} =$

Завдання 2. $\overline{A}D \vee ABD =$

Завдання 3. $ACD \vee \overline{A}BCD =$

Приклад 5. Правило поглинання

*Спростіть вирази використовуючи
правило поглинання
(Правильний розв'язок)*

Завдання 1. $A\bar{C} \vee AB\bar{C} = A\bar{C}$

Завдання 2. $\bar{A}D \vee ABD = D(\bar{A} \vee AB) = \bar{A}BD$

Завдання 3.

$$ACD \vee \bar{A}BCD = CD(A \vee \bar{A}B) = ACD$$



IMPORTANT TERMS (Lecture №2)

**E
N
G
L
I
S
H
•
T
E
R
M
S**

**Boolean algebra
truth table**

OR operation (OR gate)

AND operation (AND gate)

NOT operation

NOT circuit (INVERTER)

Boolean theorems

DeMorgan's theorems

logic level

active logic levels

active-HIGH

active-LOW

SUMMARY (Lecture №2)

1. Boolean algebra is a mathematical tool used in the analysis and design of digital circuits.
2. The basic Boolean operations are the OR, AND, and NOT operations.
3. An OR gate produces a HIGH output when any input is HIGH. An AND gate produces a HIGH output only when all inputs are HIGH. A NOT circuit (INVERTER) produces an output that is the opposite logic level as the input.
4. Boolean theorems and rules can be used to simplify the expression of a logic circuit and can lead to a simpler way of implementing the circuit.

Завдання 1. Аксиоми булевої алгебри

Знайдіть значення виразів

Вираз 1. $x \vee 1 =$

Вираз 5. $b \vee \bar{b} =$

Вираз 2. $x \cdot x =$

Вираз 6. $z \vee zx =$

Вираз 3. $x \cdot \bar{x} =$

Вираз 7. $z \cdot 1 =$

Вираз 4. $y \cdot 0 =$

Вираз 8. $y \vee y =$

Вираз 9. $z \vee 0 =$

Завдання 2. Закон розподілу

*Перетворіть вирази
використовуючи закон розподілу*

Вираз 1. $(A \vee B)(\bar{A} \vee C)(\bar{B} \vee \bar{C}) =$

Вираз 2. $A(B \vee \bar{C} \vee D) =$

Вираз 3. $AB \vee \bar{B}CD =$

Вираз 4. $AC(\bar{A} \vee B \vee \bar{C}) =$

Завдання 3. Закон де Моргана

*Перетворіть вирази
використовуючи закон розподілу*

Вираз 1. $\overline{(A \vee B) \overline{C}} =$

Вираз 2. $\overline{R \overline{S} T \vee \overline{Q}} =$

Вираз 3. $\overline{A \vee \overline{BC} \vee D} =$

Завдання 4. Правило склеювання

Спростіть вирази

Вираз 1. $(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4}) \cdot (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_4) \cdot (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}) =$

Вираз 2. $x_1 x_2 \overline{x_3} \vee x_1 x_2 x_3 \vee \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \vee \overline{x_1} x_2 x_3 =$

Вираз 3. $x_1 x_2 \vee x_1 \overline{x_2} \vee ((\overline{x_1} \vee x_2)(x_3 \vee x_4)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2})(x_3 \vee \overline{x_4}))$

Завдання 5. Правило поглинання

Спростіть вирази

Вираз 1. $(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_4) \cdot (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3) \cdot (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}) =$

Вираз 2. $x_1 \overline{x_3} \cdot (\overline{x_1} \vee \overline{x_2}) \cdot (\overline{x_2} \vee x_3) \cdot (x_2 \vee x_3) (\overline{x_1} \vee x_2)$

Вираз 3. $x_1 x_2 \overline{x_3} \vee x_1 x_2 x_3 \vee \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \vee \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 =$

Завдання 6. Комбіновані задачі

Спростіть вирази

Вираз 1. $\overline{x_1 x_2 x_3} \vee x_1 x_2 x_3 \cdot (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \vee (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)$

Вираз 2. $\overline{x_1 x_2 x_3} \cdot \overline{x_1 x_2 x_3} \vee (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$