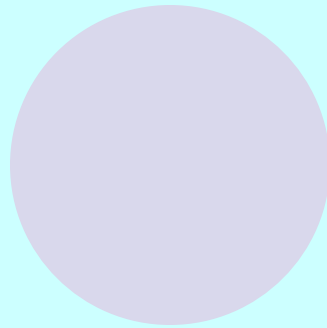
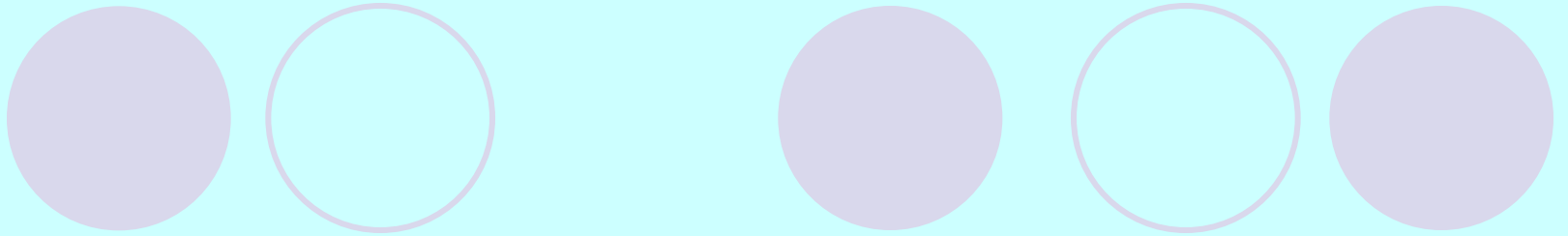


# Теория вероятностей



# Введение. Предмет теории вероятностей его основные задачи и области применения

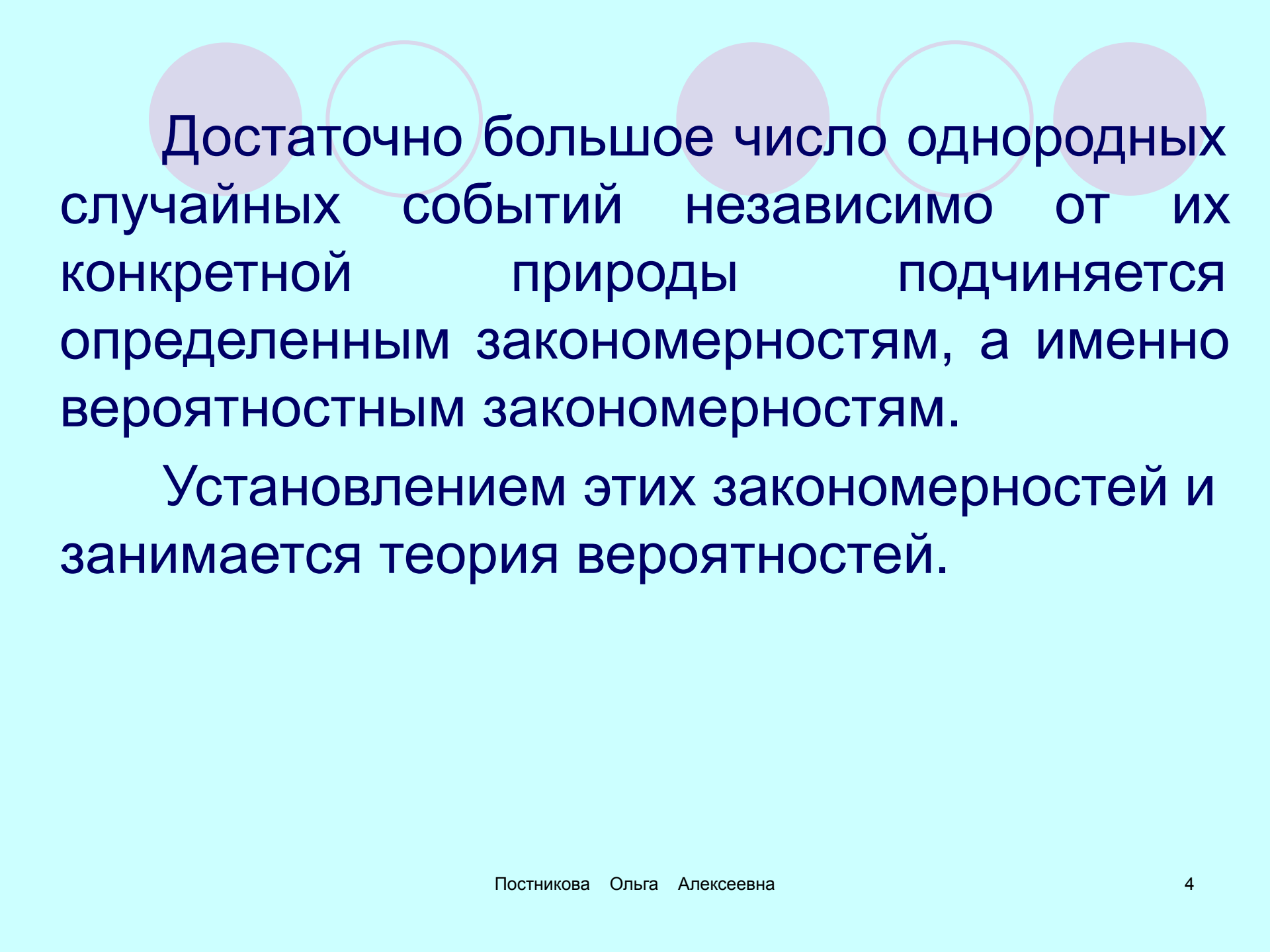




Способность предвидеть возможные варианты будущего и выбирать между альтернативными решениями лежит в основе современных сообществ.

Деятельность в условиях риска заставляет нас принимать множество решений.

Мы вынуждены постоянно опираться на оценку вероятностей неполадок и ошибок.



Достаточно большое число однородных случайных событий независимо от их конкретной природы подчиняется определенным закономерностям, а именно вероятностным закономерностям.

Установлением этих закономерностей и занимается теория вероятностей.

**Теория вероятностей** – раздел математики, в котором изучаются закономерности массовых, случайных явлений.

Знание закономерностей, которым подчиняются массовые, случайные события, позволяет предвидеть, как эти события будут протекать.

**Пример.** Нельзя определить заранее результат одного бросания монеты, но можно предсказать, причем с небольшой погрешностью, число появлений «герба», если монета будет брошена достаточно большое число раз.

Одной из главных задач в теории вероятностей, является задача, определения количественной меры возможности появления события.

Методы теории вероятностей широко применяются в различных отраслях естествознания и техники:

- теории надежности;
- теории массового обслуживания;
- теоретической физике;
- астрономии;
- теории стрельбы;
- теории автоматического управления и др.

Теория вероятностей служит для обоснования математической и прикладной статистики, которая в свою очередь используется при планировании и организации производства, при анализе технологических процессов и др.

# Краткая историческая справка

- Первые работы по теории вероятности, принадлежащие французским учёным Б. Паскалю, П. Ферма и голландскому учёному Х. Гюйгенсу, появились в связи с подсчётом различных вероятностей в азартных играх.
- Крупный успех теории вероятностей связан с именем швейцарского математика Я. Бернулли, установившего закон больших чисел для схемы независимых испытаний с двумя исходами (опубликован в 1713 г.)



# Основатели теории вероятностей



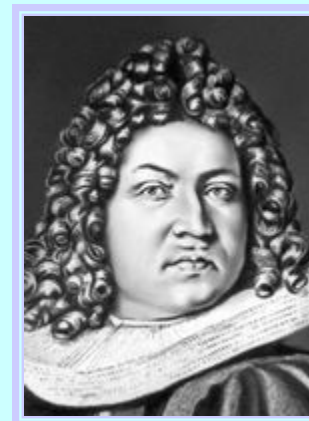
**Б. Паскаль**



**П. Ферма**



**Х. Гюйгенс**



**Якоб  
Бернулли**

Семья Берну́лли (Bernoulli) — протестантская семья из Южных Нидерландов (нынешняя Бельгия), многие члены которой внесли существенный вклад в науку.

Купец Якоб Бернулли в 1567 году покинул Антверпен из-за религиозных притеснений испанских властей, переселившись во Франкфурт-на-Майне, а в начале XVII века его внук (также именовавшийся Якоб) обосновался в Базеле (Швейцария). Три поколения Бернулли дали 8 крупных математиков и физиков, из которых наиболее известны:

Бернулли, Якоб (1654—1708);

Бернулли, Иоганн (1667—1748), младший брат Якоба;

Бернулли, Даниил (1700—1782), сын Иоганна;

Бернулли, Якоб II (1759—1789), племянник Даниила.

Среди академиков Петербургской Академии наук — пятеро представителей семьи Бернулли.

# Биографические данные

Якоб Бернулли (Якоб I)

Дата рождения: 27 декабря 1654 года

Место рождения: Базель

Дата смерти: 16 августа 1705 года

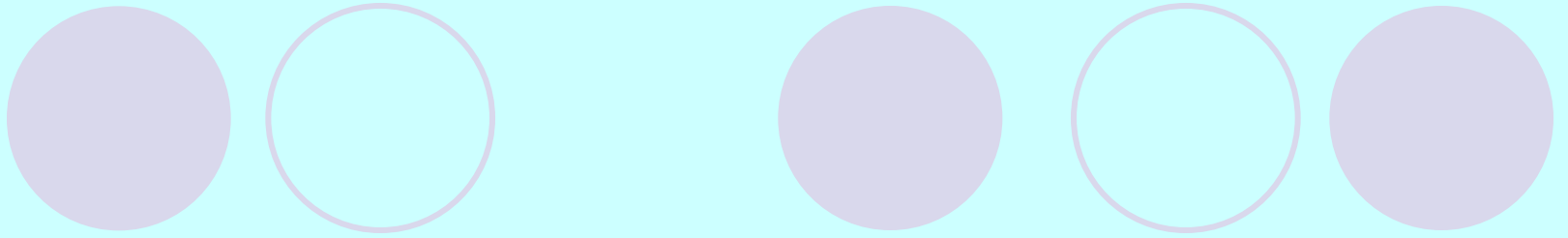
Место смерти: Базель

Гражданство: Швейцария

Научная сфера: Математик

Место работы: Базельский университет

Научный руководитель: Лейбниц



Якоб родился в семье преуспевающего фармацевта Николая Бернулли. Вначале учился богословию, но увлёкся математикой, которую изучил самостоятельно. В 1677 году совершил поездку во Францию для изучения идей Декарта, затем в Нидерланды и Англию, где познакомился с Гуком и Бойлем.

Вернувшись в Базель, некоторое время работал частным учителем.

С 1687 года — профессор физики (позже — математики) в Базельском университете.

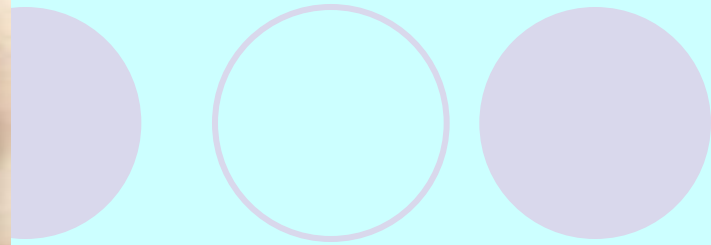
**1684:** штудировать первый мемуар Лейбница по анализу и становится восторженным адептом нового исчисления. Пишет письмо Лейбницу с просьбой разъяснить несколько тёмных мест. Ответ он получил только спустя три года (Лейбниц тогда был в командировке в Париже); за это время Якоб Бернулли самостоятельно освоил дифференциальное и интегральное исчисление, а заодно приобщил к нему брата Иоганна. По возвращении Лейбниц вступает в активную и взаимно-полезную переписку с обоими. Сложившийся триумвират — Лейбниц и братья Бернулли — 20 лет возглавлял европейских математиков и чрезвычайно обогатил новый анализ.

**1699:** оба брата Бернулли избраны иностранными членами Парижской Академии наук.

Якоб Бернулли внёс огромный вклад в развитие аналитической геометрии и зарождение вариационного исчисления. Его именем названа лемниската Бернулли. Он исследовал также циклоиду, цепную линию, и особенно логарифмическую спираль. Последнюю из перечисленных кривых Якоб завещал нарисовать на своей могиле; к сожалению, по невежеству там изобразили спираль Архимеда.

Согласно завещанию, вокруг спирали выгравирована надпись на латыни, «EADEM MUTATA RESURGO» («изменённая, я вновь воскресая»), которая отражает свойство логарифмической спирали восстанавливать свою форму после различных преобразований.





## Спираль Бернулли

- Следующий период истории развития (XVIII век) связан с именами А. Муавра (Англия), Д. Бернулли (Россия), Т. Байеса (Англия). Это период, когда теория вероятностей, уже находит ряд весьма актуальных применений в естествознании, экономике, технике (главным образом в теории ошибок наблюдений).
- Новый наиболее плодотворный период связан с именами П.Л. Чебышева (1821-1894) и его учеников А.А. Маркова (1856-1922) и А. М. Ляпунова (1857-1918). В этот период теория вероятностей становится стройной математической наукой.



**Строгое логическое обоснование теории вероятностей произошло в XX в. и связано с именами советских математиков С. Н. Бернштейна и А. Н. Колмогорова.**



**С. Н. Бернштейн**



**А. Н. Колмогоров**

17

- Чебышев чрезвычайно просто доказал (1867) закон больших чисел при весьма общих предположениях. Он же впервые сформулировал (1887) центральную предельную теорему для сумм независимых случайных величин и указал один из методов её доказательства. Другим методом Ляпунов получил (1901) близкое к окончательному решение этого вопроса. Марков впервые рассмотрел (1907) один случай зависимых испытаний, который впоследствии получил название цепей Маркова



# Тема. Элементы комбинаторики

## План:

- 1. Основные понятия комбинаторики.**
- 2. Правила комбинаторики.**

# Контрольные вопросы

- Что изучают в разделе комбинаторика?
- Какие виды соединений элементов вы знаете?
- Что называют размещениями. Сочетаниями, перестановками из  $n$  элементов по  $m$  в каждом?
- Запишите формулы для вычисления числа этих соединений.

# Контрольные вопросы

- Какие виды событий вы знаете?
- Какое событие называют случайным, достоверным, невозможным?
- Какие события называют несовместными, противоположными?
- Что означает, что события образуют полную группу?
- Сформулируйте классическое определение вероятности события и свойства вероятности.

# 1. Основные понятия комбинаторики

Группы, составленные из каких-либо элементов, называют **соединениями**.

Различают три основных вида соединений:

- размещения;
- перестановки;
- сочетания.

Задачи, в которых производится подсчет возможных различных соединений, составленных из конечного числа элементов по некоторому правилу, называются **комбинаторными**, а раздел математики занимающийся их решением, называется **комбинаторикой**.

Произведение  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n$

обозначают символом  $n!$

(читают «**n-факториал**»), причем:

$$1! = 1$$

$$0! = 1$$



# Размещения



**Размещениями** из  $n$  элементов по  $m$  в каждом называют такие соединения, которые отличаются друг от друга либо самими элементами (хотя бы одним), либо порядком их расположения.

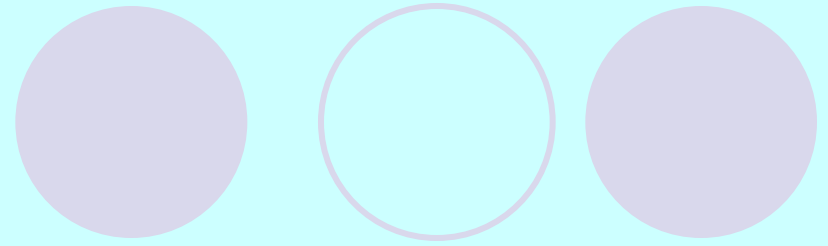
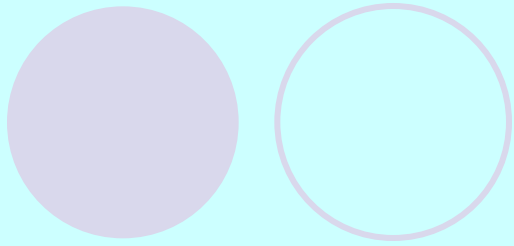
Число размещений из  $n$  элементов по  $m$  в каждом обозначается символом

$$A_n^m$$

Размещение - *Accommodation*

и вычисляется по формуле:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$



## **Пример.**

Сколькими способами из пяти кандидатов можно выбрать три лица на три различные должности?

## Пример.

Сколькими способами из пяти кандидатов можно выбрать три лица на три различные должности?

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{2! \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$$

# Перестановки



**Перестановками** из  $n$  элементов называются такие соединения из всех  $n$  элементов, которые отличаются друг от друга порядком расположения элементов.

Число перестановок из  $n$   
элементов обозначается  
СИМВОЛОМ

$P_n$

Перестановки - *Permutation*

и вычисляется по формуле

$$P_n = n!$$





**Пример.**

**Сколькими способами  
можно посадить пять  
человек по пяти местам?**



**Пример.**

**Сколькими способами  
можно рассадить пять  
человек по пяти местам?**

$$P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

# Сочетания



**Сочетаниями из  $n$  элементов по  $m$  в каждом называются такие соединения, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.**

Число сочетаний без повторений из  $n$  элементов по  $m$  в каждом обозначается СИМВОЛОМ

$$C_n^m$$

Сочетание - *Combinaison*

и вычисляется по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)! \cdot m!} = \frac{A_n^m}{P_m}$$



**Пример.**

Сколькими способами из 10  
врачей можно создать бригады  
скорой помощи по 4 человека в  
каждой?

## Пример.

Сколькими способами из 10 врачей можно создать бригады скорой помощи по 4 человек в каждой?

$$C_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)! \cdot 4!} = \frac{10!}{6! \cdot 4!} = \frac{6! \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6!} = 210$$

# Справедливы тождества:

$$C_n^m = C_n^{n-m}$$

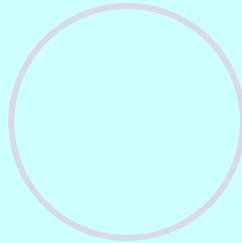
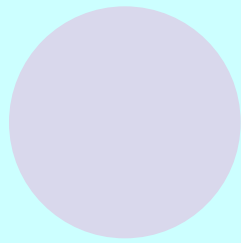
$$C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$$

$$C_n^0 = 1 \quad C_n^1 = 1$$

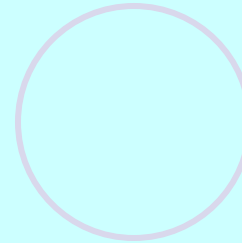
$$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$$

$$\sum_{m=0}^n \left( C_n^m \right)^2 = C_{2n}^n$$





## Замечание.



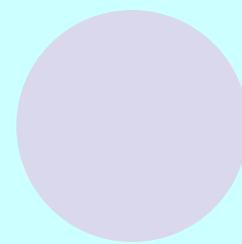
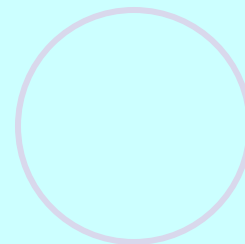
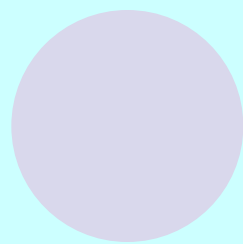
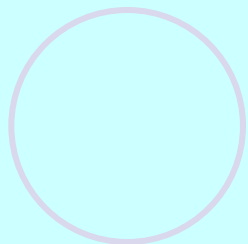
Выше предполагалось, что все  $n$  элементов различны. Если же некоторые элементы повторяются, то в этом случае комбинации с повторениями вычисляются по другим формулам.

# Схема выбора с возвращениями.

- Если при выборе  $m$  элементов из  $n$  – элементы возвращаются обратно и упорядочиваются, то говорят, что это *размещение с повторениями*.

$$A_n^m = n^m$$

**Пример :**



В гостинице 10 комнат, каждая из которых может разместить четырех человек. Сколько существует способов размещения, прибывших четырех гостей?

**Решение :**

Каждый следующий гость из 4 может быть помещен в любую из 10 комнат, поэтому общее число размещений по формуле размещений с повторениями, равно

$$\overline{A}_{10}^4 = 10^4 = 10000$$

- Если при выборе  $m$  элементов из  $n$  элементы возвращаются без последующего упорядочивания, то говорят, что это *сочетания с повторениями*

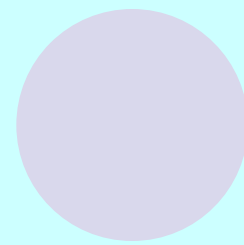
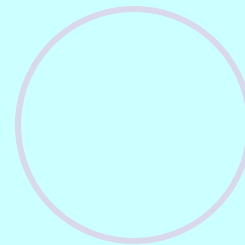
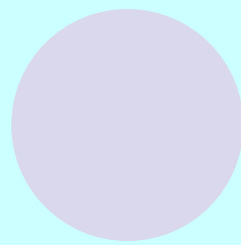
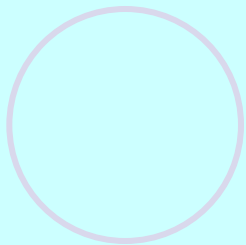
$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{(n-1)!m!}$$



**Пример :**

В магазине продается 10 видов тортов. Очередной покупатель выбил чек на три торта. Считая, что любой набор товаров равновозможен, определить число **ВОЗМОЖНЫХ** заказов

**Решение :**



Число возможных заказов по формуле

$$\overline{C}_{10+3-1}^3 = C_{12}^3 = \frac{12!}{(12-3)!3!} = 220$$

# Схема упорядоченных разбиений

Пусть  $k_1, k_2, \dots, k_r$  – целые числа, такие, что

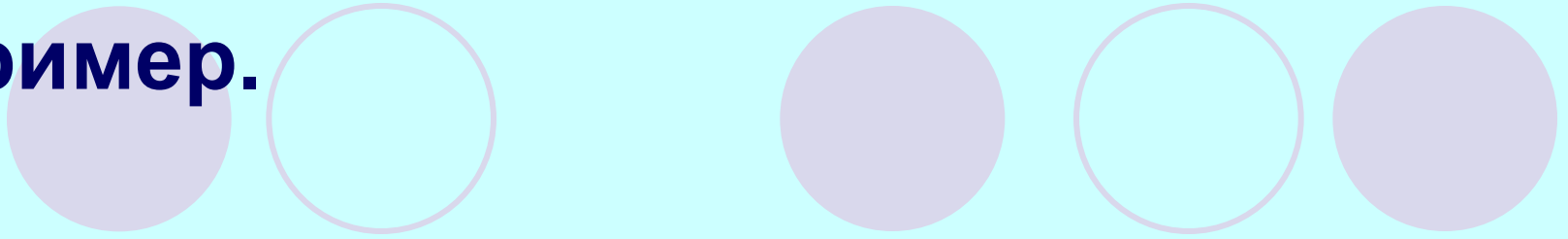
$$k_1 + k_2 + \dots + k_r = n, \quad k_i \geq 0$$

Число способов, которыми генеральную совокупность из  $n$  элементов можно разделить на  $r$  упорядоченных частей, из которых первая содержит  $k_1$  элементов, вторая –  $k_2$  элементов и  $r$ -ая  $k_r$  элементов вычисляется

$$P_n(k_1, k_2, \dots, k_r) = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_r!}$$



**Пример.**



Девять человек размещается в гостинице в четырехместный, трехместный и двухместный номера. Сколько существует способов их размещения?

$$P_9(4,3,2) = \frac{9!}{4!3!2!} = 1260$$

## 2. Правила комбинаторики

### Правило суммы.

Если некоторый объект  $A$  может быть выбран из совокупности объектов  $m$  способами, а другой объект  $B$  может быть выбран  $n$  способами, то выбрать либо  $A$ , либо  $B$  можно  $m+n$  способами.

## Правило произведения.

Если объект  $A$  можно выбрать из совокупности объектов  $m$  способами и после каждого такого выбора объект  $B$  можно выбрать  $n$  способами, то пара объектов  $A$  и  $B$  в указанном порядке может быть выбрана  $m \cdot n$  способами.

**Пример.**

В меню 2 первых блюда, 3 вторых и 5 третьих.  
Сколькими способами можно выбрать обед из  
трех блюд?

**Решение.**

**Пример.**

В меню 2 первых блюда, 3 вторых и 5 третьих. Сколькими способами можно выбрать обед из трех блюд?

Решение.

$$2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

# Тема: Случайные события

## План:

1. Испытания и события.
2. Виды случайных событий.
3. Классическое определение вероятности.
4. Статистическое определение вероятности.

# 1. Испытания и события

Чтобы каким-то образом оценить событие, необходимо учесть или специально организовать условия, в которых оно происходит.

Выполнение определенных условий или действий для выявления рассматриваемого события носит название **опыта** или **эксперимента**.

Событие рассматривают, как  
результат испытания (опыта).

События обозначают заглавными  
буквами латинского алфавита

*A, B, C* и т.д.



# Виды событий

- событие называется **случайным**, если в результате опыта оно может произойти, либо не произойти;
- событие называется **достоверным**, если оно обязательно произойдет в результате данного опыта;
- событие называется **невозможным**, если оно не может произойти в данном опыте.



**Пример.**

Испытание - подбрасывание  
игральной кости.

События (исходы):

*A* – выпало четное число очков;

*B* – выпало 8 очков;

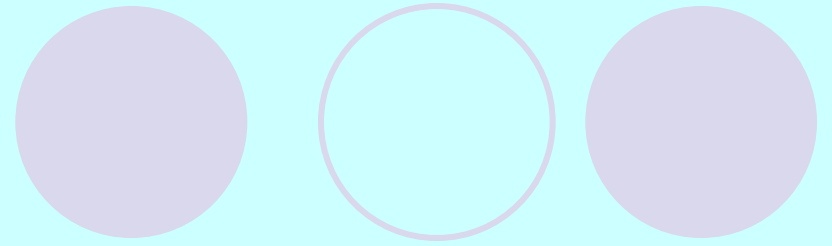
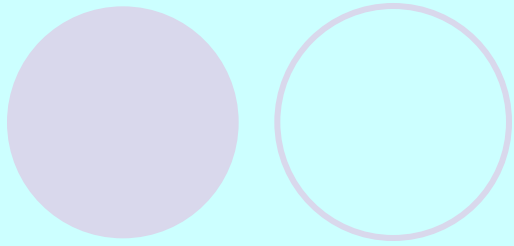
*C* – выпало менее 7 очков.

## 2. Виды случайных событий

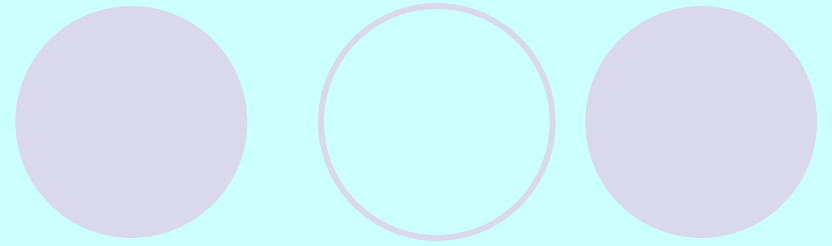
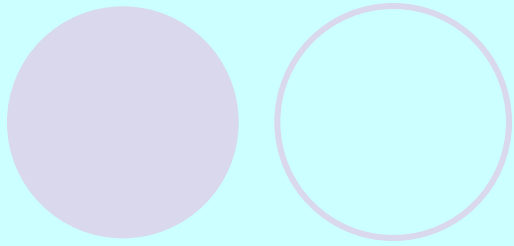
События называются **несовместными**, если они вместе не могут наблюдаться в одном и том же опыте (т.е. появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же опыте).

**События называются  
единственно возможными,  
если в результате опыта  
появление одного из них, есть  
событие достоверное.**

**События называются  
равновозможными, если ни у  
одного из них нет  
преимущества для появления  
перед другими.**



**События образуют полную группу событий, если хотя бы одно из них обязательно произойдет в опыте.**



**Пример.**

**В аптеку принимаются на реализацию лекарственные препараты от двух поставщиков.**



## События:

*A*- отсутствие поставок;

*B*- поступление товара от одного из поставщиков;

*C* - поступление товара от двух поставщиков;

образуют полную группу.



**Противоположными**  
называются два единственно  
возможных события,  
образующих полную группу.

Если одно из противоположных событий  
обозначить через  $A$ , то другое  
обозначают

$\overline{A}$



**Пример.**

**Брошена монета.**

**События:**

$A$  - «появился герб»;

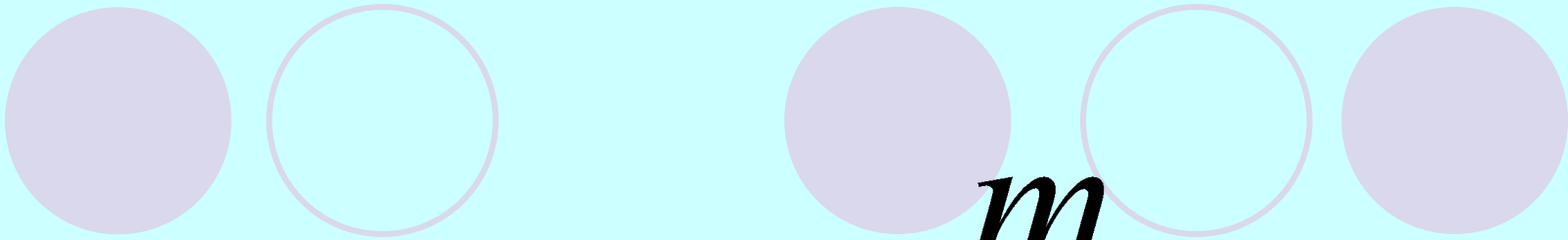
$\bar{A}$  - «появилась надпись».

### 3. Классическое определение вероятности

Одной из главных задач в теории вероятностей является задача определения количественной меры, возможности появления события.

Количественной мерой возможности появления рассматриваемого события является вероятность.

- **Вероятностью события  $A$**  - называется число, равное отношению числа исходов, благоприятствующих наступлению события  $A$  к общему числу ВОЗМОЖНЫХ ИСХОДОВ.


$$P(A) = \frac{m}{n}$$

- где  $m$ -число исходов благоприятствующих наступлению события  $A$ ;
- $n$  – общее число возможных исходов.

Probabilitas(лат.)- вероятность

# Свойства вероятности

- Вероятность достоверного события равна единице;
- Вероятность невозможного события равна нулю;
- Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей;

## 4. Статистическое определение вероятности

**Относительной частотой** события называют отношение числа испытаний, в которых событие появилось, к общему числу фактически произведенных испытаний.



Относительная частота события  $A$  определяется формулой

$$W(A) = \frac{m}{n}$$

где  $m$ -число появлений события,  $n$  – общее число испытаний.

## Пример.

Среди 1000 новорожденных оказалось 517 мальчиков. Чему равна частота рождения мальчиков?

Событие  $A$  – рождение мальчика.

$$W(A) = \frac{517}{1000} = 0,517$$

Сопоставляя определение вероятности и относительной частоты, делаем вывод: определение вероятности не требует, чтобы испытания производились в действительности; определение же относительной частоты предполагает, что испытания были произведены фактически.

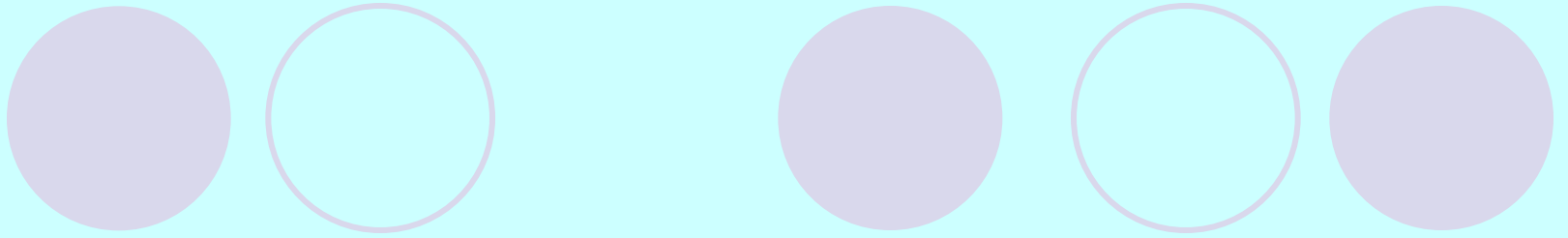
Другими словами, вероятность вычисляют до опыта, а относительную частоту – после опыта.

**Статистической вероятностью** события  $A$  - называется число, около которого группируются значения относительной частоты данного события в различных сериях большого числа испытаний

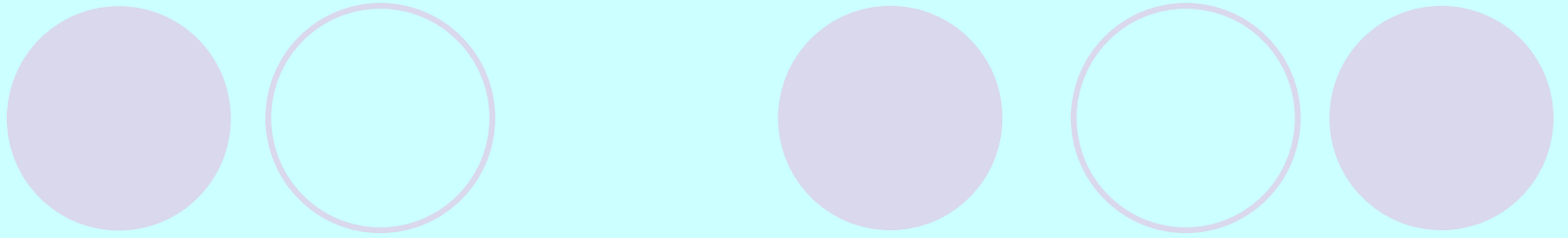
$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n}$$

## 5. Геометрическое определение вероятности

Геометрической вероятностью события  $A$  называется отношение меры области, благоприятствующей появлению события  $A$ , к мере всей области

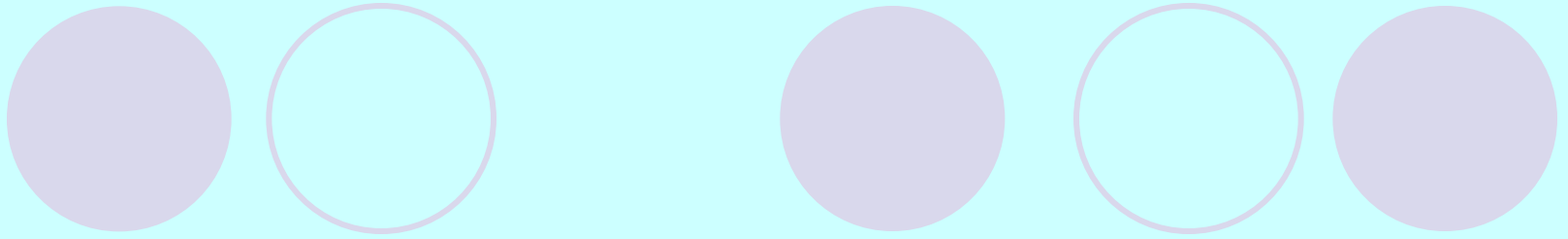


Пример: Найти вероятность того, что точка случайным образом брошенная в квадрат со стороной 4 попадает в квадрат со стороной 3, находящийся внутри первого квадрата



Пример: Найти вероятность того, что точка случайным образом брошенная в квадрат со стороной 4 попадает в квадрат со стороной 3, находящийся внутри первого квадрата

Решение:  
 $P(A)=9/16$



Пример: Два студента договорились встретиться в определенном месте в промежутке времени от 9.00 до 10.00. Каждый из них приходит наудачу, независимо от другого и ожидает 10 минут. Какова вероятность того, что они встретятся?



Рассмотрим прямоугольную систему координат  $XOY$ , в качестве единиц масштаба выберем часы. Пусть  $x$  и  $y$ - моменты прихода  $A$  и  $B$  соответственно.

Необходимым и достаточным условием встречи является выполнение неравенства  $y-x < 1/6$  (или  $x-1/6 < y < x+1/6$ ). Тогда все возможные исходы будут являться точками квадраты  $1 \times 1$ . Заштрихованной области квадрата, ограниченной сторонами квадрата, а также прямыми  $y=x-1/6$  и  $y=x+1/6$ , соответствуют исходы благоприятствующие встрече.

Искомая вероятность площади заштрихованной фигуры к площади всего квадрата.