Сегодня: понедельник, 14 декабря 2015 г.

Тема 1 ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

1.1 Виды и признаки колебаний

1.2 Параметры гармонических колебаний

1.3 Графики смещения скорости и ускорения

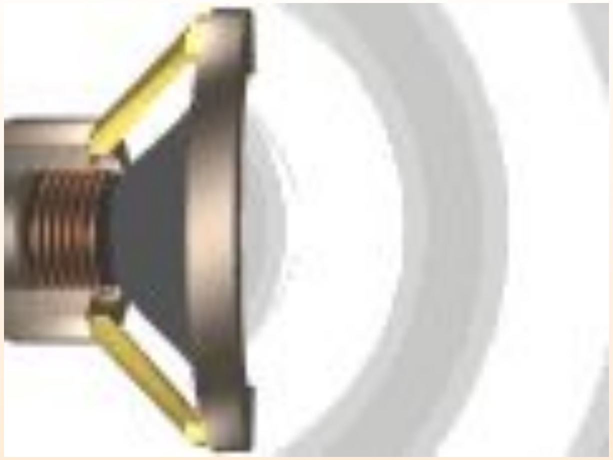
1.4 Основное уравнение динамики гармон. колебаний

1.5 Энергия гармонических колебаний

1.6 Гармонический осциллятор

Примеры колебательных процессов

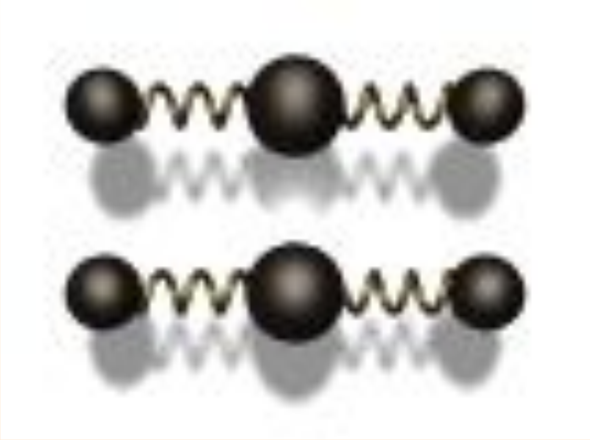
Круговая волна на поверхности жидкости, возбуждаемая точечным источником (гармонически колеблющимся шариком).



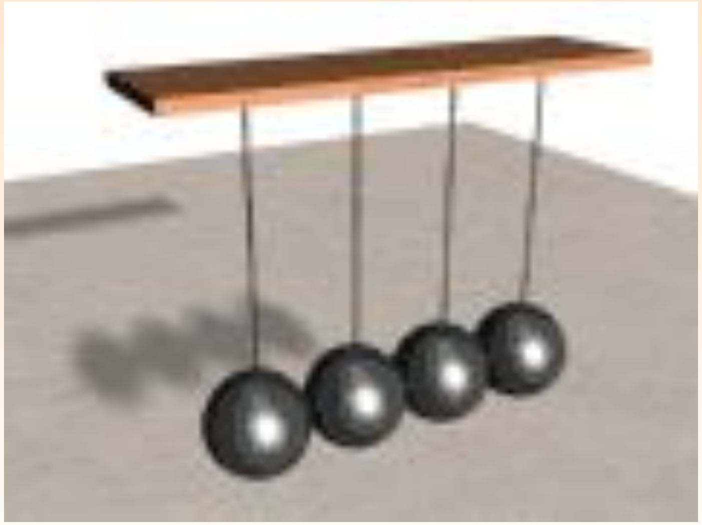
Генерация акустической волны громкоговорителем.

Примеры колебательных процессов

Поперечная волна в сетке, состоящей из шариков, скреплённых пружинками. Колебания масс происходят перпендикулярно направлению распространения волны.



Возможные типы колебаний атомов в кристалле.



В случае **абсолютно упругого столкновения шаров** (нет потерь энергии) скорость и угол отклонения крайних шаров одинаковы, а все промежуточные шары находятся в покое.

В **реальности** общая энергия системы со временем уменьшается за счет трения о воздух, нагревания шаров, возбуждения акустических волн и т.д. В результате амплитуда отскока крайних шаров уменьшается, а центральные шары начинают совершать колебательные движения.

Из приведенного примера следуют *три признака колебательного движения:*

- ***повторяемость*** (***периодичность***) *– движение по одной и той же траектории туда и обратно*;
- ***ограниченность*** *пределами крайних положений*;
- ***действие силы***, *описываемой функцией* $F = -kx$.

$$x = A\cos\varphi$$

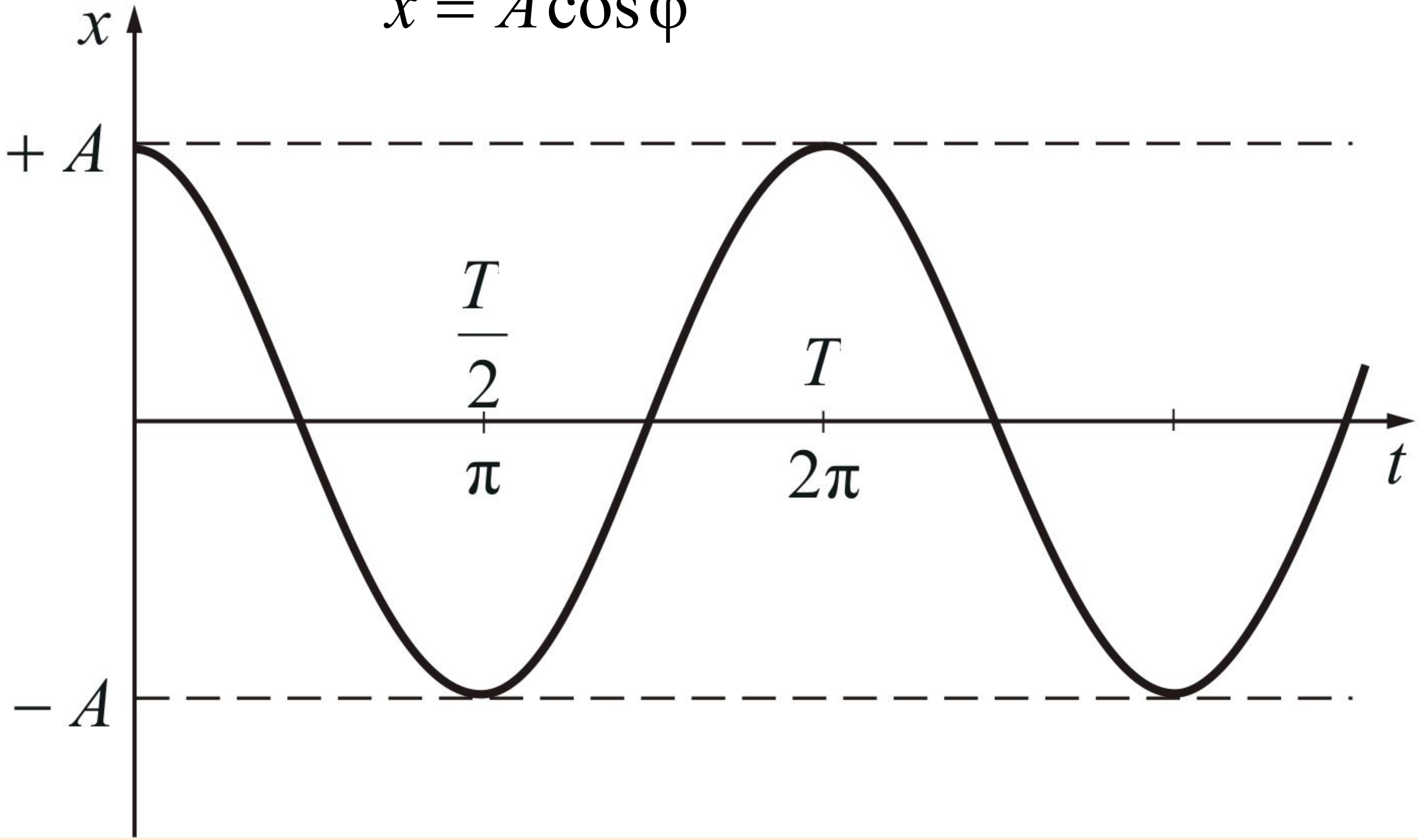
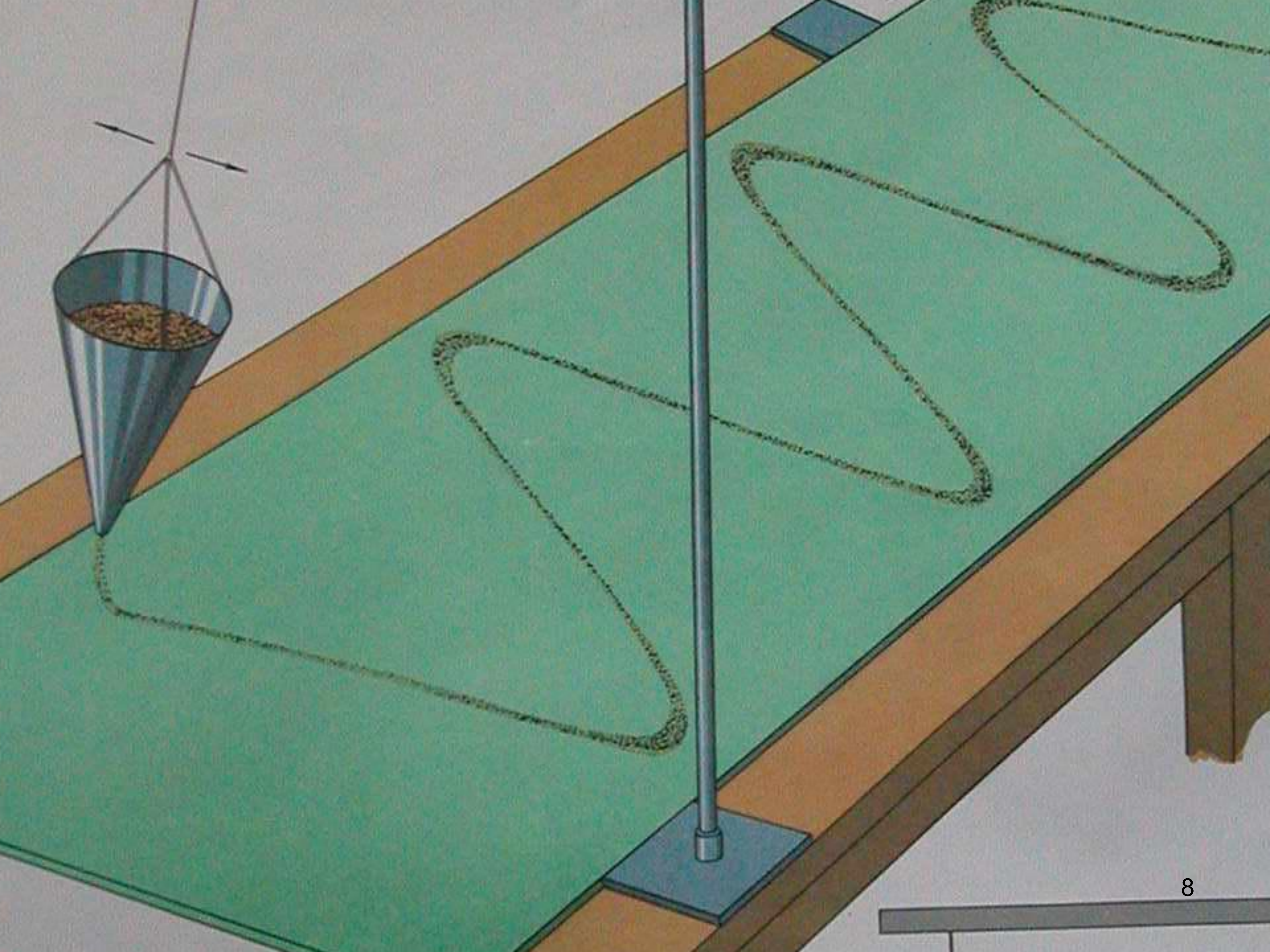
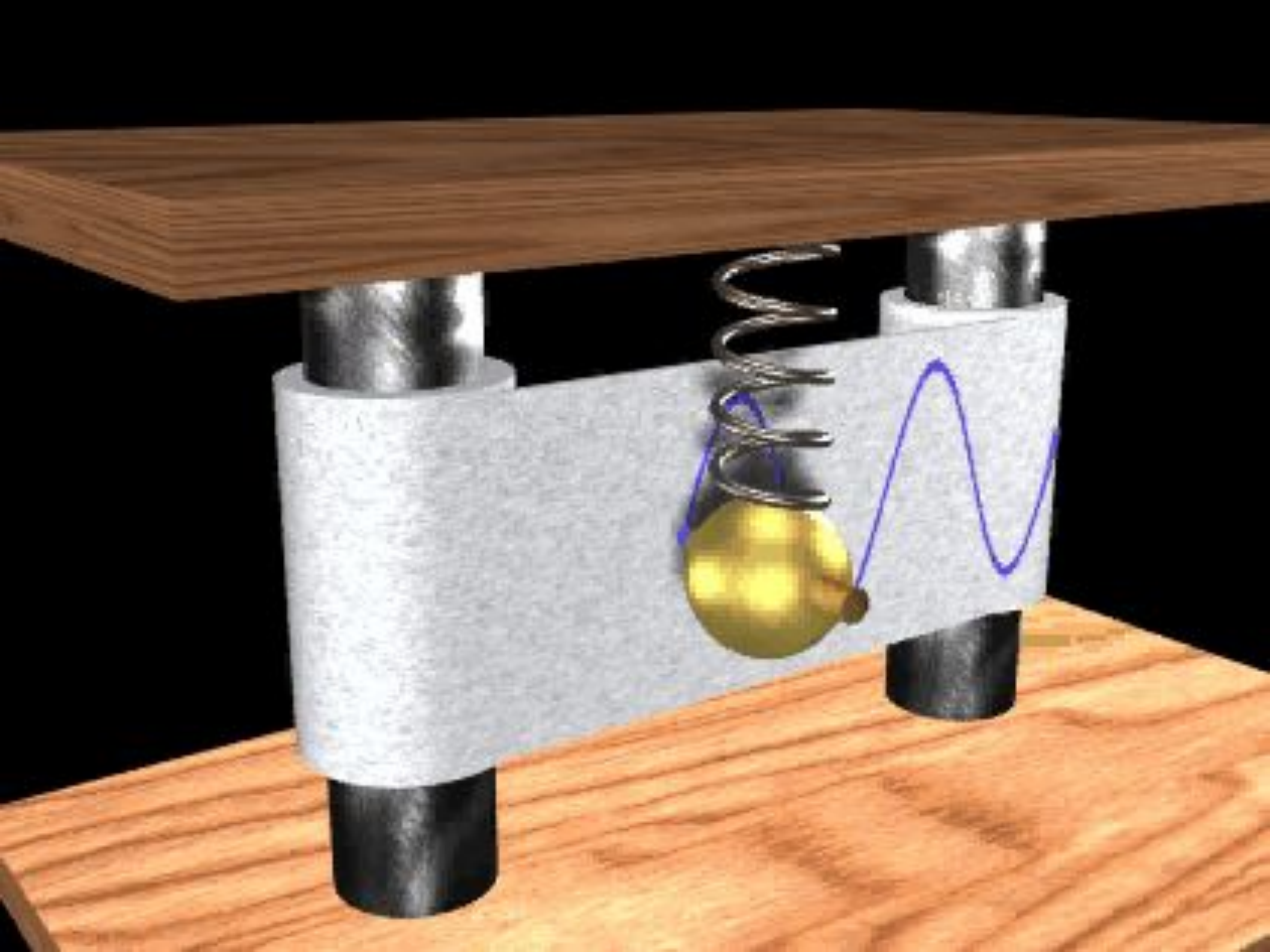


Рисунок 2





Колебания называются ***периодическими***, если значения физических величин, изменяющихся в процессе колебаний, повторяются через равные промежутки времени.

- Простейшим типом периодических колебаний являются так называемые ***гармонические колебания.***
- Любая колебательная система, в которой возвращающая сила прямо пропорциональна смещению, взятому с противоположным знаком (например, $F = -kx$), совершает ***гармонические колебания.***
- Саму такую систему часто называют ***гармоническим осциллятором***.

•Движение от некоторой начальной точки до возвращения в ту же точку, например от $x = A$ к $x = -A$ и обратно в $x = A$, называется ***полным колебанием***.

- ***Частота колебаний ν*** определяется, как число полных колебаний в 1 секунду. Частоту, измеряют в герцах (Гц):
- 1 Гц = 1 колеб. в секунду.

$$\nu = \frac{1}{T} \qquad (1.1.2)$$

- ***T – период колебаний*** – минимальный промежуток времени, по истечении которого повторяются значения всех физических величин, характеризующих колебание

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{1}{\nu} \qquad (1.2.3)$$

- ***ω – циклическая (круговая) частота*** – число полных колебаний за 2π секунд.

$$\omega_0 = 2\pi\nu \qquad (1.2.2)$$

- Фаза φ *не влияет на форму кривой x(t), а влияет лишь на ее положение в некоторый произвольный момент времени t.*

- *Гармонические колебания являются всегда* ***синусоидальными.***
- *Частота и период гармонических колебаний не зависят от амплитуды.*

Смещение описывается уравнением

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

тогда, по определению: (1.2.4)

скорость $$\upsilon_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t + \varphi)$$ (1.2.5)

ускорение $$a_x = \frac{\mathrm{d}\upsilon_x}{\mathrm{d}t} = -\omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$\omega_0 A = \upsilon_m$ *– амплитуда скорости;*

$\omega_0^2 A = a_m$ *– амплитуда ускорения.*

1.3 Графики смещения скорости и ускорения

Уравнения колебаний запишем в следующем виде:

$$\begin{cases} x = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \\ \upsilon_x = -\upsilon_m \sin(\omega_0 t + \varphi) \\ a_x = -a_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \end{cases} \qquad (1.3.1)$$

Из этой системы уравнений можно сделать следующие выводы:

- ***скорость*** ***колебаний тела максимальна и равна амплитуде скорости в момент прохождения через положение равновесия*** ($x = 0$).

- ***При максимальном смещении*** ($x = \pm A$) ***скорость равна нулю.***

- ***Ускорение*** ***равно нулю при прохождении телом положения равновесия и достигает наибольшего значения, равного амплитуде ускорения при наибольших смещениях.***

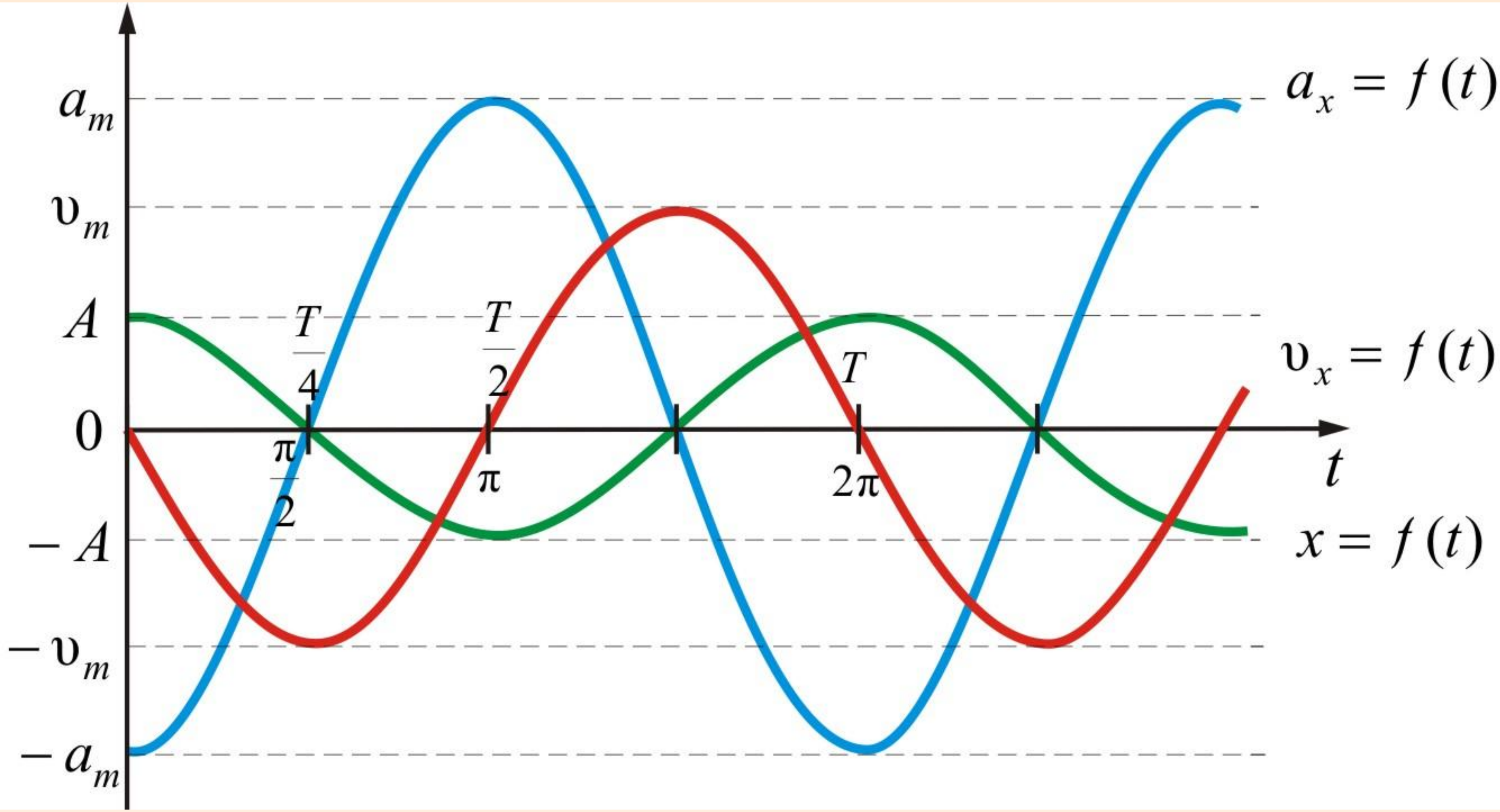

a_m
υ_m
A
0
$-A$
$-\upsilon_m$
$-a_m$
$\frac{T}{4}$
$\frac{T}{2}$
T
$\frac{\pi}{2}$
π
2π
t
$a_x = f(t)$
$\upsilon_x = f(t)$
$x = f(t)$

Рисунок 3

1.4 Основное уравнение динамики гармонических колебаний

• Исходя из второго закона, $F = ma$, можно записать

$$F_x = -m\omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \varphi) = -m\omega_0^2 x \qquad (1.4.1)$$

$$F_x = -m\omega_0^2 x$$

сила F пропорциональна x и всегда направлена к положению равновесия (поэтому ее и называют ***возвращающей силой***). Период и фаза силы совпадают с периодом и фазой ускорения.

• Примером сил удовлетворяющих (1.4.1) являются *упругие силы*. Силы же имеющие иную природу, но удовлетворяющие (1.4.1) называются *квазиупругими*.

Квазиупругая сила

$$F_x = -kx, \qquad (1.4.2)$$

где k – коэффициент квазиупругой силы

Сравнивая (1.4.1) и (1.4.2) видим, что $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ $\quad a_x = \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$

Получим основное уравнение динамики гармонических колебаний, вызываемых упругими силами:

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -kx \text{ или } m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + kx = 0; \quad \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}x = 0, \quad \text{тогда}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = 0$$

Основное уравнение динамики гармонических колебаний

Решение этого уравнения всегда будет выражение вида

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Круговая частота колебаний

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

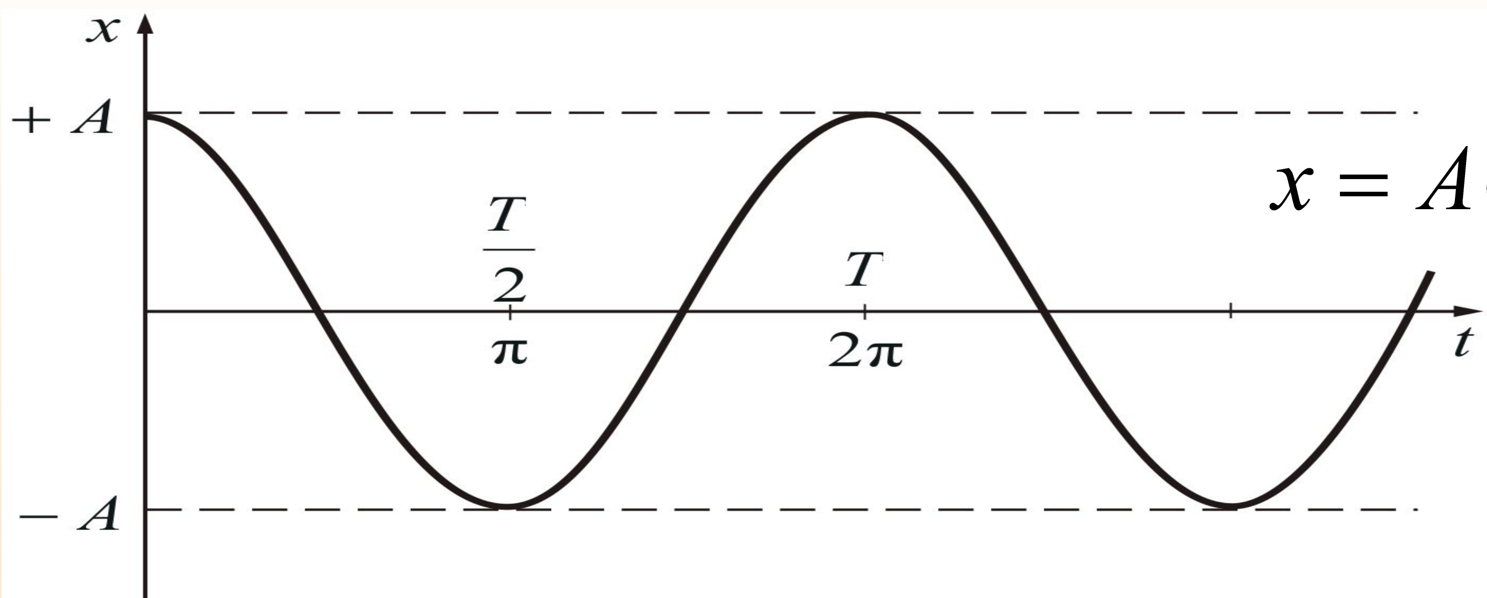
но

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$ тогда

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Период колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$



$$x = A\cos\varphi$$

1.5 Энергия гармонических колебаний

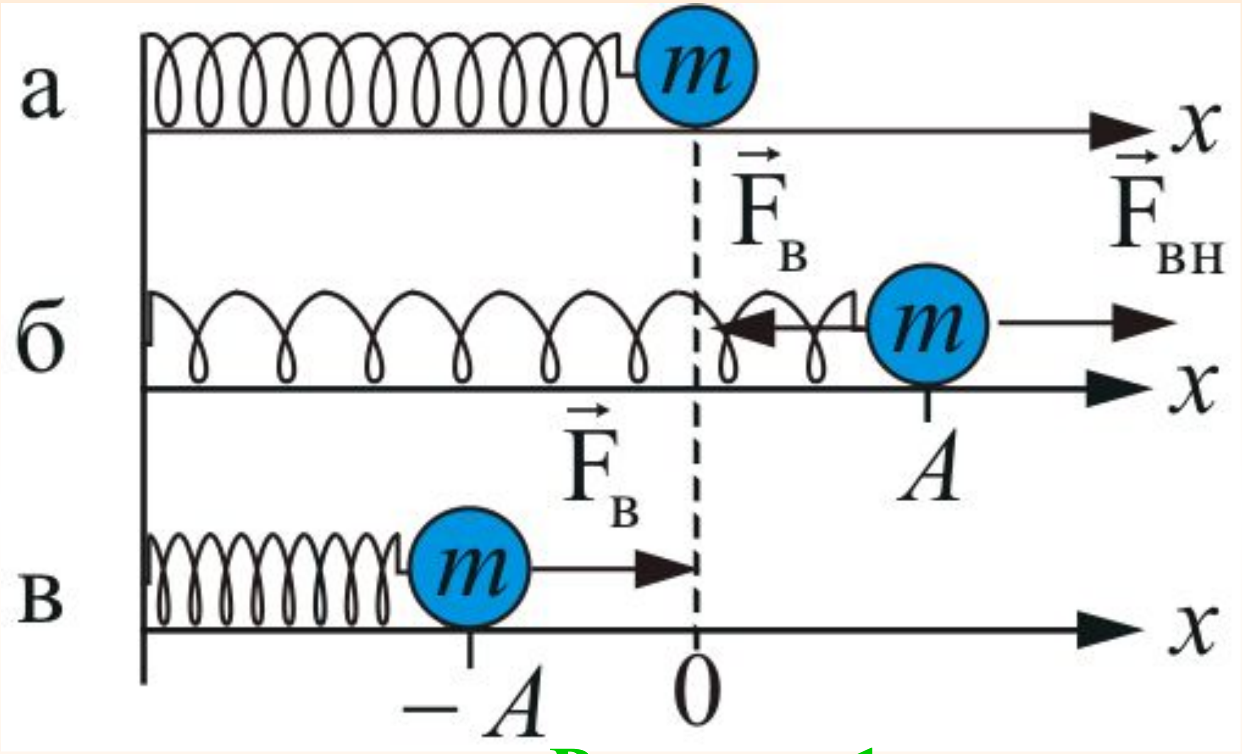


Рисунок 1

Потенциальная энергия тела U, *измеряется той работой, которую произведет возвращающая сила* $F_x = -kx$

$$F_x = -\frac{dU}{dx}; \quad dU = -F dx = kx dx, \text{ отсюда } U = k\int_0^x x dx$$ или

•***Потенциальная энергия***

$$U = \frac{kx^2}{2} = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi) \qquad (1.5.1)$$

•***Кинетическая энергия***

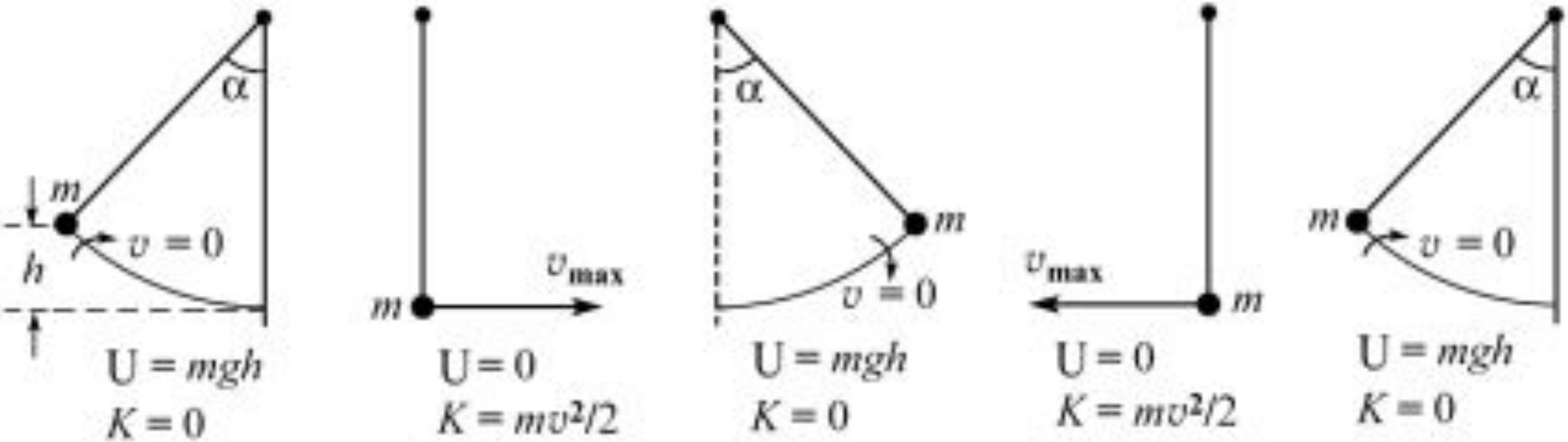
$$K = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi) \qquad (1.5.2)$$

• ***Полная энергия:***

$$E = U + K = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2, \text{ или } E = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 = \frac{1}{2}kA^2 \qquad (1.5.3)$$

Полная механическая энергия гармонически колеблющегося тела пропорциональна квадрату амплитуды колебания.

Колебания груза под действием сил тяжести

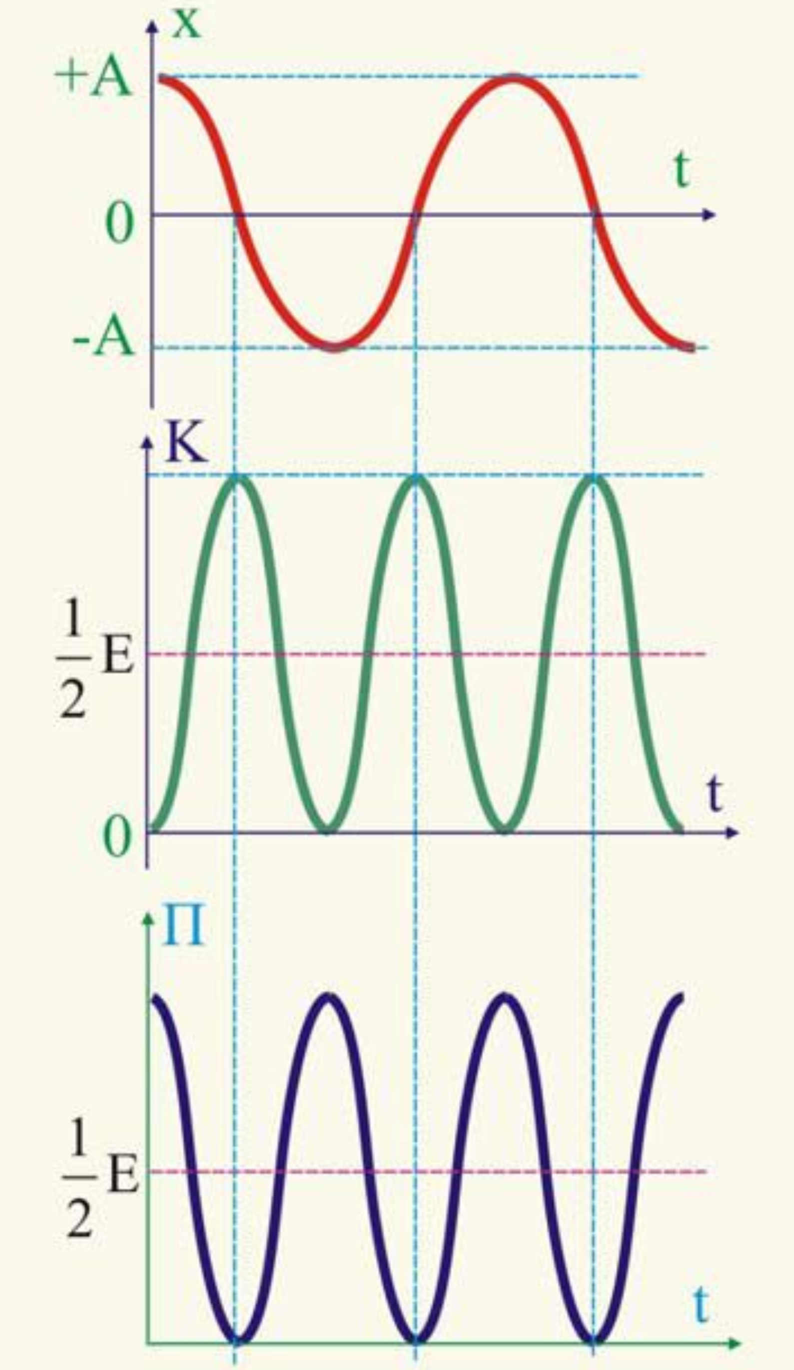


Максимум потенциальной энергии, (из 1.5.1)

$$U_{\max} = mgh = \frac{1}{2}kA^2$$

Максимум кинетической энергии $K_{\max} = \dfrac{m\upsilon^2}{2} = \dfrac{1}{2}kA^2$

но когда $K = \max$, $U = 0$ и наоборот.

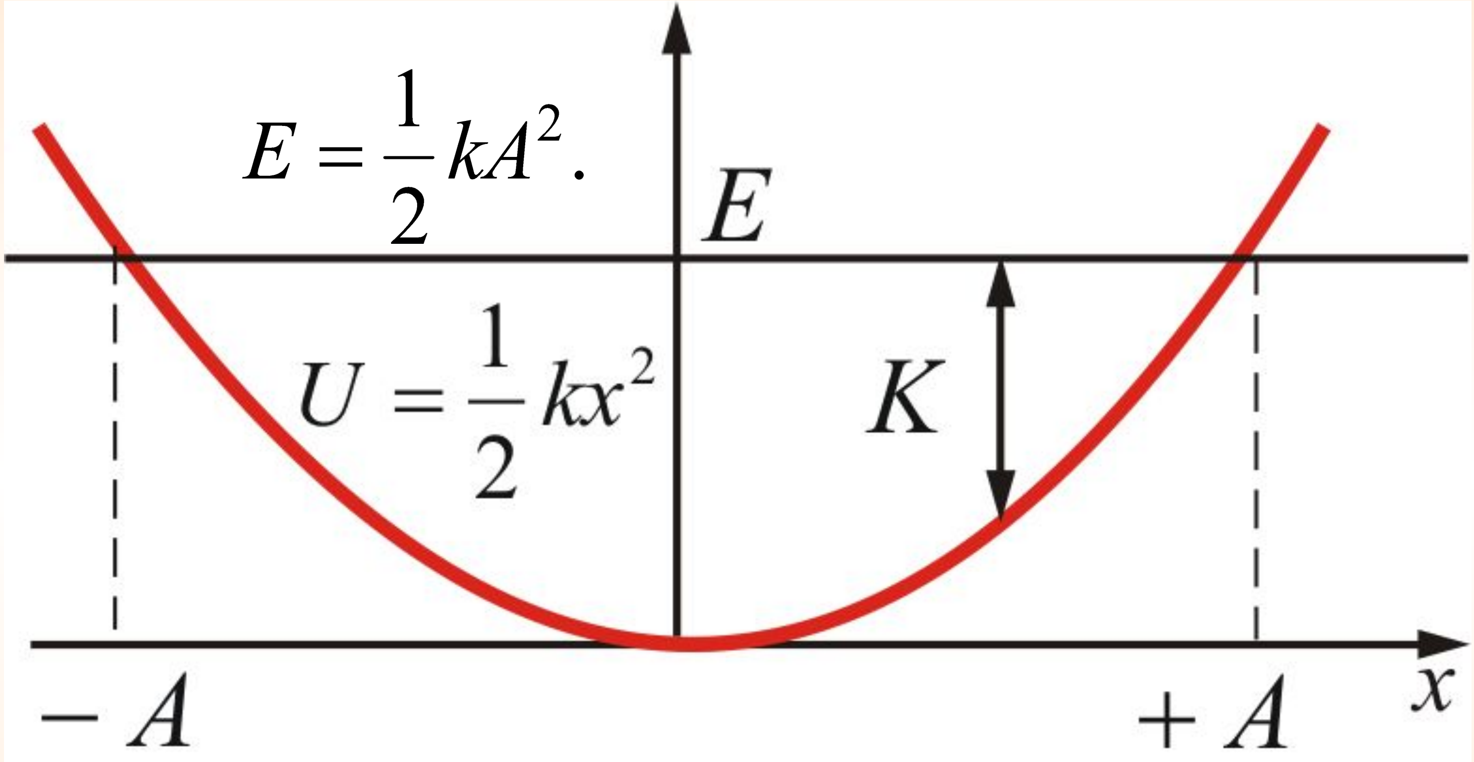


При колебаниях совершающихся под действием потенциальных (консервативных) сил, происходит переход кинетической энергии в потенциальную и наоборот, но их ***сумма в любой момент времени постоянна.***

Рисунок 5

На рисунке 6 приведена ***кривая потенциальной энергии***

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$



$$E = \frac{1}{2}kA^2.$$

$$K = E - U$$

1.6 Гармонический осциллятор

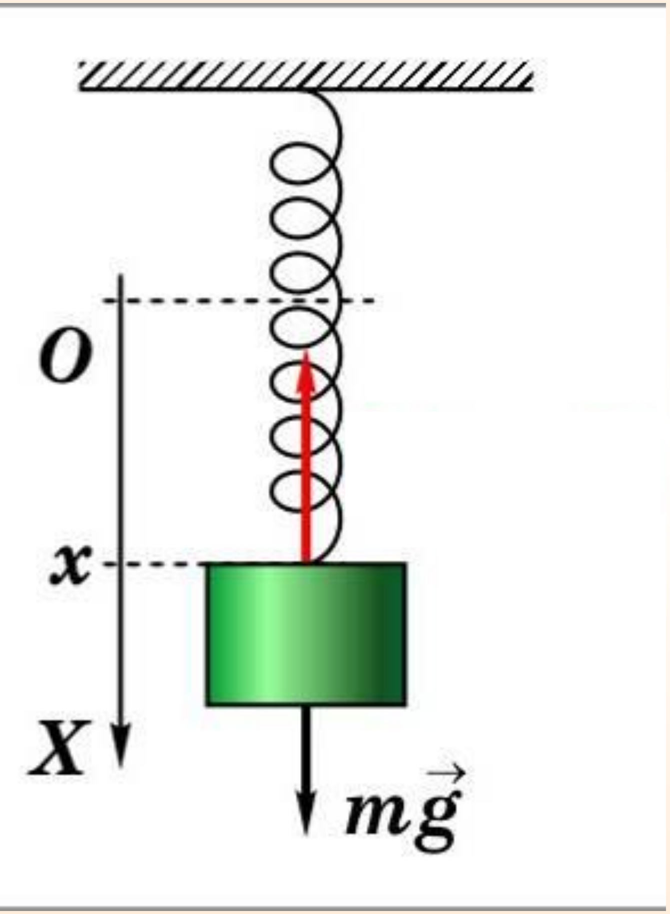


Рисунок 7

1. ***Пружинный маятник*** – это груз массой m, подвешенный на абсолютно упругой пружине с жесткостью k, совершающий гармонические колебания под действием *упругой силы* $F = -kx$

Из второго закона Ньютона $F = ma$; или $F = - kx$ получим ***уравнение движения маятника***:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{k}{m}\right)x = 0 \qquad (1.6.1)$$

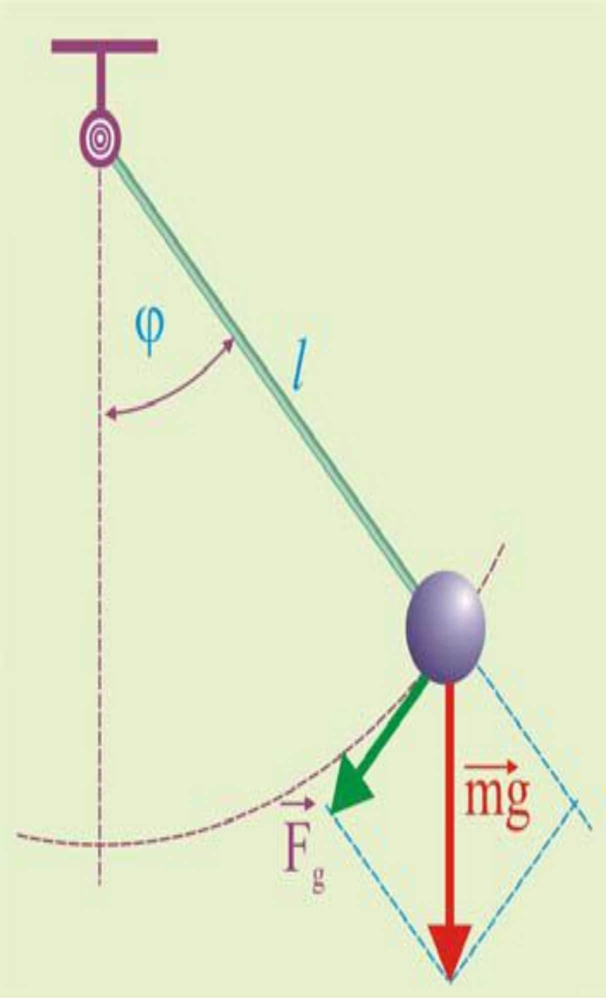
Решение этого уравнения – гармонические колебания вида:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

циклическая частота **ω** период ***T***

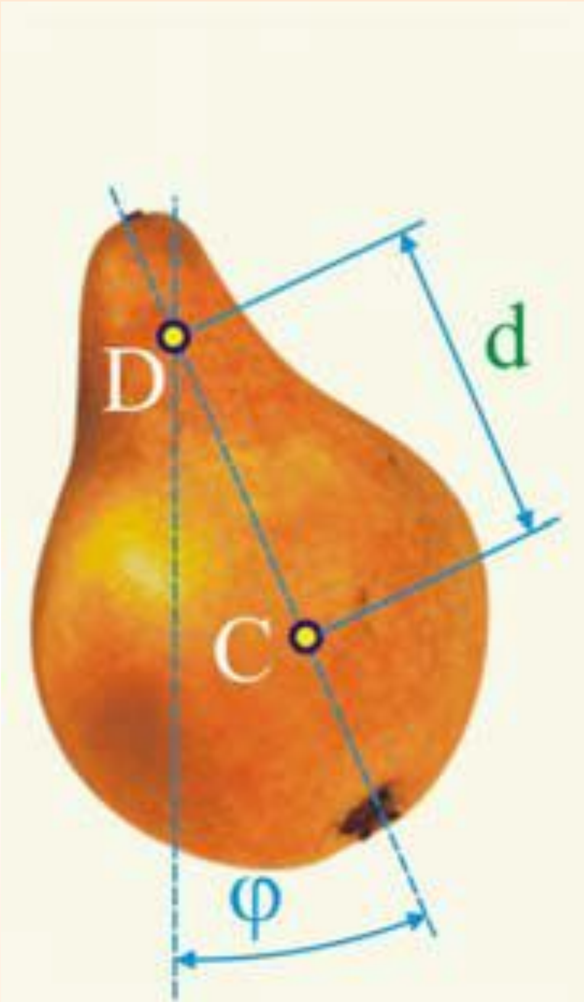
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}; \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

2 Математическим маятником – *называется идеализированная система, состоящая из невесомой, нерастяжимой нити, на которую подвешена масса, сосредоточенная в одной точке* (шарик на длинной тонкой нити).



$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$ -собственная частота

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$ -период колебаний математического маятника



3 ***Физический маятник*** – это *твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной горизонтальной* ***оси, проходящей через точку подвеса D, не совпадающую с центром масс С***

l – расстояние между точкой подвеса и центром инерции маятника *D-C*.

J – момент инерции маятника относит. точки подвеса *D*.

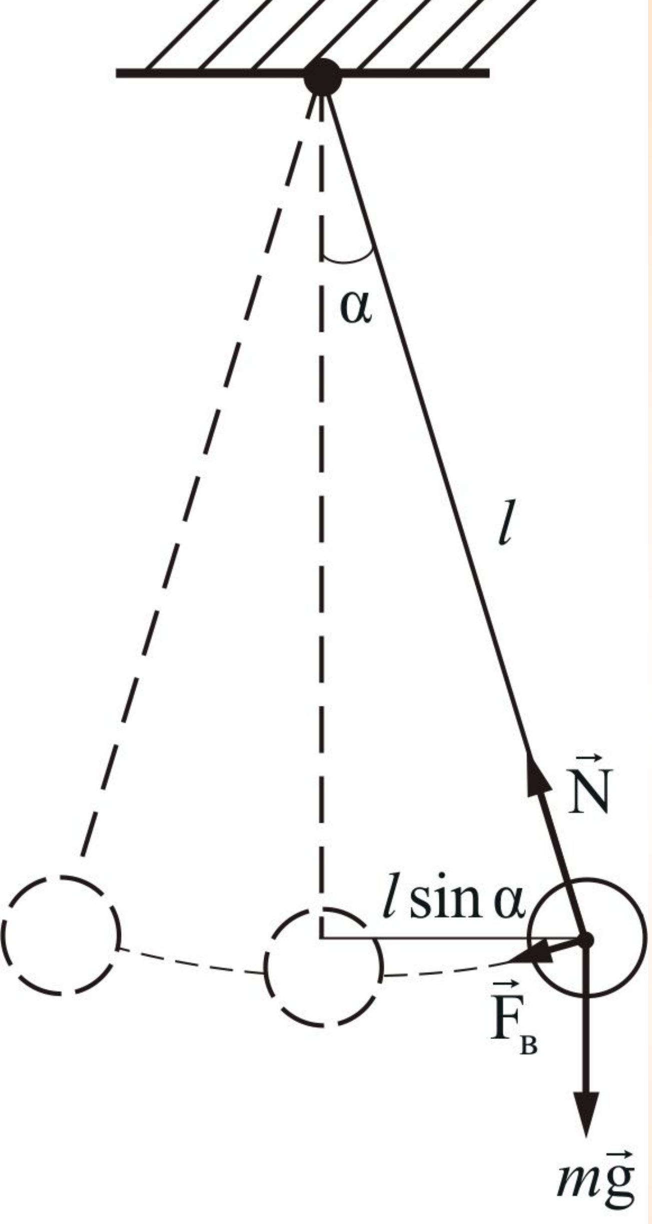
$$\omega_0^2 = \frac{mgl}{J}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}$$

$$l_{\text{пр.}} = \frac{J}{ml}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_{\text{пр.}}}{g}}$$

$l_{\text{пр.}}$ – ***приведенная*** *длина физического маятника* – это длина такого математического маятника, период колебания которого совпадает с периодом колебаний данного физического маятника.



- Все приведенные соотношения для математического и физического маятников справедливы ***для малых углов отклонения*** (***меньше 15°***), когда $x = l\alpha$ мало отличается от длины хорды $l \sin \alpha$ (меньше чем на 1%).

3.1 Свободные затухающие механические колебания

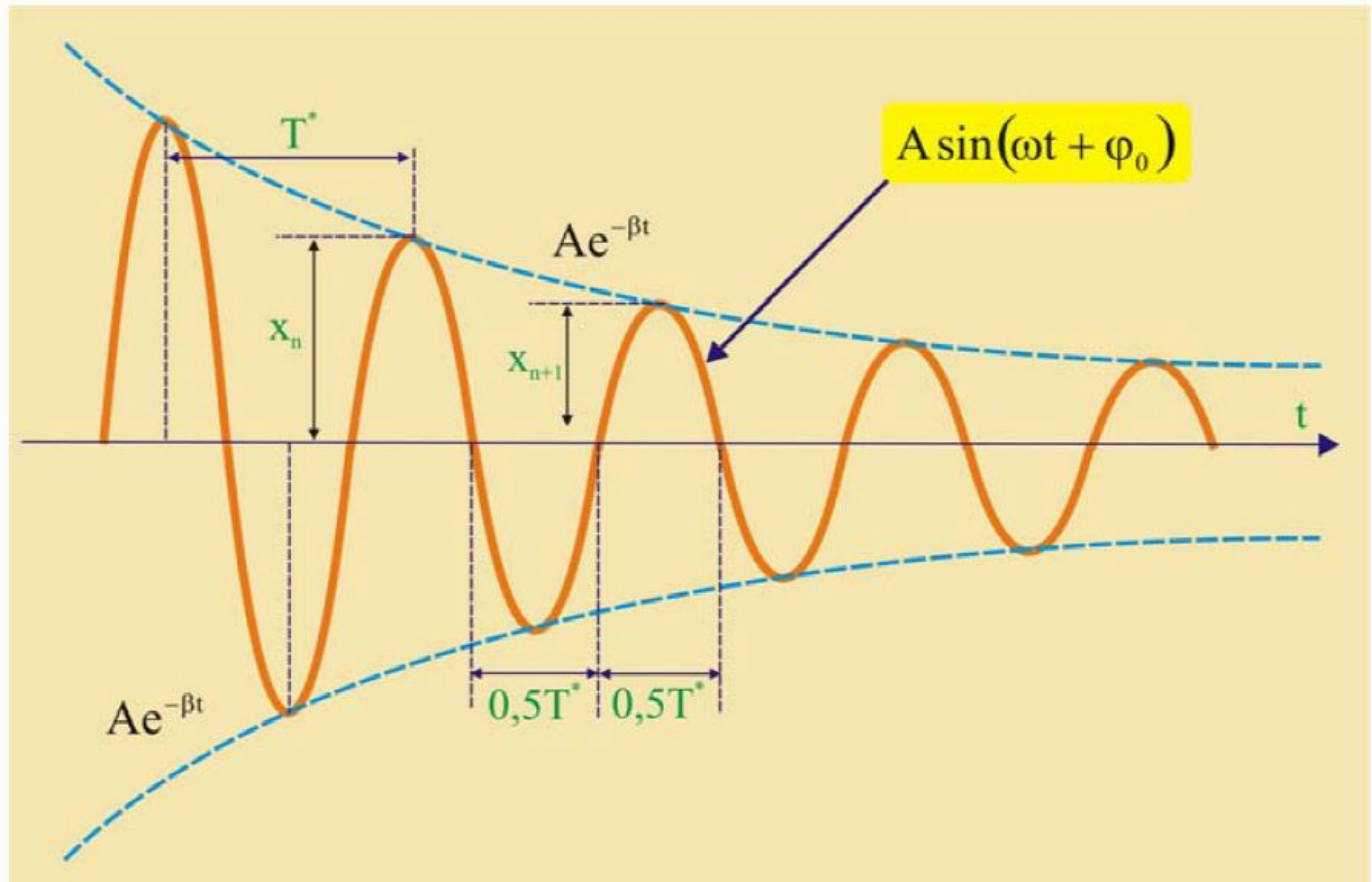
Все реальные колебания являются затухающими. Энергия механических колебаний постепенно расходуется на работу против сил трения и амплитуда колебаний уменьшается.

Сила трения (или *сопротивления*)

$$\vec{F}_{\text{тр}} = -r\vec{\upsilon}$$

где r – коэффициент сопротивления,

$\vec{\upsilon}$ – скорость движения


$A\sin(\omega t + \varphi_0)$
T^*
$Ae^{-\beta t}$
x_n
x_{n+1}
t
$0,5T^*$
$0,5T^*$
$Ae^{-\beta t}$

Второй закон Ньютона для затухающих *прямолинейных* колебаний вдоль оси *x*

$$ma_x = -kx - r\upsilon_x$$

где kx – возвращающая сила, $r\upsilon_x$ – сила трения.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

Введем обозначения $\frac{r}{2m} = \beta$; $\frac{k}{m} = \omega_0^2$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (3.1.1)$$

Решение уравнения (3.1.1) имеет вид (при $\beta \le \omega_0$)

Решение уравнения (3.1.1) имеет вид

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi) \qquad (3.1.2)$$

Найдем *частоту колебаний* ω. $(\omega \neq \omega_0)$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \qquad \beta \le \omega_0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\ ; \qquad \beta = \frac{r}{2m}\ ; \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2}\ .$$

период- $$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}},$$

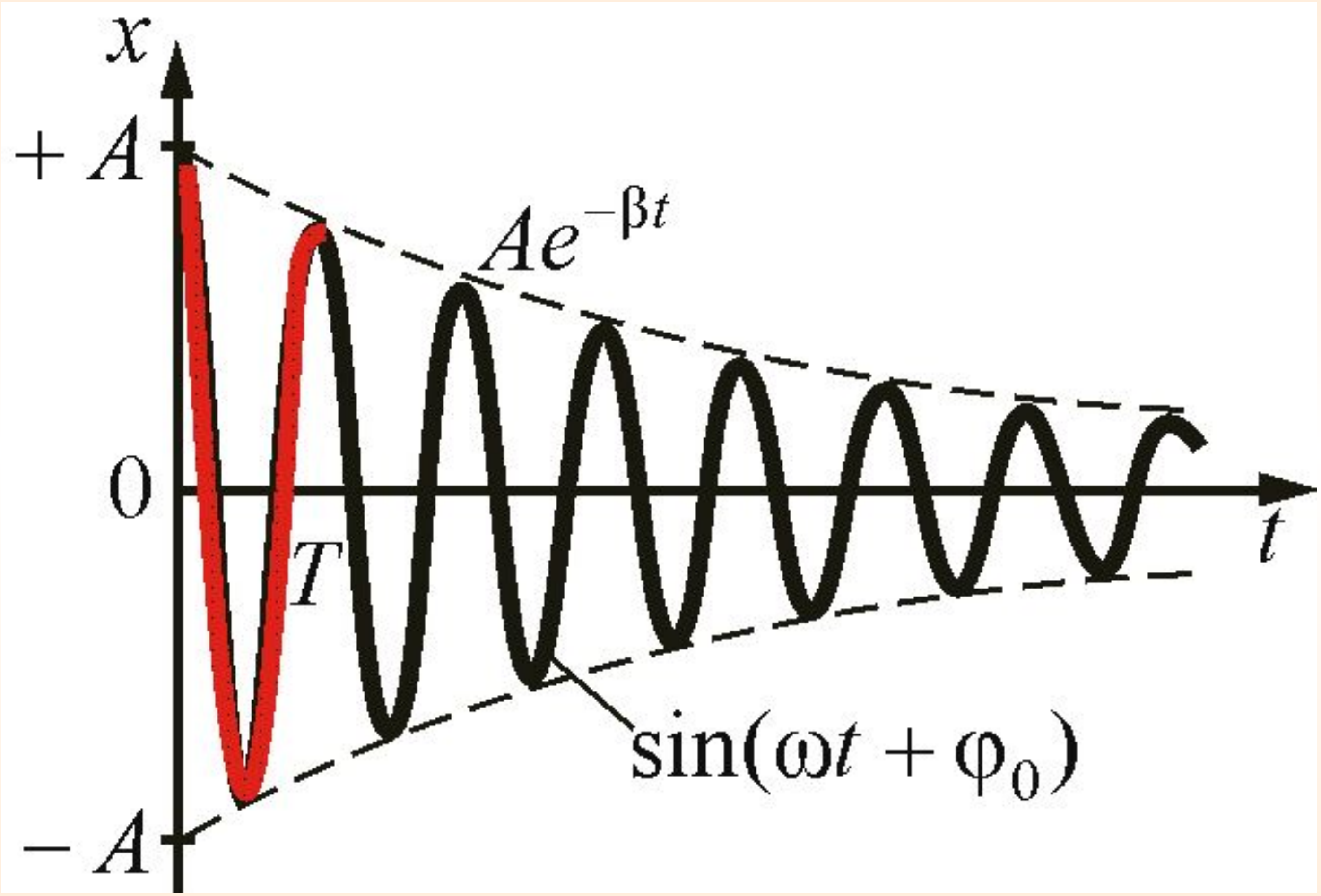
Логарифмическим декрементом затухания называется *натуральный логарифм отношения амплитуд, следующих друг за другом через период T.*

$$\chi = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln e^{\beta T} = \beta T; \qquad \chi = \beta T$$

$$\frac{A_0}{A_\tau} = e^{\beta\tau} = e^{1}, \text{ откуда} \qquad \beta\tau = 1; \qquad \beta = \frac{1}{\tau}.$$

Следовательно, *коэффициент затухания* β – есть физическая величина, обратная времени, в течение которого *амплитуда уменьшается в e раз*,

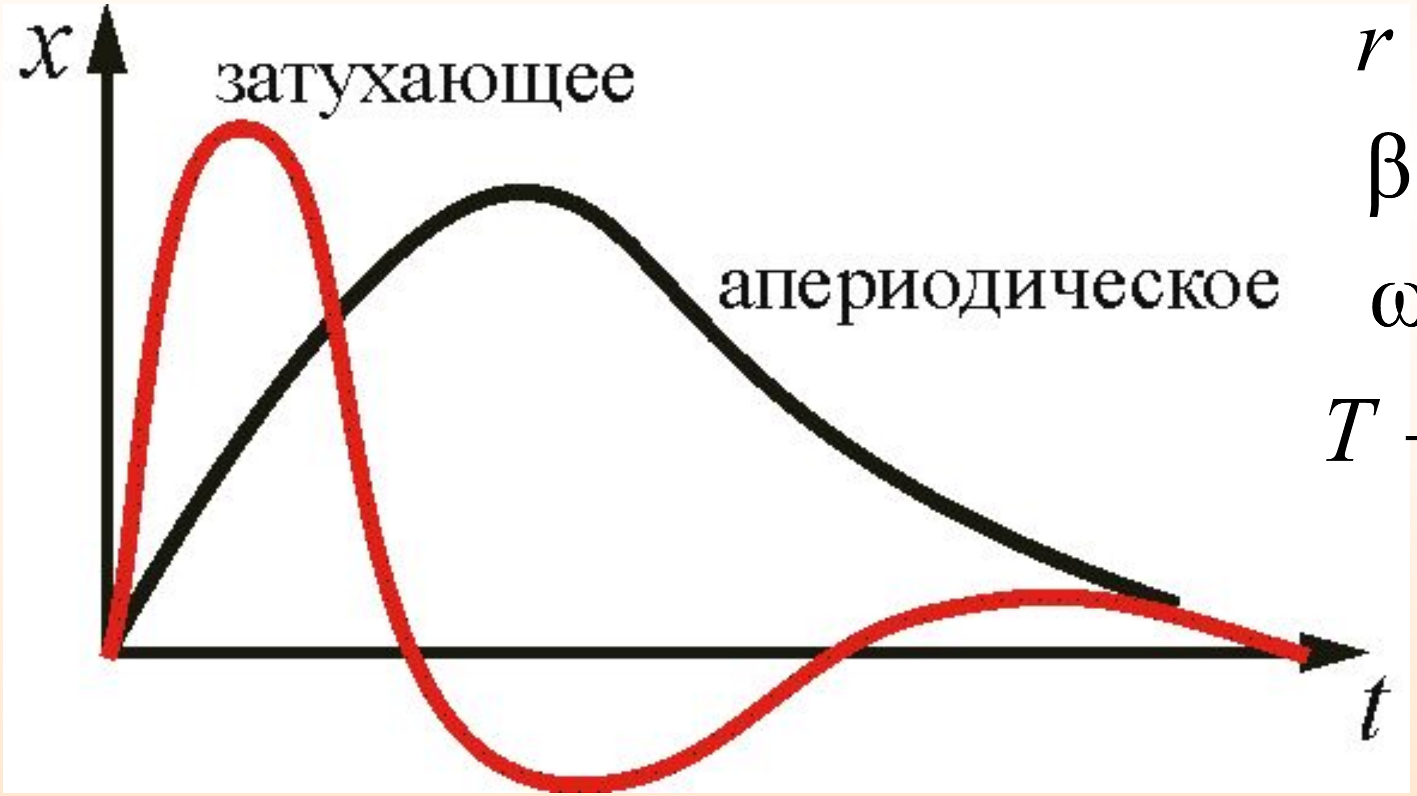
τ – *время релаксации*.



$$\chi = \beta T$$

$$\beta = \frac{1}{\tau}.$$

Когда сопротивление становится равным критическому $r = r_{\text{кр}}$, а $\beta = \omega_0$, то круговая частота обращается в нуль ($\omega = 0$), ($T \to \infty$), колебания прекращаются. Такой процесс называется *апериодическим:*



$$r = r_{\text{кр}}$$

$$\beta = \omega_0$$

$$\omega = 0$$

$$T \to \infty$$

Рисунок 2

Отличия в следующем.
При колебаниях, тело, возвращающееся в положение равновесия, имеет запас кинетической энергии. В случае *апериодического движения* энергия тела при возвращении в положение равновесия оказывается израсходованной на преодоление сил сопротивления трения.

3.3 Вынужденные механические колебания

Рассмотрим систему, на которую кроме *упругой силы* ($-kx$) и *сил сопротивления* ($-r\upsilon$) действует добавочная *периодическая сила* F – *вынуждающая сила:*

$$ma_x = -kx - r\upsilon_x + F_x$$

– *основное уравнение колебательного процесса*, при вынужденных колебаниях

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = F_x \qquad (3.3.1)$$

$$F_x = F_0 \cos\omega t.$$

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

Проанализируем выражение

1) $\omega = 0$ (частота вынуждающей силы равна нулю)

$$x = F_0 / m\omega_0^2$$

– статическая амплитуда, колебания не совершаются.

2) $\beta = 0$ (затухания нет). С увеличением ω (но при $\omega < \omega_0$), амплитуда растет и при $\omega = \omega_0$, амплитуда резко возрастает ($A \to \infty$). Это явление называется – *резонанс*. При дальнейшем увеличении ($\omega > \omega_0$) амплитуда опять уменьшается. (Рисунок 4)

3) $\beta \neq 0.$ $\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ резонансная частота

$\omega = \omega_0 \qquad A \to \infty$ *- явление резонанса*

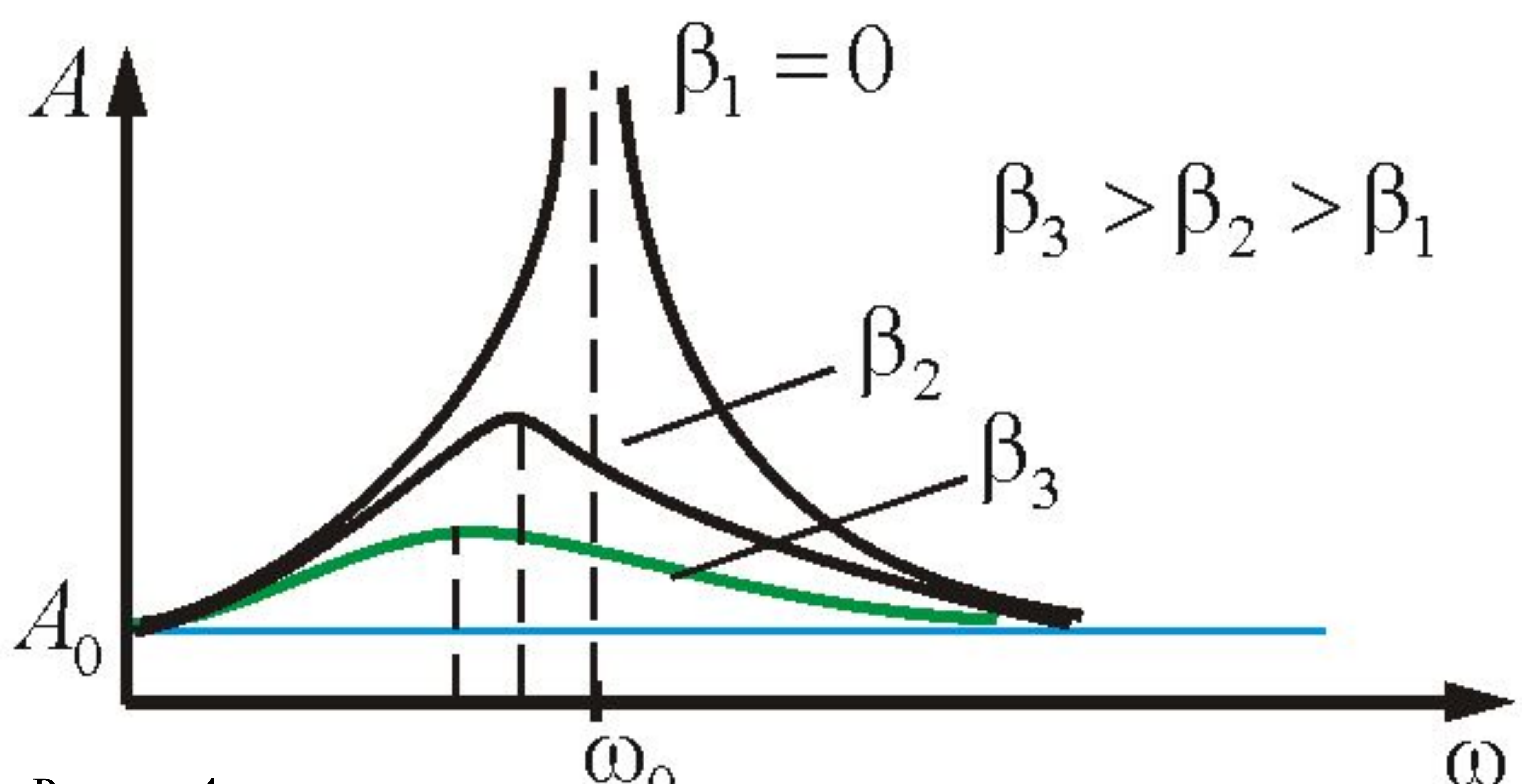


Рисунок 4

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$ – резонансная частота

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$ – резонансная частота.

Явление возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к $\omega_{\text{рез}}$ *называется резонансом*.

Для *консервативной* системы, т.е. $\beta = 0, \ \omega_{\text{рез}} = \omega_0$

для диссипативной $\omega_{рез}$ несколько меньше собственной круговой частоты ω_0.

С увеличением коэффициента затухания β явление резонанса проявляется все слабее и исчезает при

$$\beta > \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$$